

Полиномы Коробова и теневой анализ

Устинов А. В.*

Моим учителям ФМШ № 18 А. П. Веселову, О. А. Чалых, Н. М. Бовт и Б. М. Ивлеву

1 Введение

Числа Бернулли являются одной из самых важных и интересных последовательностей. Впервые они появились в посмертной работе Якоба Бернулли “Ars Conjectandi” [10] в связи с суммированием степеней натуральных чисел.

Позднее оказалось, что числа и полиномы Бернулли играют важную роль в самых разных областях математики. Они возникают в алгебраической теории чисел, p -адическом анализе, комбинаторике, теории ζ -функции Римана, исчислении конечных разностей, приближенном анализе, топологии. . . В августе 2003 библиография по числам Бернулли [13] содержала 2842 ссылки на 1423 автора.

В 1996 году Коробовым (см. [3]) были введены специальные числа и специальные полиномы, которые можно назвать дискретными аналогами чисел Бернулли B_n и полиномов Бернулли $B_n(x)$. По своим свойствам они занимают промежуточное положение между полиномами Бернулли 1-го рода $B_n(x)$ и 2-го рода $b_n(x)$.

В свое время числа и полиномы Бернулли сыграли ключевую роль в создании теневого анализа (см. [16]–[19]). Рота вместе со своей школой построил теорию, которая строго обосновывает “символическое исчисление”, использовавшееся ранее для нестрогого вывода формул ([2] 9.5, [7] гл. XVII). В настоящее время теневой анализ превратился в самостоятельную дисциплину с приложениями в комбинаторике, анализе, физике, теории графов и других областях (см. [11]).

В первой части настоящей работы рассказывается об основных свойствах полиномов Коробова $K_n(x)$ и по аналогии с полиномами Бернулли 2-го рода вводятся полиномы Коробова 2-го рода $k_n(x)$. Затем дается краткий обзор основных понятий и теорем теневого анализа. В третьей части статьи теневой анализ применяется к доказательству различных свойств полиномов Коробова.

2 Полиномы Коробова

Обозначения. Для всякой функции $f(x)$ через $\Delta f(x)$ и $\Delta_a f(x)$ будем обозначать ее конечные разности с шагом 1 и a соответственно: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta_a f(x) = f(x+a) - f(x)$.

Символы $x^{\underline{n}}$ и $x^{\underline{n;p}}$ будем использовать для записи убывающих факториальных степеней:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-(n-1)), \quad x^{\underline{n;p}} = x(x-p)(x-2p)\dots(x-(n-1)p).$$

Через $\left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right]$ и $\left\{ \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right\}$ будем обозначать числа Стирлинга 1-го и 2-го рода, которые при $n \geq 0$ и $0 \leq m \leq n$ определяются равенствами (см. [2]):

$$x^{\underline{n}} = \sum_{m=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right] (-1)^{n-m} x^m, \quad x^n = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{m}}. \quad (1)$$

Обозначения $\left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right]_p$ и $\left\{ \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right\}_p$ будем использовать для обобщенных чисел Стирлинга 1-го и 2-го рода, которые при $n \geq 0$ и $0 \leq m \leq n$ задаются как коэффициенты в следующих разложениях

*Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, гранты № 01-01-00738 и № 03-01-06147

(см. [6]):

$$x^{n,p} = \sum_{m=0}^n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_p (-1)^{n-m} x^m, \quad x^n = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_p x^{m,p}. \quad (2)$$

$\delta_{m,n}$ — символ Кронекера: $\delta_{m,n} = 1$ при $m = n$ и $\delta_{m,n} = 0$ при $m \neq n$.

Определения и примеры. Напомним, что *числа Бернулли* B_n и *полиномы Бернулли* $B_n(x)$ определяются с помощью следующих экспоненциальных производящих функций (см., например, [1]):

$$F_B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}, \quad (3)$$

$$F_B(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}. \quad (4)$$

В частности,

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, & B_1 &= -\frac{1}{2}, & B_2 &= \frac{1}{6}, & B_3 &= 0, \\ B_0(x) &= 1, & B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, & B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Для фиксированного действительного p , *числа Коробова* K_n и *полиномы Коробова* $K_n(x)$ определим при помощи равенств (см. [3], [5]):

$$F_K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \frac{t^n}{n!} = \frac{pt}{(t+1)^p - 1}, \quad (5)$$

$$F_K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p - 1}. \quad (6)$$

В случаях, когда нужно явно указать зависимость чисел K_n и полиномов $K_n(x)$ от параметра p , будем использовать обозначения $K_n^{(p)}$, $K_n^{(p)}(x)$.

