

Топология несущих многообразий регулярных гомеоморфизмов с седлами коразмерности 1*

Е. М. Осенков^a, О. В. Починка^{a*}

Поступило 24.12.2023; после доработки 11.04.2024; принято к публикации 16.08.2024

*Дорогому Дмитрию Валерьевичу Трещеву
с искренней благодарностью за всестороннюю поддержку
нижегородской школы динамических систем*

Рассматриваются регулярные гомеоморфизмы на топологических (не обязательно ориентируемых) n -многообразиях, являющиеся обобщением диффеоморфизмов Морса–Смейла. Под регулярным гомеоморфизмом понимается гомеоморфизм топологического n -многообразия ($n \geq 3$), цепно рекуррентное множество которого конечно и гиперболично (в топологическом смысле). Гиперболическая структура периодических точек позволяет классифицировать их по индексам Морса (размерности неустойчивого многообразия). При этом точки экстремальных индексов называются узловыми, а остальные — седловыми. Доказано, что несущее многообразие любого регулярного n -гомеоморфизма, все седловые точки которого имеют индекс Морса $n - 1$, гомеоморфно n -сфере. В размерности $n = 1$ аналогичная задача не имеет смысла, поскольку окружность — единственное замкнутое 1-многообразие. Регулярные 2-гомеоморфизмы существуют на любых поверхностях, и все их седловые точки имеют индекс Морса 1, откуда следует, что полученный результат неверен в размерности 2.

Ключевые слова: регулярный гомеоморфизм, несущее многообразие, n -сфера.

MSC: 37B99, 37D05, 37D15

DOI: <https://doi.org/10.4213/tm4406>

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть M^n — топологическое связное замкнутое n -многообразие с метрикой d , на котором задан гомеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$.

Напомним, что последовательность $x = x_0, \dots, x_n = y$ точек многообразия M^n такая, что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leq i \leq n$, называется ε -цепью длины n , соединяющей точку x с точкой y , для гомеоморфизма f . Точка $x \in M^n$ называется *цепно рекуррентной* для гомеоморфизма f , если для любого $\varepsilon > 0$ существуют n , зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε -цепь длины n , соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно рекуррентных точек гомеоморфизма f называется *цепно рекуррентным множеством* гомеоморфизма f и обозначается через $\mathcal{R}_f$.

Согласно [7] гомеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$ называется *регулярным* ($f \in \text{Reg}(M^n)$), если он имеет конечное (следовательно, состоящее из периодических точек) цепно рекуррентное множество $\mathcal{R}_f$, которое является топологически гиперболическим. Последнее означает, что

*Статья подготовлена в рамках проекта “Международное академическое сотрудничество” НИУ ВШЭ.

^aНИУ ВШЭ – Нижний Новгород, Нижний Новгород, Россия.

*Автор, ответственный за переписку.

✉ eosenkov@hse.ru (Е.М. Осенков), olga-pochinka@yandex.ru (О.В. Починка).

в окрестности точки $p \in \mathcal{R}_f$ периода m_p гомеоморфизм f^{m_p} топологически сопряжен линейному диффеоморфизму $a_{q_p, \mu_p, \nu_p}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $q_p \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\mu_p \in \{-1, +1\}$, $\nu_p \in \{-1, +1\}$, следующего вида:

$$a_{q_p, \mu_p, \nu_p}(x_1, \dots, x_{q_p}, x_{q_p+1}, \dots, x_n) = (\mu_p \cdot 2x_1, \dots, 2x_{q_p}, \nu_p \cdot 2^{-1}x_{q_p+1}, \dots, 2^{-1}x_n).$$

При этом точка p называется *стоком*, если $q_p = 0$, *источником*, если $q_p = n$, и *седлом* в противном случае, а число q_p называется ее *индексом Морса*.

Простейшим регулярным n -гомеоморфизмом является гомеоморфизм, цепно рекуррентное множество которого состоит только из источников и стоков. Известно [3], что все такие гомеоморфизмы имеют динамику “источник–сток”, т.е. их цепно рекуррентное множество состоит в точности из одного источника и одного стока. По теореме Рибба [13] несущее многообразие любого гомеоморфизма “источник–сток” гомеоморфно n -сфере. Настоящая работа обобщает результат Рибба на более широкий класс регулярных гомеоморфизмов.

Основным результатом работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Несущее многообразие M^n любого регулярного гомеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, $n \geq 3$, все седловые точки которого имеют индекс $n - 1$, гомеоморфно n -сфере.¹*

Регулярные гомеоморфизмы служат естественным обобщением диффеоморфизмов Морса–Смейла. В работе [10] теорема 1.1 доказана для 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла. Настоящий результат является существенным обобщением результата работы [10] на многообразия произвольной размерности ≥ 3 . Поскольку при больших размерностях единственность гладкой структуры не гарантируется, теорема формулируется в терминах топологических многообразий и заданных на них регулярных гомеоморфизмов.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФАКТЫ

В данном разделе изложены понятия и факты из топологии и теории динамических систем, которые потребуются при доказательстве теоремы 1.1.

2.1. Сведения из топологии. Пусть X и Y — топологические пространства, $A \subset X$, $B \subset Y$ и $g: A \rightarrow B$ — гомеоморфизм. Обозначим через $\sim$ минимальное отношение эквивалентности на $X \sqcup Y$, для которого $a \sim g(a)$ для всех $a \in A$. Фактор-пространство по этому отношению эквивалентности обозначают через $X \cup_g Y$ и называют *пространством, полученным приклеиванием пространства Y к пространству X по отображению g* .

