

О ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ ОРДИНАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ ВНУТРЕННИХ ФУНКТОРОВ

Н.Л. Поляков

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
Москва, 109028, Покровский бульвар, 11
e-mail: npolyakov@hse.ru

В работе [1] для теоретико-модельной характеристики некоторых естественных предпорядков на множестве $\beta\omega$ ультрафильтров на множестве ω было введено понятие *скошенной предельной ультрастепени* ординального ранга α произвольной модели $\mathfrak{M}$ по ультрафильтру $\mathfrak{u} \in \beta\omega$. Мы покажем, что это понятие допускает широкие обобщения, которые могут быть определены в терминах теории категорий. Для упрощения обозначений в определениях категорных конструкций мы будем использовать символы теоретико-множественных операций. Если угодно, все нижеследующие категории можно воспринимать как «достаточно богатые» малые категории.

Определим понятие категории с пределами. Пусть $\mathcal{K} = (\text{Ob}_{\mathcal{K}}, \text{Hom}_{\mathcal{K}})$ есть категория и $\mathcal{J} = (\text{Ob}_{\mathcal{J}}, \text{Hom}_{\mathcal{J}})$ есть малая категория. Для каждой диаграммы $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$ *конусом* над D называется пара (c, In) , где $c \in \text{Ob}_{\mathcal{K}}$, $\text{In} = \{\text{in}_a\}_{a \in \text{Ob}_{\mathcal{J}}}$, $\text{in}_a \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}(D(a), c)$ и для любых $a, b \in \text{Ob}_{\mathcal{J}}$ и $f \in \text{Hom}_{\mathcal{J}}(a, b)$ выполнено: $D(f) \circ \text{in}_b = \text{in}_a$. Класс всех конусов над D обозначим символом $C(D)$.

Определение предела диаграммы D мы даем без требования его единственности. Для каждой диаграммы $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$ *пределом* D мы называем тройку $(c, \text{In}, \text{Out})$, где $\text{In} = \{\text{in}_a\}_{a \in \text{Ob}_{\mathcal{J}}}$, пара (c, In) есть конус над D , $\text{Out} = \{\text{out}_C\}_{C \in C(D)}$, и для каждого конуса $C = (c', \{\text{in}'_a\}_{a \in \text{Ob}_{\mathcal{J}}})$ над диаграммой D и объекта $a \in \text{Ob}_{\mathcal{J}}$ выполнено: $\text{in}_a \circ \text{out}_C = \text{in}'_a$. Пусть $(c, \text{In}, \text{Out})$ есть предел диаграммы D . Тогда объект c называется ее *предельным объектом*, морфизм in_a , $a \in \text{Ob}_{\mathcal{J}}$, ее *предельным входящим морфизмом* из $D(a)$ в c , а морфизм out_C , $C \in C(D)$, ее *предельным исходящим морфизмом* из c в C .

Категория $\mathcal{J} = (\text{Ob}, \text{Hom})$ называется *направленной*, если для любых двух объектов $a, b \in \text{Ob}$ множество $\text{Hom}(a, b) \cup \text{Hom}(b, a)$ состоит

из не более чем одного элемента, и для любых двух объектов $a, b \in \text{Ob}$ существует такой объект $c \in \text{Ob}$, что множества $\text{Hom}(a, c)$ и $\text{Hom}(b, c)$ не пусты. Диаграмма $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$ называется *направленной*, если категория $\mathcal{J}$ направленная.

Категория $\mathcal{K}$ называется *категорией с пределами*, если для каждой направленной диаграммы $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$ зафиксирован некоторый предел.

Пусть $(c, \text{In}, \text{Out})$ есть предел диаграммы $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$, а $(c', \text{In}', \text{Out}')$ есть предел диаграммы $D' : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$. Тогда можно канонически определить предел любого естественного преобразования $\{f_a\}_{a \in \text{Ob}_{\mathcal{J}}}$ из D в D' , т.е. такой морфизм $f \in \text{Hom}(c, c')$, что для каждого объекта a категории $\mathcal{J}$ коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{f} & c' \\ \text{in}_a \uparrow & & \uparrow \text{in}'_a \\ D(a) & \xrightarrow{f_a} & D'(a) \end{array}$$

Для этого надо положить f равным предельному исходящему морфизму out_C диаграммы D из c в конус $C = (c', \{f_a \circ \text{in}'_a\}_{a \in \text{Ob}_{\mathcal{J}}})$ над диаграммой D . Таким образом, в категориях с пределами канонически определены пределы любых естественных преобразований из направленной диаграммы $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$ в направленную диаграмму $D' : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$.