Первые примеры выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} K_0 &= 1, & K_1 &= -\frac{p-1}{2}, & K_2 &= \frac{p^2-1}{6}, & K_3 &= -\frac{p^2-1}{4}, \\ K_0(x) &= 1, & K_1(x) &= x - \frac{p-1}{2}, & K_2(x) &= x^2 - px + \frac{p^2-1}{6}, \\ K_3(x) &= x^3 - \frac{3(p+1)}{2}x^2 + \frac{p(p+3)}{2}x - \frac{p^2-1}{4}. \end{aligned} \quad (7)$$

По ним можно заметить, что числа и полиномы Коробова связаны с числами и полиномами Бернулли формулами

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^{-n} K_n = B_n, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p^{-n} K_n(px) = B_n(x) \quad (n \geq 0).$$

Этот факт сразу следует из определений (3)–(6) и равенств

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p(t/p)}{(1+t/p)^p - 1} = \frac{t}{e^t - 1}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p(t/p)(1+t/p)^{px}}{(1+t/p)^p - 1} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}.$$

С другой стороны, при $p = 0$ числа и полиномы Коробова (7) превращаются соответственно в *числа и полиномы Бернулли 2-го рода* (см. [12], [14], [16])

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, & b_1 &= \frac{1}{2}, & b_2 &= \frac{1}{6}, & b_3 &= \frac{1}{4}, \\ b_0(x) &= 1, & b_1(x) &= x + \frac{1}{2}, & b_2(x) &= x^2 - \frac{1}{6}, \\ & & b_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

которые определяются с помощью следующих экспоненциальных производящих функций:

$$F_b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\ln(1+t)}, \quad (8)$$

$$F_b(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t(1+t)^x}{\ln(1+t)}. \quad (9)$$

Для произвольного $n \geq 0$ это утверждение также является следствием определений (5)–(6), (8)–(9) и равенства

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{pt}{(1+t)^p - 1} = \frac{t}{\ln(1+t)}.$$

Таким образом можно сказать, что полиномы Коробова по своим свойствам занимают промежуточное положение между полиномами Бернулли 1-го и 2-го рода.

По аналогии с числами и полиномами Бернулли 2-го рода можно определить числа и полиномы Коробова 2-го рода.

Определение 1 Для $n \geq 0$ определим числа $k_n = k_n^{(p)}$ и полиномы $k_n(x) = k_n^{(p)}(x)$ (числа и полиномы Коробова 2-го рода) с помощью равенств

$$F_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{(1+pt)^{1/p} - 1}, \quad (10)$$

$$F_k(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t(1+pt)^{x/p}}{(1+pt)^{1/p} - 1}. \quad (11)$$

Функции $F_k(t)$ и $F_k(x, t)$ подобраны так, что при (одновременных) заменах

$$x \rightarrow x/p, \quad t \rightarrow pt, \quad p \rightarrow 1/p. \quad (12)$$

они превращаются в производящие функции чисел и многочленов Коробова первого рода $F_K(t)$ и $F_K(x, t)$. Причем при повторных заменах происходит обратное превращение. Отсюда следует, что многочлены Коробова 1-го и 2-го рода связаны друг с другом соотношениями

$$k_n^{(p)}(x) = p^n K_n^{(1/p)}(x/p), \quad K_n^{(p)}(x) = p^n k_n^{(1/p)}(x/p), \quad (13)$$

и в этом смысле играют двойственную роль по отношению друг к другу. Полиномы Коробова 1-го рода близки к $B_n(x)$ в равномерной норме и к $b_n(x)$ — в p -адической. В то же время полиномы Коробова 2-го рода в равномерной норме оказываются близки к $b_n(x)$, а в p -адической — к $B_n(x)$.

Из (7) и (13) получаются первые примеры чисел k_n и полиномов $k_n(x)$:

$$\begin{aligned} k_0 &= 1, & k_1 &= \frac{p-1}{2}, & k_2 &= -\frac{p^2-1}{6}, & k_3 &= \frac{p(p^2-1)}{4}, \\ k_0(x) &= 1, & k_1(x) &= x + \frac{p-1}{2}, & k_2(x) &= x^2 - x - \frac{p^2-1}{6}, \\ k_3(x) &= x^3 - \frac{3(p+1)}{2}x^2 + \frac{3p+1}{2}x + \frac{p(p^2-1)}{4}. \end{aligned}$$

Основные свойства полиномов Коровова. В работах [3]–[6] были доказаны различные свойства полиномов $K_n(x)$. Почти все они при помощи формул (13) легко преобразуются в свойства полиномов $k_n(x)$:

1°. $K_n(0) = K_n$	$k_n(0) = k_n$	$(n \geq 0)$
2°. $\Delta K_n(x) = n K_{n-1}(x)$	$\Delta_p k_n(x) = np k_{n-1}(x)$	$(n \geq 1)$
3°. $\Delta_p K_n(x) = np x^{n-1}$	$\Delta k_n(x) = n x^{n-1,p}$	$(n \geq 1)$
4°. $K_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} K_{n-\nu} x^\nu$	$k_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} k_{n-\nu} x^{\nu,p}$	$(n \geq 0)$
5°. $K_n(x+y) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} K_{n-\nu}(y) x^\nu$	$k_n(x+y) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} k_{n-\nu}(y) x^{\nu,p}$	$(n \geq 0)$
6°. $K_n(p-x) = (-1)^n K_n(x+n-2)$	$k_n(1-x) = (-1)^n k_n(x+(n-2)p)$	$(n \geq 0)$
7°. $\sum_{\nu=0}^{m-1} K_n^{(m,p)}(x+\nu p) = m K_n^{(p)}(x)$	$\sum_{\nu=0}^{m-1} k_n^{(p)}(x+\nu/m) = m^{1-n} k_n^{(m,p)}(mx)$	$(n \geq 0)$