Пусть X, Y — два топологических пространства, $D_1 \subset X$, $D_2 \subset Y$ — подпространства, гомеоморфные $\mathbb{D}^n$, $h_1: \mathbb{D}^n \rightarrow D_1$ и $h_2: \mathbb{D}^n \rightarrow D_2$ — соответствующие гомеоморфизмы. Пусть $g: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ — гомеоморфизм такой, что отображение $h_2^{-1}gh_1|_{\partial \mathbb{D}^n}: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ является меняющим ориентацию. Пространство $X \# Y = (X \setminus \text{int } D_1) \cup_g (Y \setminus \text{int } D_2)$ называется *связной суммой* пространств X, Y .

Топологическим вложением многообразия X в многообразие Y называется отображение $\lambda: X \rightarrow Y$ такое, что $\lambda: X \rightarrow \lambda(X)$ — гомеоморфизм.

Топологическое вложение $\lambda: X \rightarrow Y$ многообразия X размерности m в многообразие Y размерности n ($m \leq n$) называется *локально плоским в точке $\lambda(x)$* , $x \in X$, если точка $\lambda(x)$ принадлежит такой карте (U, ψ) многообразия Y , что $\psi(U \cap \lambda(X)) = \mathbb{R}^m$, где $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ — множество точек, у которых последние $n - m$ координат равны нулю, или $\psi(U \cap \lambda(X)) = \mathbb{R}_+^m$, где $\mathbb{R}_+^m \subset \mathbb{R}^m$ — множество точек, у которых последняя координата неотрицательна. Вложение λ называется *локально плоским*, многообразие X — *локально плоско вложенным*, а образ $\lambda(X)$ — *подмногообразием* многообразия Y , если λ является локально плоским в каждой точке $\lambda(x)$,

¹Доказательство аналогичного факта для седел индекса 1 сводится к рассмотрению гомеоморфизма f^{-1} .

$x \in X$. В противном случае вложение λ называется *диким*, а многообразие X — *дики вложенным*. Любая точка $\lambda(x)$, в которой отображение λ не является локально плоским, называется *точкой дикости*.

Пусть $\lambda: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow Y$ — топологическое вложение $(n-1)$ -сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в n -многообразие Y ($n \geq 3$), и пусть $\Sigma = \lambda(\mathbb{S}^{n-1})$. Сфера Σ называется *цилиндрически вложенной* в Y , если вложение λ продолжается до топологического вложения $\lambda: \mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow Y$.

Следующий факт доказан в [8] для $n = 3$ и в [2, предложение 2.3] для $n > 3$.

Предложение 2.1. *Если $(n-1)$ -сфера Σ , $n \geq 3$, локально плоско вложена в n -многообразие Y , то Σ является цилиндрически вложенной в Y .*

Следующий результат известен как гипотеза кольца (annulus conjecture). Для размерности $n \geq 5$ он был доказан Р. Кирби [6] в 1969 г., для $n = 3$ его доказал Э. Мойс [8] в 1977 г., а для $n = 4$ — Ф. Куинн [12] в 1982 г.

Предложение 2.2 (гипотеза кольца). *Пусть $\lambda_0, \lambda_1: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$, $n \geq 3$, — локально плоские вложения такие, что сферы $\Sigma_0 = \lambda_0(\mathbb{S}^{n-1})$ и $\Sigma_1 = \lambda_1(\mathbb{S}^{n-1})$ не пересекаются. Тогда существует локально плоское вложение $\lambda: \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$ такое, что $\lambda|_{\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\}} = \lambda_i$, $i = 0, 1$.*

Предложение 2.3 [2, предложение 2.2]. *Пусть $\lambda: X \rightarrow Y$ — топологическое вложение $(n-1)$ -многообразия X в n -многообразие Y ($n \geq 4$). Тогда множество точек дикости вложения λ либо пусто, либо более чем счетно.*

В противовес предложению 2.3 топологическое вложение 2-многообразия в 3-многообразие может иметь конечное число точек дикости. Однако в случае не более чем одной точки дикости имеет место следующий результат.

Предложение 2.4 [1, Proposition 0.1]. *Пусть $\lambda: \mathbb{S}^2 \rightarrow Y$ — топологическое вложение 2-сферы $\mathbb{S}^2$ в 3-многообразие Y , которое имеет не более одной точки дикости, и пусть $\Sigma = \lambda(\mathbb{S}^2)$. Тогда любая окрестность V сферы Σ содержит окрестность K сферы Σ , гомеоморфную $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$, которую Σ делит на две компоненты связности.²*

Предложение 2.5 [2, лемма 2.1]. *Пусть $K = \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$ и $h_0: \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}$, $h_1: \mathbb{S}^{n-1} \times \{1\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \{1\}$ — сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы. Тогда существует гомеоморфизм $h: K \rightarrow K$ такой, что $h|_{\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}} = h_0$ и $h|_{\mathbb{S}^{n-1} \times \{1\}} = h_1$.*

Будем считать, что пустое множество и только оно имеет размерность -1 ($\dim \emptyset = -1$). Сепарабельное метрическое пространство X имеет размерность $\leq n$ ($\dim X \leq n$), если любая окрестность V_p любой точки $p \in X$ содержит окрестность U_p такую, что $\dim(\partial U_p) \leq n-1$. Пространство X имеет размерность n ($\dim X = n$), если $\dim X \leq n$ и неверно, что $\dim X \leq n-1$.

Говорят, что подмножество D связного пространства X делит его, если пространство $X \setminus D$ несвязно.

Предложение 2.6 [5, р. 48, Corollary 1]. *Никакое n -многообразие не может быть разделено подмножеством размерности $\leq n-2$.*

2.2. Регулярные гомеоморфизмы. Здесь и далее M^n — связное замкнутое n -многообразие (не обязательно ориентируемое) с метрикой d и отображение $f: M^n \rightarrow M^n$ — регулярный гомеоморфизм с цепно рекуррентным множеством $\mathcal{R}_f$.

Множество $A \subset M^n$ называется *f -инвариантным*, если $f(A) = A$.

Компактное f -инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* гомеоморфизма f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \text{int } U_A$ и $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f^k(U)$.