Внутренним функтором категории $\mathcal{K} = (\text{Ob}, \text{Hom})$ будем называть любую пару (Φ, E) , где Φ есть эндифунктор категории $\mathcal{K}$, а E есть такое семейство $\{e_a\}_{a \in \text{Ob}}$ морфизмов категории $\mathcal{K}$, что

1. $e_a \in \text{Hom}(a, \Phi(a))$,
2. для любых объектов $a, b \in \text{Ob}$ и морфизмов $f \in \text{Hom}(a, b)$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Phi(a) & \xrightarrow{\Phi(f)} & \Phi(b) \\ e_a \uparrow & & \uparrow e_b \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array}$$

Пример 1. Тривиальным примером внутреннего функтора произвольной категории $\mathcal{K} = (\text{Ob}, \text{Hom})$ является пара, состоящая из тождественного функтора и семейства $\{\text{id}_a\}_{a \in \text{Ob}}$.

Пример 2. Следующий пример служит основной мотивацией нашего исследования. Пусть $\mathcal{M} = (\text{Ob}, \text{Hom})$ есть категория элементарных вложений (вложений, гомоморфизмов) моделей первого порядка некоторой сигнатуры L . Пусть $\mathfrak{u}$ есть ультрафильтр на некотором множестве X , а Prod есть отображение, который каждой модели $\mathfrak{A} \in \text{Ob}$ ставит в соответствие ее ультрастепень $\prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A}$, а каждому морфизму $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ функцию $f^{\mathfrak{u}} : \prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A} \rightarrow \prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{B}$, определенную формулой $f^{\mathfrak{u}}(g_{\mathfrak{a}}) := (f \circ g)_{\mathfrak{a}}$ для всех $g_{\mathfrak{a}}$ из носителя модели $\prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A}$. Пусть $d_{\mathfrak{u}}$ обозначает диагональное вложение $\mathfrak{A}$ в $\prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A}$, и $D := \{d_{\mathfrak{u}}\}_{\mathfrak{u} \in \text{Ob}}$. Легко проверить, что (Prod, D) есть внутренний функтор категории $\mathcal{M}$.

Пример 3. Из результатов работ [2, 3] можно извлечь другой содержательный пример для той же категории $\mathcal{M}$. Пусть Ext есть отображение, которое каждой модели $\mathfrak{A} \in \text{Ob}$ ставит в соответствие ее ультрарасширение $\tilde{\mathfrak{A}}$, а каждому морфизму $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ функцию $\tilde{f}$. Пусть $e_{\mathfrak{u}}$ обозначает естественное вложение $\mathfrak{A}$ в $\tilde{\mathfrak{A}}$, и $E := \{e_{\mathfrak{u}}\}_{\mathfrak{u} \in \text{Ob}}$. Тогда вновь получаем, что (Ext, E) есть внутренний функтор категории $\mathcal{M}$.

Для каждого ординала α определена малая направленная категория с множеством объектов α и множествами морфизмов

$$\text{Hom}(\gamma, \beta) = \begin{cases} \{(\gamma, \beta)\}, & \text{если } \gamma \leq \beta, \\ \emptyset, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Мы будем обозначать эту категорию тем же символом α , и для каждого функтора $D : \alpha \rightarrow \mathcal{K}$ и ординалов $\gamma \leq \beta$ вместо $D((\gamma, \beta))$ будем записывать $D(\gamma, \beta)$. Для каждого функтора $D : \alpha \rightarrow \mathcal{K}$ и ординала $\beta \leq \alpha$ символом D_{β} будем обозначать ограничение функтора D на множество объектов β и множество морфизмов (δ, γ) , $\delta \leq \gamma < \beta$.