(Исключение составляет последнее свойство, в котором существенно, что p — натуральное число. Оно проверяется непосредственно по определению (11).) При $p \rightarrow \infty$ и при $p = 0$ с учетом равенств

$$\begin{aligned} K_n^{(0)} &= b_n(x), & \lim_{p \rightarrow \infty} p^{-n} K_n^{(p)}(px) &= B_n(x), \\ k_n^{(0)} &= B_n(x), & \lim_{p \rightarrow \infty} p^{-n} k_n^{(p)}(px) &= b_n(x), \end{aligned}$$

они становятся известными свойствами полиномов Бернулли 1-го и 2-го рода:

1°. $B_n(0) = B_n$	$b_n(0) = b_n$	$(n \geq 0)$
2°. $B'_n(x) = n B_{n-1}(x)$	$\Delta b_n(x) = n b_{n-1}(x)$	$(n \geq 1)$
3°. $\Delta B_n(x) = n x^{n-1}$	$b'_n(x) = n x^{n-1}$	$(n \geq 1)$
4°. $B_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_{n-\nu} x^\nu$	$b_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} b_{n-\nu} x^\nu$	$(n \geq 0)$
5°. $B_n(x+y) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_{n-\nu}(y) x^\nu$	$b_n(x+y) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} b_{n-\nu}(y) x^\nu$	$(n \geq 0)$
6°. $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$	$b_n(-x) = (-1)^n b_n(x+n-2)$	$(n \geq 0)$
7°. $\sum_{\nu=0}^{m-1} B_n(x+\nu/m) = m^{1-n} B_n(mx)$	$\int_{mx}^{mx+1} y^n dy = b_n(mx)$	$(n \geq 0)$

Для дальнейшего изложения понадобятся следующие соотношения, которые являются прямыми следствиями свойств 2° и 3°:

$$\int_0^1 B_n(x+y) dy = x^n, \quad \int_0^1 (x+y)^n dy = b_n(x), \quad (14)$$

$$\frac{1}{p} \sum_{y=0}^{p-1} K_n(x+y) = x^n, \quad \frac{1}{p} \sum_{y=0}^{p-1} (x+y)^{n,p} = k_n(x). \quad (15)$$

3 Основные понятия теневого анализа

Линейные функционалы. Поскольку книга [16] малодоступна для российского читателя, остановимся коротко на некоторых понятиях *теневого анализа* (umbral calculus).

Пусть $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x]$ — алгебра полиномов от переменной x . Через \mathcal{P}^* будем обозначать пространство линейных функционалов на \mathcal{P} . Для действия функционала $L \in \mathcal{P}^*$ на полиноме $q(x) \in \mathcal{P}$ принято обозначение, заимствованное из физики: $\langle L | q(x) \rangle$. Пусть, далее, $\mathcal{F} = \mathbb{C}[[t]]$ — алгебра экспоненциальных производящих функций от переменной t , то есть множество формальных степенных рядов вида

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}. \quad (16)$$

Всякому такому ряду будем ставить в соответствие функционал $L \in \mathcal{P}^*$, определяемый условиями

$$\langle L | x^n \rangle = a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Очевидно, что это соответствие задает изоморфизм линейных пространств \mathcal{P}^* и \mathcal{F} . Поэтому можно отождествлять функционал L с соответствующим ему рядом $f_L(t)$ и писать $\langle f_L(t) | q(x) \rangle$ вместо $\langle L | q(x) \rangle$. Так как пространство \mathcal{F} является алгеброй, то изоморфизм между \mathcal{F} и \mathcal{P}^* позволяет ввести структуру алгебры и на пространстве \mathcal{P}^* . При этом произведению двух функционалов L и M будет соответствовать функционал (ряд)

$$f_{LM}(t) = f_L(t) \cdot f_M(t).$$

Алгебра формальных степенных рядов (она же алгебра линейных операторов на \mathcal{P}) называется *теневой алгеброй* (umbral algebra). Если $f_L(t)$ и $f_M(t)$ — экспоненциальные производящие функции последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_k\}$, то ряд $f_{LM}(t) = f_L(t) \cdot f_M(t)$ является экспоненциальной производящей функцией последовательности $\{c_m\}$, которая называется *биномиальной сверткой* $\{a_n\}$ и $\{b_k\}$:

$$c_m = \sum_{n+j=m} \binom{m}{j} a_n b_j \quad (m \geq 0).$$

Поэтому значение функционала f_{LM} на одночлене x^m можно выписать в явном виде:

$$\langle f_{LM}(t) | x^m \rangle = \sum_{n+j=m} \binom{m}{j} \langle f_L(t) | x^n \rangle \langle f_M(t) | x^j \rangle \quad (m \geq 0). \quad (18)$$

Приведем простейшие примеры линейных функционалов.