²Этот факт доказан в [1] для ориентируемого гладкого 3-многообразия, однако доказательство нигде не опирается на свойства ориентируемости и гладкости.

Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*. Бассейном аттрактора A называется множество

$$W_A^s = \left\{ x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^k(x), A) = 0 \right\}.$$

Репеллер и его бассейн определяются как аттрактор и его бассейн для гомеоморфизма f^{-1} .

Предложение 2.7 [11, Statement 1, Theorem 1]. *Любая периодическая точка p регулярного гомеоморфизма f , имеющая период m_p и индекс Морса q_p , обладает неустойчивым W_p^u и устойчивым W_p^s многообразиями*

$$W_p^u = \left\{ y \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-km_p}(y), p) = 0 \right\}, \quad W_p^s = \left\{ y \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{km_p}(y), p) = 0 \right\},$$

являющимися топологическими подмногообразиями, гомеоморфными $\mathbb{R}^{q_p}$ и $\mathbb{R}^{n-q_p}$ соответственно, при этом

$$M^n = \bigcup_{p \in \mathcal{R}_f} W_p^u = \bigcup_{p \in \mathcal{R}_f} W_p^s. \quad (2.1)$$

Компонента связности ℓ_p^u (ℓ_p^s) множества $W_p^u \setminus p$ ($W_p^s \setminus p$) называется *неустойчивой* (*устойчивой*) *сепаратрисой* периодической точки p регулярного гомеоморфизма f .

Если p_1, p_2 — различные седловые периодические точки гомеоморфизма $f \in \text{Reg}(M^n)$, для которых $W_{p_1}^s \cap W_{p_2}^u \neq \emptyset$, то пересечение $W_{p_1}^s \cap W_{p_2}^u$ называется *гетероклиническим пересечением*.

В силу конечности цепно рекуррентного множества у любого регулярного гомеоморфизма $f \in \text{Reg}(M^n)$ отсутствуют *циклы*, т.е. наборы попарно различных периодических орбит $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_m$, $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $W_{\mathcal{O}_{i+1}}^u \cap W_{\mathcal{O}_i}^s \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, m$, $\mathcal{O}_{m+1} = \mathcal{O}_1$ (см. [11, Statement 2]). Отсюда непосредственно вытекает следующий факт.

Предложение 2.8. *Все периодические орбиты гомеоморфизма $f \in \text{Reg}(M^n)$ можно перенумеровать в таком порядке $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$, что*

- (1) *если $W_{\mathcal{O}_j}^u \cap W_{\mathcal{O}_i}^s \neq \emptyset$, то $i < j$;*
- (2) *любая стоковая (источниковая) орбита расположена в этом порядке ниже (выше) любой седловой орбиты.*

Запись

$$\mathcal{O}_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_k \quad (2.2)$$

будет означать, что порядок орбит удовлетворяет условиям (1), (2) предложения 2.8.

Предложение 2.9 [11, Theorem 1]. *Для упорядоченного множества периодических орбит $\mathcal{O}_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_k$ регулярного гомеоморфизма $f \in \text{Reg}(M^n)$ справедливы следующие соотношения:*

$$\text{cl}(W_{\mathcal{O}_i}^u) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^u \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} W_{\mathcal{O}_j}^u, \quad \text{cl}(W_{\mathcal{O}_i}^s) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^s \subset \bigcup_{j=i+1}^k W_{\mathcal{O}_j}^s. \quad (2.3)$$

Следующие ниже предложения данного раздела доказаны для диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на ориентируемых многообразиях, однако их доказательство полностью проходит для регулярных гомеоморфизмов.

Предложение 2.10 [3, Proposition 2.3]. *Если сепаратриса ℓ_σ^u седловой точки σ гомеоморфизма $f \in \text{Reg}(M^n)$ не участвует в гетероклиническом пересечении, то существует единственная стоковая точка ω такая, что*

$$\text{cl}(\ell_\sigma^u) = \sigma \cup \ell_\sigma^u \cup \omega.$$

При этом $\text{cl}(\ell_\sigma^u)$ гомеоморфно отрезку, если $q_p = 1$, и гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^{q_p}$, если $q_p > 1$.

Предложение 2.11 [3, Theorem 2.5]. Если гомеоморфизм $f \in \text{Reg}(M^n)$ не имеет седловых точек, то он является гомеоморфизмом “источник–сток”, а многообразие M^n гомеоморфно n -мерной сфере S^n .³

Следующее утверждение вытекает из одного из результатов работы [4], предложения 2.7 и определения топологической размерности [5].

Предложение 2.12. Пусть $f \in \text{Reg}(M^n)$ и P — такое подмножество $\mathcal{R}_f$, что множество

$$A = \bigcup_{p \in P} W_p^u$$

замкнуто и f -инвариантно. Тогда

- множество A является аттрактором гомеоморфизма f ;
- $W_A^s = \bigcup_{p \in P} W_p^s$;
- $\dim A = \max_{p \in P} \{q_p\}$.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ СФЕРЫ

Обозначим через G класс регулярных гомеоморфизмов $f: M^n \rightarrow M^n$, заданных на замкнутом связном (не обязательно ориентируемом) n -многообразии M^n ($n \geq 3$), таких, что все седловые точки множества $\mathcal{R}_f$ имеют индекс Морса $n - 1$. Обозначим через $\mathcal{R}_q$ множество всех периодических точек гомеоморфизма $f \in G$ с индексом Морса $q \in \{0, n - 1, n\}$.

Везде далее, не умаляя общности, мы полагаем, что все цепно рекуррентные точки p гомеоморфизма $f \in G$ являются неподвижными, а числа ν_p и μ_p равны $+1$ (в противном случае можно рассмотреть подходящую степень отображения f).