Определение 1. Пусть $\mathcal{K} = (\text{Ob}, \text{Hom})$ есть категория с пределами, а (Φ, E) есть внутренний функтор категории $\mathcal{K}$. Для каждого ординала $\alpha > 1$ системой ординальных итераций ранга $< \alpha$ внутреннего функтора (Φ, E) категории $\mathcal{K}$ будем называть пару $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ семейств $\mathcal{F} = \{\Phi^{\beta}\}_{\beta < \alpha}$ функторов $\Phi^{\beta} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ и $\mathcal{D} = \{D^a\}_{a \in \text{Ob}}$ функторов (направленных диаграмм) $D^a : \alpha \rightarrow \mathcal{K}$, где

1. Φ^0 есть тождественный функтор, и для любого ординала $\beta + 1 < \alpha$ выполнено: $\Phi^{\beta+1} = \Phi \circ \Phi^{\beta}$;
2. для любого объекта $a \in \text{Ob}$ и ординала $\beta < \alpha$ выполнено: $D^a(0, 1) = e_a$ и $D^a(\beta) = \Phi^{\beta}(a)$;

3. для любых объектов $a, b \in \text{Ob}$ и морфизма $f \in \text{Hom}(a, b)$ семейство $\{\Phi^\beta(f)\}_{\beta < \alpha}$ есть естественное преобразование из D^a в D^b ,
4. если β есть предельный ординал, то для любых объектов $a, b \in \text{Ob}$ и морфизма $f \in \text{Hom}(a, b)$ объект $\Phi^\beta(a)$ есть предельный объект направленной диаграммы D^a , морфизм $\Phi^\beta(f)$ есть предел естественного преобразования $\{\Phi^\beta(f)\}_{\beta < \alpha}$ из D^a в D^b , и для каждого ординала $\gamma < \beta$ морфизм $D^a(\gamma, \beta)$ есть предельный входящий морфизм диаграммы D_β^a из $\Phi^\gamma(a)$ в $\Phi^\beta(a)$.

Легко проверить, что для любого внутреннего функтора (Φ, E) можно определить систему ординальных итераций ранга $< \omega$, причем по меньшей мере двумя, вообще говоря, различными способами. Действительно, условие 1 Определения 1 однозначно определяет функтор Φ^n , $0 < n < \omega$, а тот факт, что D^a есть функтор, однозначно определяет морфизмы $D^a(m, n)$, $a \in \text{Ob}$, $m \leq n < \omega$, при заданных морфизмах $D^a(k, k+1)$, $k < \omega$. Последние же можно определить одним из двух способов: положив $D^a(k, k+1) = e_{\Phi^k(a)}$ либо $D^a(k, k+1) = \Phi^k(e_a)$. Это следует из того, что обе диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi^{k+1}(a) & \xrightarrow{\Phi^{k+1}(f)} & \Phi^{k+1}(b) \\
 \uparrow e_{\Phi^k(a)} & & \uparrow e_{\Phi^k(b)} \\
 \Phi^k(a) & \xrightarrow{\Phi^k(f)} & \Phi^k(b)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \Phi^{k+1}(a) & \xrightarrow{\Phi^{k+1}(f)} & \Phi^{k+1}(b) \\
 \uparrow \Phi^k(e_a) & & \uparrow \Phi^k(e_b) \\
 \Phi^k(a) & \xrightarrow{\Phi^k(f)} & \Phi^k(b)
 \end{array}$$

коммутативны. Размышления над этим фактом приводят к следующим определениям.

Определение 2. Систему ординальных итераций $(\{\Phi^\beta\}_{\beta < \alpha}, \{D^a\}_{a \in \text{Ob}})$ ранга $< \alpha$ внутреннего функтора (Φ, E) категории $\mathcal{K} = (\text{Ob}, \text{Hom})$ будем называть

1. *прямой*, если для любого объекта $a \in \text{Ob}$ и ординала $\beta + 1 < \alpha$ выполнено: $D^a(\beta, \beta + 1) = e_{\Phi^\beta(a)}$,
2. *скошенной*, если для любого объекта $a \in \text{Ob}$ и ординалов $\gamma + 1 < \beta + 1 < \alpha$ выполнено:
 - (а) $D^a(\gamma + 1, \beta + 1) = \Phi(D^a(\gamma, \beta))$,

- (b) если β есть предельный ординал, то $D^a(\beta, \beta + 1)$ есть предельный исходящий морфизм out_C диаграммы D_β^a из $\Phi^\beta(a)$ в конус $C = (\Phi^{\beta+1}(a), \{D^a(\gamma, \beta + 1)\}_{\gamma < \beta})$ над диаграммой D_β^a .