1. Дифференцирование данного многочлена в точке $x = 0$: $\langle t^n | q(x) \rangle = q^{(n)}(x)|_{x=0}$.
2. Вычисление значения $q(x)$ в некоторой точке y : $\langle e^{yt} | q(x) \rangle = q(y)$.
3. Конечная разность в точке $x = 0$: $\langle e^{yt} - 1 | q(x) \rangle = q(y) - q(0) = \Delta_y q(0)$.
4. Интегрирование по отрезку $[0, y]$: $\left\langle \frac{e^{yt} - 1}{t} \middle| q(x) \right\rangle = \int_0^y q(u) du$.
5. Суммирование по целым точкам некоторого интервала: $\left\langle \frac{e^{nt} - 1}{e^t - 1} \middle| q(x) \right\rangle = \sum_{m=0}^{n-1} q(m)$.

Все эти соотношения легко доказываются с помощью формул (16) и (17). (В силу линейности, их достаточно проверить для одночленов $q(x) = x^n$.)

Отметим, что два последних примера позволяют переписать на языке теневого анализа определения чисел Стирлинга (1):

$$\langle t^m | x^n \rangle = m! (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\langle (e^t - 1)^m | x^n \rangle = m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}, \quad (20)$$

и обобщенных чисел Стирлинга (2):

$$\langle (e^t - 1)^m | x^{\underline{n}, p} \rangle = m! (-1)^{n-m} \left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_p, \quad (21)$$

$$\left\langle \left(\frac{e^{pt} - 1}{p} \right)^m | x^{\underline{n}} \right\rangle = m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_p. \quad (22)$$

Линейные операторы. Следующим важным объектом являются линейные операторы, действующие на \mathcal{P} . Обозначение t^n используется для оператора n -кратного дифференцирования:

$$t^n q(x) = q^{(n)}(x) \quad (n \geq 0).$$

Оператор t^0 , соответственно, является тождественным. Каждому ряду (16) (по линейности) соответствует линейный оператор $f(t)$, действующий по правилу

$$f(t)q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{q^{(n)}(x)}{n!}. \quad (23)$$

Для записи операторов намеренно используется та же переменная t . Это приводит к тому, что каждый элемент f алгебры \mathcal{F} выступает сразу в трех ролях: во-первых, f — это экспоненциальная производящая функция; во-вторых, f — линейный функционал; в-третьих, f — линейный оператор. Но путаницы не возникает, поскольку различные обозначения

$$f(t), \quad \langle f(t) | q(x) \rangle \quad \text{и} \quad f(t)q(x)$$

однозначно определяют роль $f(t)$ в каждом конкретном случае.

Так как $(t^l t^j) x^n = t^l (t^j x^n)$, то для любых $f(t), g(t) \in \mathcal{F}$ и $q(x) \in \mathcal{P}$ выполняется равенство $[f(t)g(t)]q(x) = f(t)[g(t)q(x)]$, и выражения вида $f(t)g(t)q(x)$ не содержат в себе никакой неопределенности. В частности, всегда выполняется равенство

$$f(t)g(t)q(x) = g(t)f(t)q(x),$$

и для обратимых по умножению функций $f(t)$

$$u(x) = f(t)w(x) \iff w(x) = f^{-1}(t)u(x). \quad (24)$$

Использование одной и той же переменной t оправдывается соотношением

$$\langle f(t)g(t) | q(x) \rangle = \langle f(t) | g(t)q(x) \rangle. \quad (25)$$

Для мономов x^n оно является прямым следствием формулы (18), а для полиномов общего вида следует из линейности рассматриваемых функционалов. Аналогично проверяются следующие полезные равенства

$$\langle f(t) | q(ax) \rangle = \langle f(at) | q(x) \rangle, \quad (26)$$

$$\langle f'(t) | q(x) \rangle = \langle f(t) | xq(x) \rangle. \quad (27)$$

Как и для функционалов, укажем простейшие примеры линейных операторов.

1. Дифференцирование данного многочлена: $t^k q(x) = q^{(k)}(x)$.
2. Оператор сдвига на y : $e^{yt} q(x) = q(x + y)$.
3. Оператор конечной разности с шагом y : $(e^{yt} - 1)q(x) = q(x + y) - q(x) = \Delta_y q(x)$.
4. Интегрирование по некоторому отрезку: $\frac{e^{yt} - 1}{t} q(x) = \int_x^{x+y} q(u) du$.
5. Оператор суммирования: $\frac{e^{nt} - 1}{e^t - 1} q(x) = \sum_{m=0}^{n-1} q(x + m)$.

Эти равенства, как и в случае функционалов, достаточно доказать для одночленов $q(x) = x^n$. Проверка всякий раз сводится к подсчету суммы (23).