Для доказательства основной теоремы 1.1 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, касающихся следующего объекта. У каждой системы из G можно выделить тривиальный аттрактор Σ_σ , образованный замыканием неустойчивой $(n - 1)$ -мерной сепаратрисы некоторого седла σ . Он примечателен тем, что динамика в ограничении на компоненты его притягивающего бассейна (которых у него всего две) топологически сопряжена с динамикой линейного стока в $\mathbb{R}^n$. Используя этот замечательный факт, мы сможем доказать заявленную теорему индукцией по числу седловых точек, аккуратно вырезая на каждом шаге такой аттрактор и заменяя его динамику на динамику двух стоков, не выходя при этом из рассматриваемого класса гомеоморфизмов. О существовании аттрактора Σ_σ , его динамических свойствах, о возможности его “аккуратно вырезать” и, наконец, о его связи с топологией несущего многообразия и пойдет дальше речь в настоящем разделе.

Лемма 3.1. Для любого гомеоморфизма $f \in G$ множество $\mathcal{R}_0$ состоит из единственного стока.

Доказательство. Положим

$$R = W_{\mathcal{R}_{n-1}}^s \cup \mathcal{R}_n.$$

В силу предложений 2.9 и 2.12 множество R является репеллером гомеоморфизма f и $\dim R = 1$. Из предложения 2.6 следует, что $M^n \setminus R$ связно. С другой стороны, согласно равенству (2.1) из предложения 2.7 имеем $M^n \setminus R = W_{\mathcal{R}_0}^s$. Такое возможно только тогда, когда множество $\mathcal{R}_0$ состоит из единственного стока. $\square$

Обозначим через ω единственный сток гомеоморфизма $f \in G$. В силу предложения 2.8 существует порядок неподвижных точек гомеоморфизма f вида

$$\omega \prec \sigma_1 \prec \dots \prec \sigma_m \prec \alpha_1 \prec \dots \prec \alpha_k, \quad (3.1)$$

³Вторая половина этого факта известна как теорема Роба [13].

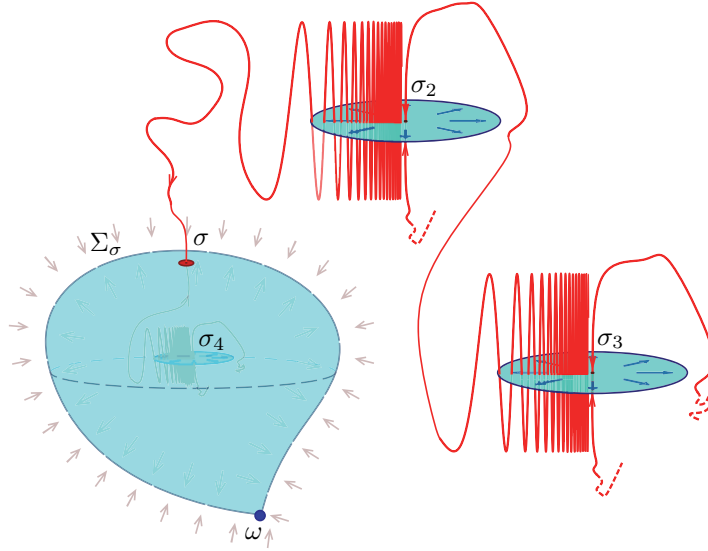


Рис. 1. Сфера Σ_σ и визуализация порядка на множестве $\mathcal{R}_f$

где $\mathcal{R}_{n-1} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ и $\mathcal{R}_n = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Положим $\sigma = \sigma_1$ и

$$\Sigma_\sigma = \text{cl}(\ell_\sigma^u).$$

Тогда из предложения 2.10 следует, что Σ_σ есть $(n-1)$ -сфера, топологически вложенная в M^n (рис. 1), причем это вложение локально плоское всюду, кроме, возможно, стока ω . В силу предложения 2.12 сфера Σ_σ является аттрактором гомеоморфизма f с бассейном притяжения $W_{\Sigma_\sigma}^s = W_\sigma^s \cup W_\omega^s$. Положим

$$\ell_{\Sigma_\sigma}^s = W_{\Sigma_\sigma}^s \setminus \Sigma_\sigma.$$

Определим диффеоморфизм $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой $a(x_1, \dots, x_n) = (x_1/2, \dots, x_n/2)$. Он обладает единственной цепно рекуррентной точкой, а именно неподвижным стоком $O = (0, \dots, 0)$. Положим

$$\ell = \mathbb{R}^n \setminus O.$$

Лемма 3.2. *Многообразие $\ell_{\Sigma_\sigma}^s$ состоит из двух компонент связности ℓ_1, ℓ_2 , для каждой из которых существует гомеоморфизм $h_i: \ell_i \rightarrow \ell$, $i = 1, 2$, сопрягающий гомеоморфизм $f|_{\ell_i}$ с диффеоморфизмом $a|_\ell$.*

Доказательство. Из предложений 2.3 и 2.1 для $n > 3$ и из предложения 2.4 для $n = 3$ следует, что аттрактор Σ_σ обладает окрестностью $K_\sigma \subset W_{\Sigma_\sigma}^s$, гомеоморфной $\mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1]$, которую Σ_σ делит на две компоненты связности A_1, A_2 . Покажем, что для некоторой итерации N граница кольца K_σ отображается внутрь него, т.е. $f^N(\partial K_\sigma) \subset \text{int } K_\sigma$.

Так как $\partial K_\sigma \subset \ell_{\Sigma_\sigma}^s$, то для любого $x \in \partial K_\sigma$ найдутся такая замкнутая окрестность $U_x \subset \partial K_\sigma$ и натуральное число ν_x , что для любых $\nu \geq \nu_x$ верно включение $f^\nu(U_x) \subset \text{int } K_\sigma$. В силу компактности ∂K_σ существует конечное подпокрытие в $\{U_x: x \in \partial K_\sigma\}$. Таким образом, можно выбрать номер N как максимум из чисел ν_x , соответствующих окрестностям U_x в выбранном подпокрытии. Не умаляя общности, полагаем номер N равным 1, тогда $f(\partial K_\sigma) \subset \text{int } K_\sigma$.