Теорема 3. Пусть $\mathcal{K}$ есть категория с пределами, а (Φ, E) есть внутренний функтор категории $\mathcal{K}$. Тогда для любого ординала α однозначно определены как прямая, так и скошенная система ординальных итераций внутреннего функтора (Φ, E) ранга $< \alpha$. При этом,

1. если $(\{\Phi^\beta\}_{\beta < \alpha}, \{D^a\}_{a \in \text{Ob}})$ есть прямая система ординальных итераций внутреннего функтора (Φ, E) ранга $< \alpha$, то для любых ординалов $\delta, \gamma, \beta < \alpha$ выполнено:

$$(a) \Phi^\beta \circ \Phi^\gamma = \Phi^{\gamma+\beta},$$

$$(b) \text{ если } \gamma < \beta, \text{ то } D^{\Phi^\delta(a)}(\gamma, \beta) = D^a(\delta + \gamma, \delta + \beta);$$

2. если $(\{\Phi^\beta\}_{\beta < \alpha}, \{D^a\}_{a \in \text{Ob}})$ есть скошенная система ординальных итераций внутреннего функтора (Φ, E) ранга $< \alpha$, то для любых ординалов $\delta, \gamma, \beta < \alpha$ выполнено:

$$(a) \Phi^\beta \circ \Phi^\gamma = \Phi^{\gamma+\beta},$$

$$(b) \text{ если } \gamma < \beta, \text{ то } \Phi^\delta(D(\gamma, \beta)) = D^a(\gamma + \delta, \beta + \delta).$$

Замечание 1. Несмотря на то, что конечные итерации внутреннего функтора в прямом и скошенном смысле «почти не отличаются», можно показать, что на трансфинитных шагах α прямые и скошенные системы итераций (если они существуют) приводят к существенно различным конструкциям. В частности, объекты $\Phi^\alpha(a)$ в прямом и скошенном смысле, вообще говоря, не изоморфны.

В категории $\mathcal{M}$ из Примера 2 определены естественные пределы, и, следовательно, относительно них однозначно определены прямая и скошенная итерации внутреннего функтора (Prod, D) . Будем обозначать их $(\{\text{Prod}^\beta\}_{\beta < \alpha}, \{D^a\}_{a \in \text{Ob}})$ и $(\{\text{Prod}_*^\beta\}_{\beta < \alpha}, \{D_*^a\}_{a \in \text{Ob}})$ соответственно.

Предложение 1. Для любого объекта $\mathfrak{A}$ категории $\mathcal{M}$ и ординала α объект $\text{Prod}^\alpha(\mathfrak{A})$ есть предельная ультрастепень $\mathfrak{A}$ ранга α по ультрафильтру $\mathfrak{u}$, а объект $\text{Prod}_*^\alpha(\mathfrak{A})$ есть скошенная предельная ультрастепень $\mathfrak{A}$ ранга α по ультрафильтру $\mathfrak{u}$.

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору Владимиру Борисовичу Гисину за плодотворное обсуждение результатов данной работы.

Список литературы

- [1] Poliakov N.L., Saveliev D.I. Generalizations of the Rudin-Keisler preorder and their model-theoretic applications // Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 151, 2 (2025): 6–11.
- [2] Saveliev D.I. On ultrafilter extensions of models // S.-D. Friedman et al. (eds.). The Infinity Project Proc. CRM Documents 11, Barcelona, 599–616 (2012).
- [3] Poliakov N.L., Saveliev D.I. On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations // Arch. Math. Logic, 60, 625–681 (2021).
- [4] Mac Lane, S. Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 5 (2nd ed.). Springer-Verlag (1998).
- [5] Гисин В.Б. Прикладная теория категорий. М., Прометей (2025).