Менее тривиальными являются операторы, обратные к операторам интегрирования и суммирования. Чтобы описать их действие заметим, что формулы (14) могут быть записаны в виде

$$\frac{e^t - 1}{t} B_n(x) = x^n, \quad (28)$$

$$\frac{e^t - 1}{t} x^n = b_n(x). \quad (29)$$

Отсюда, в силу (24),

$$\frac{t}{e^t - 1} x^n = B_n(x), \quad (30)$$

$$\frac{t}{e^t - 1} b_n(x) = x^n.$$

Аналогично соотношения (15) равносильны равенствам

$$\frac{e^{pt} - 1}{p(e^t - 1)} K_n(x) = x^n, \quad (31)$$

$$\frac{e^{pt} - 1}{p(e^t - 1)} x^{n,p} = k_n(x),$$

откуда

$$\frac{p(e^t - 1)}{e^{pt} - 1} x^n = K_n(x), \quad (32)$$

$$\frac{p(e^t - 1)}{e^{pt} - 1} k_n(x) = x^{n,p}.$$

Последовательности Шеффера. Если $g(0) \neq 0$, то ряд $g(t) \in \mathcal{F}$ обратим по умножению. Если для ряда $f(t) \in \mathcal{F}$ выполняются условия $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, то для такого ряда существует и единственный ряд $\bar{f}(t) \in \mathcal{F}$ обратный по отношению к операции композиции: $f(\bar{f}(t)) = \bar{f}(f(t)) = t$. Такие ряды принято называть δ -рядами.

Методом неопределенных коэффициентов нетрудно проверить, что если ряд $g(t)$ обратим по умножению, а $f(t)$ — δ -ряд, то существует ровно одна последовательность полиномов $\{s_n(x)\}$ таких, что $\deg s_n(x) = n$ и

$$\langle g(t)f^m(t) | s_n(x) \rangle = n! \delta_{m,n}. \quad (33)$$

Последовательность $\{s_n(x)\}$ называется *последовательностью Шеффера* для пары $(g(t), f(t))$. Условие (33) легко проверяется, если известна экспоненциальная производящая функция последовательности $\{s_n(x)\}$. Оно равносильно равенству ([16], теорема 2.3.4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{g(\bar{f}(t))} e^{x\bar{f}(t)}. \quad (34)$$

Приведем простейшие примеры последовательностей Шеффера.

1. $s_n(x) = x^n$: $g(t) = 1$, $f(t) = t$;
2. $s_n(x) = x^n$: $g(t) = 1$, $f(t) = e^t - 1$;
3. $s_n(x) = x^{n,p}$: $g(t) = 1$, $f(t) = \frac{e^{pt} - 1}{p}$;
4. $s_n(x) = B_n(x)$: $g(t) = \frac{e^t - 1}{t}$, $f(t) = t$;
5. $s_n(x) = b_n(x)$: $g(t) = \frac{t}{e^t - 1}$, $f(t) = e^t - 1$.

Большое количество других специальных полиномов, таких как полиномы Абеля, Бесселя, Гуда, Лагерра, Эрмита и т. д., также являются последовательностями Шеффера для соответствующих пар $(g(t), f(t))$.

Если $\{s_n(x)\}$ — последовательность Шеффера для пары функций $(g(t), f(t))$, то это позволяет решать различные вопросы, связанные с полиномами $s_n(x)$. Примером может служить задача о представлении многочлена $q(x) \in \mathbb{P}$ в виде линейной комбинации многочленов $s_n(x)$. Ответ задается формулой

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g(t)f^n(t) | q(x) \rangle \frac{s_n(x)}{n!}. \quad (35)$$

(Для доказательства достаточно к обеим части этого равенства применить функционал $g(t)f^n(t)$.) Другие примеры, связанные с доказательствами аналитических и арифметических свойств специальных полиномов могут быть найдены в книге [16].

4 Полиномы Коробова и теневой анализ

Из определения (6) и критерия (34) следует, что полиномы $K_n(x)$ являются последовательностью Шеффера для пары функций $g(t) = \frac{e^{pt}-1}{p(e^t-1)}$ и $f(t) = e^t - 1$. Аналогично, полиномы $k_n(x)$ соответствуют функциям $g(t) = \frac{p(e^t-1)}{e^{pt}-1}$ и $f(t) = \frac{e^{pt}-1}{p}$. Поэтому многочисленные свойства полиномов $K_n(x)$ и $k_n(x)$ могут быть получены как следствия общих теорем о последовательностях Шеффера.

В качестве простейших приложений теневой анализа к полиномам Коробова докажем для них формулы, аналогичные известным разложениям

$$\begin{aligned} B_n(x) &= B_n + \sum_{\nu=1}^n \frac{n}{\nu} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\} x^\nu, \\ b_n(x) &= b_n + \sum_{\nu=1}^n \frac{n}{\nu} \left[\begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right] (-1)^{n-\nu} x^\nu. \end{aligned}$$

Предложение 1 При $n \geq 0$ справедливы равенства

$$K_n(x) = K_n + \sum_{\nu=1}^n \frac{n}{\nu} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\}_p x^{\nu,p}, \quad (36)$$

$$k_n(x) = k_n + \sum_{\nu=1}^n \frac{n}{\nu} \left[\begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right]_p (-1)^{n-\nu} x^\nu. \quad (37)$$

Доказательство. Как отмечалось ранее, $\{s_n(x)\} = x^{\underline{n,p}}$ — последовательность Шеффера для пары $(1, (e^{pt}-1)/p)$. Следовательно, по формуле (35)

$$K_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^\nu \middle| K_n(x) \right\rangle \frac{x^{\nu,p}}{\nu!}.$$

При $\nu = 0$

$$\left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^\nu \middle| K_n(x) \right\rangle = \langle 1 | K_n(x) \rangle = K_n(0) = K_n.$$

При $\nu \geq 1$ применяя последовательно формулу (25), свойство 3° полиномов $K_n(x)$ и равенство (22), находим

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^\nu \middle| K_n(x) \right\rangle &= \left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^{\nu-1} \middle| \frac{e^{pt}-1}{p} K_n(x) \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^{\nu-1} \middle| \frac{1}{p} \Delta_p K_n(x) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^{\nu-1} \middle| n x^{\underline{n-1}} \right\rangle = (\nu-1)! \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\}_p, \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (36).