Приклеив к кольцу K_σ два замкнутых n -шара, мы получим многообразие, гомеоморфное $\mathbb{S}^n$. Отсюда в силу предложения 2.2 заключаем, что множество $K_\sigma \setminus \text{int } f(K_\sigma)$ состоит из двух компонент связности $K_1 = A_1 \setminus \text{int } f(A_1)$, $K_2 = A_2 \setminus \text{int } f(A_2)$, каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$.

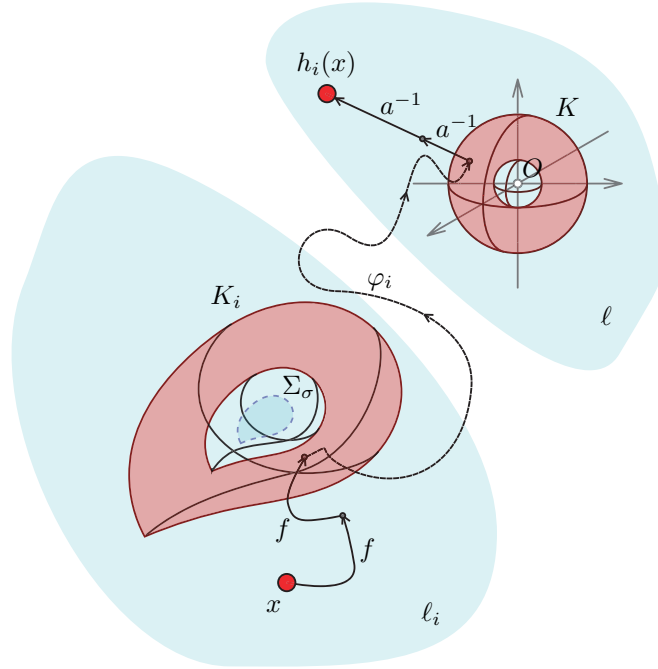


Рис. 2. Действие сопрягающего гомеоморфизма h_i на точку $x \in \ell_i$; здесь $j_x = 2$

Положим

$$\ell_i = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f^j(K_i), \quad i = 1, 2.$$

Так как K_σ — захватывающая окрестность аттрактора Σ_σ , то $\ell_{\Sigma_\sigma}^s$ состоит из двух компонент связности ℓ_1, ℓ_2 . Для $i = 1, 2$ построим гомеоморфизм $h_i: \ell_i \rightarrow \ell$, $i = 1, 2$, сопрягающий гомеоморфизм $f|_{\ell_i}$ с диффеоморфизмом $a|_\ell$.

Для этого положим $K = B \setminus \text{int } a(B)$, где $B = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq 1\}$. Заметим, что множество ∂K_i состоит из двух $(n-1)$ -сфер $C_i, f(C_i)$. Возьмем произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\varphi_{i,0}: C_i \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, отображающий C_i в единичную сферу $\mathbb{S}^{n-1}$. Вторую компоненту границы мы переведем гомеоморфизмом $\varphi_{i,1} = a\varphi_{i,0}f^{-1}: f(C_i) \rightarrow a(\mathbb{S}^{n-1})$. Опираясь на предложение 2.5, продолжим $\varphi_{i,0}, \varphi_{i,1}$ до гомеоморфизма $\varphi_i: K_i \rightarrow K$. Так как $\ell_i = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f^j(K_i)$, то

$$\forall x \in \ell_i \quad \exists j_x \in \mathbb{Z}: \quad x \in f^{j_x}(K_i).$$

Так как $\ell = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} a^j(K)$, то сопрягающий гомеоморфизм $h_i: \ell_i \rightarrow \ell$ будет задаваться следующей формулой (рис. 2):

$$h_i(x) = a^{j_x}(\varphi_i(f^{-j_x}(x))). \quad \square$$

Лемма 3.3. Многообразие $M^n \setminus \Sigma_\sigma$ состоит из двух компонент связности $\mathcal{M}_1^n \supset \ell_1$ и $\mathcal{M}_2^n \supset \ell_2$.

Доказательство. Из соотношений (2.1) следует, что $M^n = W_\omega^s \cup W_\sigma^s \cup R$, где $R = W_{\mathcal{R}_{n-1} \setminus \sigma}^s \cup \mathcal{R}_n$ — одномерный репеллер гомеоморфизма f . Отсюда $M^n = W_{\Sigma_\sigma}^s \cup R$ и $M^n \setminus \Sigma_\sigma = \ell_{\Sigma_\sigma}^s \cup R$, а следовательно,

$$(M^n \setminus \Sigma_\sigma) \setminus R = \ell_1 \cup \ell_2.$$

Так как многообразие $M^n \setminus \Sigma_\sigma$ имеет размерность n , а множество R одномерно, то в силу предложения 2.6 множество $M^n \setminus \Sigma_\sigma$ имеет столько же компонент связности, сколько и множество

$(M^n \setminus \Sigma_\sigma) \setminus R$. Таким образом, многообразие $M^n \setminus \Sigma_\sigma$ состоит из двух компонент связности $\mathcal{M}_1^n$, $\mathcal{M}_2^n$ таких, что $\mathcal{M}_1^n \setminus R = \ell_1$, $\mathcal{M}_2^n \setminus R = \ell_2$. $\square$

Для $i = 1, 2$ положим

$$\bar{\mathcal{M}}_i^n = \mathcal{M}_i^n \sqcup \mathbb{R}^n, \quad M_i^n = \mathcal{M}_i^n \cup_{h_i} \mathbb{R}^n$$

и обозначим через $p_i: \bar{\mathcal{M}}_i^n \rightarrow M_i^n$ естественную проекцию.