Для доказательства равенства (37) достаточно в (36) сделать замены (12) и применить тождество $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_p = \left(-\frac{1}{p} \right)^{n-m} \left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_p$ (см. [6], предложение 2).

В работах [3]–[4] доказаны формулы, связывающие между собой полиномы $B_n(x)$ и $K_n(x)$. Ниже эти формулы выводятся средствами теневого анализа, причем устанавливается явное значение свободного члена, отсутствовавшее в работах [3]–[4].

Предложение 2 При $n \geq 0$ справедливы равенства

$$K_n(px) = b_n + \sum_{\nu=1}^n \frac{n}{\nu} \left[\begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right] (-1)^{n-\nu} p^\nu B_\nu(x), \quad (38)$$

$$p^n B_n(x) = B_n + \sum_{\nu=1}^n \frac{n}{\nu} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\} K_\nu(px), \quad (39)$$

$$k_n(x) = p^n b_n + \sum_{\nu=1}^n \frac{n}{\nu} \left[\begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right] (-p)^{n-\nu} B_\nu(x), \quad (40)$$

$$B_n(x) = p^n B_n + \sum_{\nu=1}^n \frac{n}{\nu} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\} p^{n-\nu} k_\nu(px). \quad (41)$$

Доказательство. Снова воспользуемся формулой (35). В первом случае необходимо вычислить коэффициенты $\left\langle \frac{e^t-1}{t} t^\nu \middle| K_n(px) \right\rangle$ ($0 \leq \nu \leq n$). При $\nu = 0$ по формулам (26), (25), (31) и (29) находим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e^t-1}{t} \middle| K_n(px) \right\rangle &= \left\langle \frac{e^{pt}-1}{pt} \middle| K_n(x) \right\rangle = \left\langle \frac{e^t-1}{t} \cdot \frac{e^{pt}-1}{p(e^t-1)} \middle| K_n(x) \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{e^t-1}{t} \middle| \frac{e^{pt}-1}{p(e^t-1)} K_n(x) \right\rangle = \left\langle \frac{e^t-1}{t} \middle| x^n \right\rangle = b_n. \end{aligned}$$

Аналогично при $\nu \geq 1$, применяя последовательно равенства (26), (25), свойство 3° полиномов $K_n(x)$ и формулу (19), получаем

$$\begin{aligned} \langle (e^t-1)t^{\nu-1} \middle| K_n(px) \rangle &= p^{\nu-1} \langle (e^{pt}-1)t^{\nu-1} \middle| K_n(x) \rangle = p^{\nu-1} \langle t^{\nu-1} \middle| (e^{pt}-1)K_n(x) \rangle = \\ &= p^\nu \langle t^{\nu-1} \middle| nx^{\frac{n-1}{p}} \rangle = p^\nu (-1)^{n-\nu} n(\nu-1)! \left[\begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right]. \end{aligned}$$

Для доказательства второго тождества также воспользуемся формулой (35). Согласно равенству (26), полиномы $K_n(px)$ являются последовательностью Шеффера для пары функций $g(t) = \frac{e^t-1}{p(e^{t/p}-1)}$, $f(t) = e^{t/p} - 1$. Поэтому

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \left\langle \frac{e^t-1}{p(e^{t/p}-1)} (e^{t/p}-1)^\nu \middle| B_n(x) \right\rangle \frac{K_n(px)}{\nu!}.$$

При $\nu = 0$ из формул (25), (28), (26) и (30) находим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e^t-1}{p(e^{t/p}-1)} \middle| B_n(x) \right\rangle &= \left\langle \frac{t}{p(e^{t/p}-1)} \cdot \frac{e^t-1}{t} \middle| B_n(x) \right\rangle = \left\langle \frac{t}{p(e^{t/p}-1)} \middle| \frac{e^t-1}{t} B_n(x) \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{t}{p(e^{t/p}-1)} \middle| x^n \right\rangle = \left\langle \frac{t}{e^t-1} \middle| \left(\frac{x}{p} \right)^n \right\rangle = \frac{B_n}{p^n}. \end{aligned}$$

Аналогично при $\nu \geq 1$ по свойству 3° полиномов $K_n(x)$ и формулам (26), (19)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e^t-1}{p} (e^{t/p}-1)^{\nu-1} \middle| B_n(x) \right\rangle &= \left\langle (e^{t/p}-1)^{\nu-1} \middle| \frac{nx^{n-1}}{p} \right\rangle = \\ &= \frac{n}{p^n} \langle (e^t-1)^{\nu-1} \middle| x^{n-1} \rangle = \frac{(\nu-1)!n}{p^n} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Равенства (40) и (41) получаются из равенств (38) и (39) с помощью замен (12).

Известны следующие формулы, связывающие между собой полиномы Бернулли 1-го и 2-го рода:

$$B_n(x) = (1-n)K_n - nB_{n-1} + nB_{n-1}b_1(x) + \sum_{\nu=2}^n \frac{n(n-1)}{\nu(\nu-1)} \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ \nu-2 \end{matrix} \right\} b_\nu(x),$$

$$b_n(x) = (1-n)b_n - n(n-2)b_{n-1} + nb_{n-1}B_1(x) + \sum_{\nu=2}^n \frac{n(n-1)}{\nu(\nu-1)} \left[\begin{matrix} n-2 \\ \nu-2 \end{matrix} \right] (-1)^{n-\nu} B_\nu(x).$$

Докажем аналогичные формулы для многочленов $K_n(x)$ и $k_n(x)$.

Предложение 3 При $n \geq 0$ справедливы равенства

$$K_n(x) = (1-n)K_n + n(2-n-p)K_{n-1} + nK_{n-1}k_1(x) + \sum_{\nu=2}^n \frac{n(n-1)}{\nu(\nu-1)} \left[\begin{matrix} n-2 \\ \nu-2 \end{matrix} \right]_p k_\nu(x), \quad (42)$$

$$k_n(x) = (1-n)k_n - n(p(n-2)-1)k_{n-1} + nk_{n-1}K_1(x) + \sum_{\nu=2}^n \frac{n(n-1)}{\nu(\nu-1)} \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ \nu-2 \end{matrix} \right\}_p (-1)^{n-\nu} K_\nu(x). \quad (43)$$

Доказательство. По формуле (35)

$$K_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \left\langle (e^t - 1) \left(\frac{e^{pt} - 1}{p} \right)^{\nu-1} \middle| K_n(x) \right\rangle \frac{k_\nu(x)}{\nu!}.$$

При $\nu = 0$ необходимо найти величину $\langle f(t) | K_n(x) \rangle$, где $f(t) = \frac{p(e^t - 1)}{e^{pt} - 1}$. Подставляя $f(t) = e^{(1-p)t} - \frac{1-e^{-pt}}{p} f'(t)$ и пользуясь формулой (27), получаем

$$\begin{aligned} \langle f(t) | K_n(x) \rangle &= \left\langle e^{(1-p)t} \middle| K_n(x) \right\rangle - \left\langle f'(t) \middle| \frac{1-e^{-pt}}{p} K_n(x) \right\rangle = \\ &= K_n(1-p) - \langle f'(t) | n(x-p) \frac{n-1}{p} \rangle = K_n(1-p) - n \langle f(t) | x(x-p) \frac{n-1}{p} \rangle. \end{aligned}$$

Так как $x(x-p) \frac{n-1}{p} = (x-p+1) \frac{n-1}{p} + (p-1)(x-p) \frac{n-1}{p}$, то из (32)

$$\langle f(t) | K_n(x) \rangle = (1-n)K_n(1-p) - n(p-1)K_{n-1}(-p).$$

Далее, по свойству 2° полиномов $K_n(x)$, $K_n(1-p) = nK_{n-1}(-p) = K_n(-p)$, значит

$$\langle f(t) | K_n(x) \rangle = (1-n)K_n(-p) + n(2-n-p)K_{n-1}(-p).$$

Наконец, согласно свойству 3°, $K_n(-p) = K_n - np(-p) \frac{n-1}{p}$, и, следовательно,

$$\langle f(t) | K_n(x) \rangle = (1-n)K_n + n(2-n-p)K_{n-1}.$$

Пусть $\nu = 1$. Тогда получаем коэффициент $\langle e^t - 1 | K_n(x) \rangle = nK_{n-1}$.

При $\nu \geq 2$

$$\begin{aligned} \left\langle (e^t - 1) \left(\frac{e^{pt} - 1}{p} \right)^{\nu-1} \middle| K_n(x) \right\rangle &= n \left\langle \left(\frac{e^{pt} - 1}{p} \right)^{\nu-1} \middle| K_{n-1}(x) \right\rangle = \\ &= n \left\langle \left(\frac{e^{pt} - 1}{p} \right)^{\nu-2} \middle| (n-1)x \frac{n-2}{p} \right\rangle = n(n-1)(\nu-2)! \left[\begin{matrix} n-2 \\ \nu-2 \end{matrix} \right]_p. \end{aligned}$$

Как и раньше, равенство (43) получается из (42) с помощью замен (12) и формулы $\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_p = \left(-\frac{1}{p} \right)^{n-m} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_p$ (см. [6], предложение 2).