Лемма 3.4. *Множество M_i^n , $i = 1, 2$, является замкнутым топологическим n -многообразием, на котором существует гомеоморфизм $f_i: M_i^n \rightarrow M_i^n$ из класса G , имеющий меньше седловых точек, чем гомеоморфизм f .*

Доказательство. Склеивка множеств $\mathcal{M}_i^n$ и $\mathbb{R}^n$ с помощью гомеоморфизма h_i происходит вдоль ℓ_i и ℓ — открытых подмножеств n -многообразий M^n и $\mathbb{R}^n$, поэтому проекция p_i индуцирует на M_i^n структуру топологического n -многообразия. Так как $\mathcal{M}_i^n$ и $\mathbb{R}^n$ — многообразия, не имеющие края, то и M_i^n , полученное при их склеивании, края не имеет.

Теперь докажем компактность многообразия M_i^n . Для этого рассмотрим произвольную последовательность $\{x_m\} \subset M_i^n$ и покажем, что в ней найдется подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке из M_i^n . Формально

$$\forall \{x_m\} \subset M_i^n \quad \exists \{x_{m_k}\} \subset \{x_m\}: \quad \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = x \in M_i^n.$$

Так как $\bar{\mathcal{M}}_i^n = \mathcal{M}_i^n \sqcup \mathbb{R}^n$, то $M_i^n = p_i(\mathcal{M}_i^n) \cup p_i(\mathbb{R}^n)$. Тогда, не умаляя общности, считаем, что $\{x_m\}$ лежит целиком либо в $p_i(\mathcal{M}_i^n)$, либо в $p_i(\mathbb{R}^n)$ (в противном случае найдется подпоследовательность, которая обладает этим свойством). Разберем случай, когда $\{x_m\} \subset p_i(\mathbb{R}^n)$ (случай, когда $\{x_m\} \subset p_i(\mathcal{M}_i^n)$, разбирается аналогично). Для любого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\bar{x}_m = (p_i|_{\mathbb{R}^n})^{-1}(x_m).$$

Если в последовательности $\{\bar{x}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ есть подпоследовательность, целиком состоящая из точек $O = (0, \dots, 0)$, то случай тривиален. Поэтому считаем, что такой подпоследовательности в $\{\bar{x}_m\}$ нет. Более того, мы полагаем, что $\{\bar{x}_m\} \subset \ell$, так как в противном случае мы можем выбрать такую подпоследовательность. Тогда

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists j_m \in \mathbb{Z}: \quad a^{-j_m}(\bar{x}_m) \in K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n: \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \right\}.$$

Таким образом, можно перейти к рассмотрению последовательности $\bar{y}_m = a^{-j_m}(\bar{x}_m)$, лежащей уже в K . Так как K — компакт, то последовательность $\bar{y}_m$ имеет подпоследовательность $\{\bar{y}_{m_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\bar{y} \in K$. Тогда для последовательности $\bar{x}_{m_k} = a^{j_{m_k}}(\bar{y}_{m_k})$ имеются три принципиальные возможности в зависимости от поведения j_{m_k} при $k \rightarrow +\infty$.

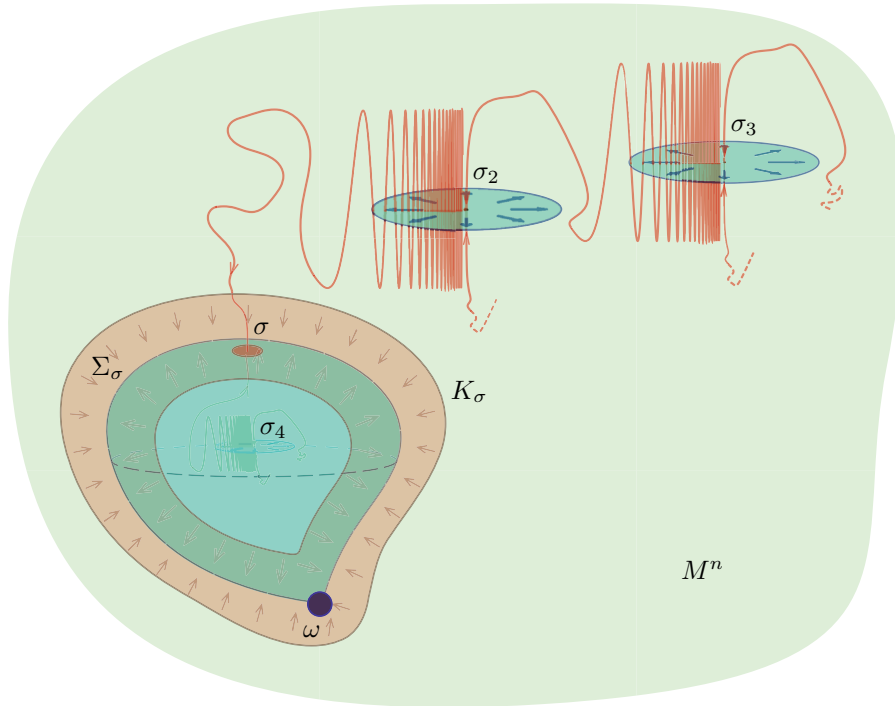
1. *Последовательность $\{j_{m_k}\} \subset \mathbb{Z}$ ограничена.* Тогда существует такая подпоследовательность $\{m_{t_k}\}$, что $j_{m_{t_k}} \rightarrow j \in \mathbb{Z}$ при $k \rightarrow +\infty$. Такое поведение $j_{m_{t_k}}$ возможно только в том случае, если начиная с некоторого номера все числа $j_{m_{t_k}}$ равны некоторому целому числу $j \in \mathbb{Z}$. Таким образом, последовательность $\bar{x}_{m_{t_k}}$ имеет предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}_{m_{t_k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a^{j_{m_{t_k}}}(\bar{y}_{m_{t_k}}) = a^j(\bar{y}).$$

В силу непрерывности проекции $p_i|_{\mathbb{R}^n}$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{m_{t_k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} p_i(\bar{x}_{m_{t_k}}) = p_i\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}_{m_{t_k}}\right) = p_i(a^j(\bar{y})) \in M_i^n.$$

Последовательность $x_{m_{t_k}}$ и есть искомая сходящаяся подпоследовательность.