Исторический комментарий. Числа K_n возникали у Эйлера в его “Интегральном исчислении” (см. [9], раздел 2, гл. IV, задача 160). Эйлер рассматривает неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$p \frac{y(x)}{a} - \binom{p}{2} \frac{y'(x)}{a^2} + \binom{p}{3} \frac{y''(x)}{a^3} - \dots = z(x)$$

и находит его частное решение в виде ряда:

$$y(x) = \frac{a}{p} z(x) + \frac{p-1}{2p} z'(x) + \frac{p^2-1}{12ap} z''(x) + \frac{p^2-1}{24a^2p} z'''(x) - \frac{(p^2-1)(p^2-19)}{720a^3p} z^{(4)}(x) - \dots$$

На языке теневого анализа можно сказать, что Эйлер решает уравнение

$$z(x) = \frac{1 - (1 - t/a)^p}{t} y(x) = \frac{p}{a} \cdot \frac{1}{F_K(t/a)} y(x),$$

и в качестве частного решения предъявляет функцию

$$y(x) = \frac{a}{p} \cdot F_K(t/a) z(x) = \frac{a}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{n!} \cdot \frac{z^{(n)}(x)}{a^n}.$$

Числа близкие к числам Коробова 2-го рода k_n можно найти в “Дифференциальном исчислении” Эйлера. В главе “О применении дифференциального исчисления к решению уравнений” (см. [8], часть 2, гл. IX, § 237) он предлагает различные способы приближенного и точного решения алгебраических уравнений (точные решения предъявляются в виде рядов). В частности, Эйлер рассматривает задачу о вычислении корней вида $\sqrt[p]{a^p + b}$. Наряду с методом касательных Ньютона, основанном на на приближенном равенстве

$$\sqrt[p]{a^p + b} \approx a + \frac{p}{pa^{p-1}},$$

он предлагает использовать формулу

$$\sqrt[p]{a^p + b} = a + \frac{p}{pa^{p-1} F(a, b)},$$

где $F(a, b)$ — специальным образом подобранная функция. Эйлер выписывает первые слагаемые ряда для $F(a, b)$:

$$F(a, b) = 1 + \frac{p-1}{2p} \cdot \frac{b}{a^p} - \frac{p^2-1}{12p^2} \cdot \frac{b^2}{a^{2p}} + \frac{p^2-1}{24p^2} \cdot \frac{b^3}{a^{3p}} - \dots,$$

которая на самом деле равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} \left(\frac{b}{pa^p} \right)^n = F_K \left(\frac{b}{pa^p} \right).$$

Числа $k_n(x)$ также входят в формулу суммирования Лабока (см. [7], [15]). С помощью чисел Коробова она может быть записана в виде

$$\sum_{x=0}^{ap-1} F(x) = p \sum_{x=0}^{a-1} F(px) + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{k_\nu}{\nu!} \left. \frac{\Delta_p^{\nu-1} F(x)}{p^{\nu-1}} \right|_0^{ap} + a \frac{k_m}{m!} F^{(m)}(\xi),$$

где ξ — некоторая точка отрезка $[0, ap]$.

Список литературы

- [1] Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей*. — М.: Наука, 1967.
- [2] Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики*. — М.: Мир, 1998.
- [3] Коробов Н. М. *Специальные полиномы и их приложения*. — Диофантовы приближения. Матем. записки, 1996, т. 2, с. 77–89.
- [4] Коробов Н. М. *О некоторых свойствах специальных полиномов*. — Чебышевский сборник, т. 1, 40–49, Тула, 2001.
- [5] Устинов А. В. *О формулах суммирования и интерполяции*. — Чебышевский сборник, т. 1, 52–71, Тула, 2001.
- [6] Устинов А. В. *Об одном обобщении чисел Стирлинга*. — Чебышевский сборник, т. 3, № 2(4), с. 107–122, Тула, 2002.
- [7] Стефенсен И. Ф. *Теория интерполяции*. — М.–Л.: ОНТИ, 1935.
- [8] Эйлер Л. *Дифференциальное исчисление*. — М.–Л.: Гос. изд-во тех.–теор. лит., 1949.
- [9] Эйлер Л. *Интегральное исчисление, т. 2* — М.: Гос. изд-во тех.–теор. лит., 1957.
- [10] Bernoulli J. *Ars Conjectandi* — Basel, (1713). (Reprinted on pp. 106-286 in Vol. 3 of “Die Werke von Jakob Bernoulli”, Birkhauser Verlag, Basel, 1975.
- [11] Bucchianico, A. Di , Loeb D. *A Selected Survey of Umbral Calculus* — The electronic journal of combinatorics (2000), <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds3.pdf>
- [12] Comtet, L. *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions* — rev. enl. ed. Dordrecht, Netherlands: Reidel, 1974.
- [13] Dilcher, K., Skula, L. and Slavutskii, I. Sh. *A Bibliography of Bernoulli Numbers* — <http://www.mathstat.dal.ca/dilcher/bernoulli.html>.
- [14] Jordan, C. *Calculus of Finite Differences*, 3rd ed. New York: Chelsea, 1965.
- [15] Lubbock, J. W. Cambridge Philos. Trans. 3, 323, 1829.
- [16] Roman, S. *The Umbral Calculus* — New York: Academic Press, 1984.
- [17] Rota, G.–C. *The number of partitions of a set*, Amer. Math. Monthly, 71 (1964), 498–504.
- [18] Rota, G.–C. *Finite operator calculus* — Academic Press, New–York, (1975).
- [19] Rota, G.–C. and Taylor, B. D. *The classical umbral calculus*, SIAM J. Math. Ann., 25 (1994), 694–711.

119992, Москва, Воробьевы горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова,
механико–математический факультет,
кафедра теории чисел.
ustinov@mech.math.msu.su