Рис. 3. Динамика гомеоморфизма f на M^n

2. Последовательность $\{j_{m_t}\} \subset \mathbb{Z}$ не ограничена сверху. Тогда существует такая последовательность $\{m_{t_k}\}$, что $j_{m_{t_k}} \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. В таком случае по определению диффеоморфизма a точки $\bar{x}_{m_{t_k}} = a^{j_{m_{t_k}}}(\bar{y}_{m_{t_k}})$ стремятся к началу координат O при $k \rightarrow +\infty$. Значит, $\{x_{m_{t_k}}\}$ — искомая сходящаяся подпоследовательность $\{x_m\}$, ведь существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{m_{t_k}} = p_i \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}_{m_{t_k}} \right) = p_i(O) \in M_i^n.$$

3. Последовательность $\{j_{m_t}\} \subset \mathbb{Z}$ не ограничена снизу. Тогда существует такая подпоследовательность m_{t_s} , что $j_{m_{t_s}} \rightarrow -\infty$ при $s \rightarrow +\infty$. При этом точки $\bar{x}_{m_{t_s}} = a^{j_{m_{t_s}}}(\bar{y}_{m_{t_s}})$ неограниченно отдаляются от начала координат O при $s \rightarrow +\infty$. Перейдем к пространству $\mathcal{M}_i^n$ с помощью сопрягающего гомеоморфизма h_i и рассмотрим последовательность $\bar{z}_{m_{t_s}} = h_i^{-1}(\bar{x}_{m_{t_s}}) \in \mathcal{M}_i^n$. Так как $\bar{x}_{m_{t_s}} \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow +\infty$, то с ростом s последовательность $\bar{z}_{m_{t_s}}$ отдаляется от сферы Σ_σ и начиная с некоторого номера $s_0 \in \mathbb{N}$ все точки $\bar{z}_{m_{t_s}}$ будут лежать в компактном множестве $\mathcal{M}_i^n \setminus \text{int } K_\sigma$. Значит, существует подпоследовательность $\bar{z}_{m_{t_{s_k}}}$, сходящаяся к $\bar{z} \in \mathcal{M}_i^n \setminus \text{int } K_\sigma$ при $k \rightarrow +\infty$. Тогда $x_{m_{t_{s_k}}}$ — искомая сходящаяся подпоследовательность $\{x_m\}$, ведь существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{m_{t_{s_k}}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} p_i(h_i(\bar{z}_{m_{t_{s_k}}})) = p_i \left(h_i \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{z}_{m_{t_{s_k}}} \right) \right) = p_i(h_i(\bar{z})) \in M_i^n.$$

Таким образом, мы доказали, что любая последовательность $\{x_m\} \subset M_i^n$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к точке из M_i^n .

Согласно [9, Theorem 18.3 (the pasting lemma)] отображение $f_i: M_i^n \rightarrow M_i^n$ (рис. 3, 4), заданное формулой

$$f_i(x) = \begin{cases} p_i f(p_i|_{\mathcal{M}_i^n})^{-1}(x), & \text{если } x \in p_i(\mathcal{M}_i^n), \\ p_i a(p_i|_{\mathbb{R}^n})^{-1}(x), & \text{если } x \in p_i(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

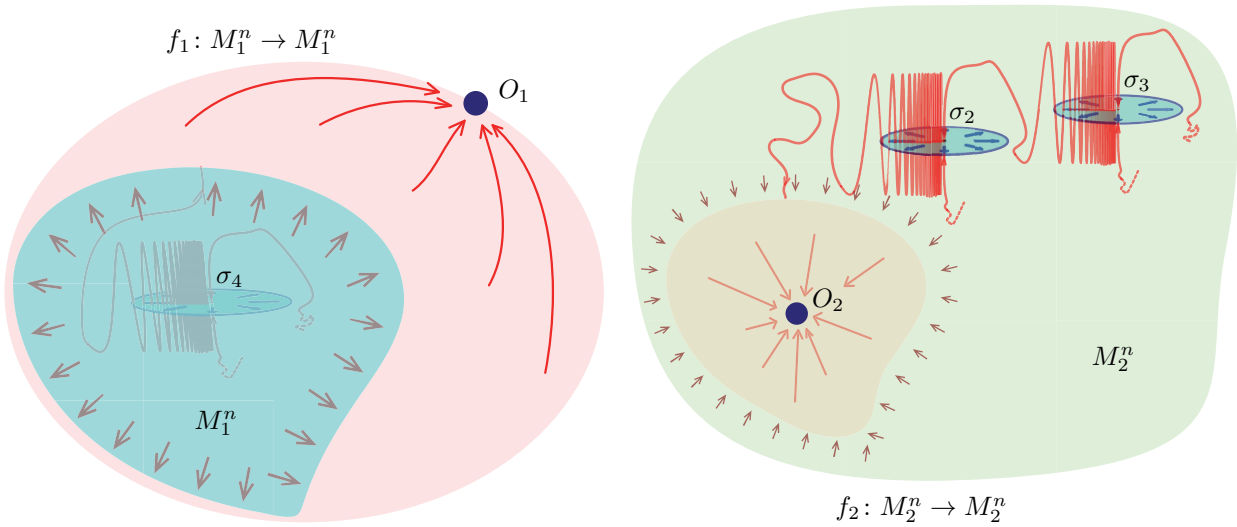


Рис. 4. Динамика гомеоморфизмов f_i на M_i^n ; здесь $O_i = p_i(O)$, $i = 1, 2$

является гомеоморфизмом. По построению гомеоморфизм f_i сопряжен с f на $p_i(\mathcal{M}_i^n)$ и с a на $p_i(\mathbb{R}^n)$. Отсюда следует, что $f_i \in G$ и цепно рекуррентные множества гомеоморфизмов f_1 и f_2 суммарно имеют на одну седловую точку меньше, чем цепно рекуррентное множество гомеоморфизма f . $\square$

Лемма 3.5. Несущее многообразие M^n гомеоморфно связной сумме $M_1^n \# M_2^n$ многообразий M_1^n и M_2^n .

Доказательство. Построим связную сумму $M_1^n \# M_2^n$ многообразий M_1^n и M_2^n следующим образом. Положим $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, $\tilde{M}_i^n = M_i^n \setminus \text{int } p_i(a(B))$ и

$$M_1^n \# M_2^n = \tilde{M}_1^n \cup_\nu \tilde{M}_2^n,$$

где $\nu = p_2(p_1|_{\partial a(B)})^{-1} : \partial \tilde{M}_1^n \rightarrow \partial \tilde{M}_2^n$. Введем естественную проекцию $\tilde{p} : \tilde{M}_1^n \sqcup \tilde{M}_2^n \rightarrow M_1^n \# M_2^n$ и построим гомеоморфизм $h : M^n \rightarrow M_1^n \# M_2^n$.

Для этого определим гомеоморфизм h сначала на множестве $M^n \setminus \text{int } K_\sigma$ формулой

$$h(x) = \begin{cases} \tilde{p}(p_1(x)), & \text{если } x \in \mathcal{M}_1^n \setminus \text{int } K_\sigma, \\ \tilde{p}(p_2(x)), & \text{если } x \in \mathcal{M}_2^n \setminus \text{int } K_\sigma. \end{cases}$$

Положим $\tilde{K} = (M_1^n \# M_2^n) \setminus h(M^n \setminus K_\sigma)$. По построению множество $\tilde{K}$ совпадает с множеством $\tilde{p}(p_1(K_1) \cup p_2(K_2))$, являющимся объединением двух n -мерных колец, склеенных по одной границе, и, следовательно, оно само является n -мерным кольцом. Тогда в силу гипотезы о кольце (см. предложение 2.2) гомеоморфизм $h : M^n \setminus \text{int } K_\sigma \rightarrow (M_1^n \# M_2^n) \setminus \text{int } \tilde{K}$ продолжается до гомеоморфизма $h : M^n \rightarrow M_1^n \# M_2^n$. $\square$

4. ТОПОЛОГИЯ n -МНОГООБРАЗИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ РЕГУЛЯРНЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ С СЕДЛАМИ ИНДЕКСА МОРСА $n - 1$

Теперь, после рассмотрения ряда вспомогательных утверждений, мы можем доказать теорему 1.1: любое замкнутое n -многообразие M^n , допускающее гомеоморфизм $f \in G$, гомеоморфно n -мерной сфере.

Доказательство теоремы 1.1 будет проводиться индукцией по числу $k \geq 0$ седловых точек гомеоморфизма f .

База индукции $k = 0$. Из утверждения 2.11 следует, что несущее многообразие такого гомеоморфизма гомеоморфно n -мерной сфере $\mathbb{S}^n$.

Предположение индукции. Любой гомеоморфизм из класса G , число седловых точек которого меньше некоторого натурального k , может быть задан лишь на многообразии, гомеоморфном n -сфере.

Шаг индукции. Теперь пусть гомеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$, принадлежащий классу G , обладает ровно k седловыми точками. Упорядочим цепно рекуррентное множество $\mathcal{R}_f$ в соответствии с порядком (3.1) и положим $\sigma = \sigma_1$.

Согласно леммам 3.4 и 3.5 имеем $M^n \cong M_1^n \# M_2^n$, причем многообразие M_i^n ($i = 1, 2$) допускает гомеоморфизм $f_i: M_i^n \rightarrow M_i^n$, принадлежащий классу G и имеющий меньше седловых точек, чем гомеоморфизм f .

В таком случае по предположению индукции $M_i^n \cong \mathbb{S}^n$. Тогда M^n — связная сумма n -сфер, т.е. $M^n \cong \mathbb{S}^n$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pécou E. Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // Topology Appl. 2002. V. 117, N 3. P. 335–344. [doi](#)
2. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С. Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 61–86. [MathNet](#)
3. Grines V.Z., Medvedev T.V., Pochinka O.V. Dynamical systems on 2- and 3-manifolds. Cham: Springer, 2016. (Dev. Math.; V. 46). [doi](#)
4. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 111–133. [MathNet](#)
5. Hurewicz W., Wallman H. Dimension theory. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2015. (Princeton Math. Ser.; V. 4).
6. Kirby R.C. Stable homeomorphisms and the annulus conjecture // Ann. Math. Ser. 2. 1969. V. 89, N 3. P. 575–582. [doi](#)
7. Medvedev T.V., Pochinka O.V., Zinina S.Kh. On existence of Morse energy function for topological flows // Adv. Math. 2021. V. 378. Pap. 107518. [doi](#)
8. Moise E.E. Geometric topology in dimensions 2 and 3. New York: Springer, 1977. (Grad. Texts Math.; V. 47). [doi](#)
9. Munkres J.R. Topology. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.
10. Osenkov E.M., Pochinka O.V. Morse–Smale 3-diffeomorphisms with saddles of the same unstable manifold dimension // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2024. V. 20, N 1. P. 167–178. [doi](#)
11. Pochinka O., Zinina S. Dynamics of topological flows and homeomorphisms with a finite hyperbolic chain-recurrent set on n -manifolds // Динамические системы. 2019. Т. 9, № 3. С. 289–296.
12. Quinn F. Ends of maps. III: Dimensions 4 and 5 // J. Diff. Geom. 1982. V. 17, N 3. P. 503–521. [doi](#)
13. Reeb G. Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique // C. r. Acad. sci. Paris. 1946. V. 222. P. 847–849.