Автоматика и телемеханика, № 10, 2025

Нелинейные системы

© 2025 г. В.Н. АФАНАСЬЕВ, д-р техн. наук (afanval@mail.ru)
(Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова;
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

ПСЕВДООПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ И ЗАДАННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОКОНЧАНИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Задача оптимального управления конечным состоянием системы в некотором смысле составляет ядро любой другой задачи оптимизации. Постановка подобных задач включает описание самого динамического объекта, ограничений, накладываемых на управления и состояния объекта, и функционал качества, в общем виде функционал Больца. Необходимые условия оптимальности в задаче синтеза соответствующих управлений записываются в виде канонической системы Эйлера-Лагранжа с заданием соответствующих краевых условий. Синтез соответствующих управлений сталкивается с проблемой необходимости поиска решений краевых задач, реализуемой, как правило, численными методами. В работе предлагается альтернативный подобным методам путь решения двухточечных краевых задач, основанный на предположении справедливости обратного принципа оптимальности Р. Беллмана, заключающийся в сохранении функциональной связи между компонентами двухточечной краевой задачи во всем интервале управления. Полученные теоретические результаты подтверждены моделированием системы управления с синтезированным управлением.

Ключевые слова: оптимальное управление, гамильтониан системы, каноническая система Эйлера-Лагранжа, краевые условия канонической системы.

DOI: 10.31857/S000523102510, **EDN:**

1. Введение

Системы управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, достаточно полно отражают многие реальные процессы и поэтому являются наиболее распространенными объектами, к которым применяются математические методы построения управлений. Задачей конструирования оптимальной динамической системы управления с полной информацией по отношению к множеству целей, функционалу качества, множеству допустимых управлений, множеству состояний и начальному состоянию объекта в момент начала управления является отыскание управления, принадлежащего допустимому множеству управлений, минимизирующего заданный функционал качества на решениях уравнения объекта [1–5]. Решение поставленной задачи осуществляется с использованием вариационных методов [4–7].

Синтез оптимальной системы управления осуществляется с использованием необходимых и достаточных условий минимума функционала качества [2–5]. Следует отметить, что существование оптимального управления не является необходимым: во множестве допустимых управлений может вообще не оказаться управлений, переводящих объект из начального состояния в заданное множество целей.

Необходимые условия существования оптимального управления описываются двухточечной краевой задачей и условием выбора самого управления в виде некоторой функции, зависящей от поведения гамильтониана на оптимальной траектории. Основная проблема нахождения оптимального управления связана с поиском решения двухточечной краевой задачи. Подобные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений редко решаются аналитически и требуют применения численных методов, которые разделяются на два типа – итерационные и неитерационные. Для линейных задач решение можно получить без использования итераций, при решении нелинейных задач без итерационных методов не обойтись [8–12]. К подобным методам относятся: метод Эйлера, метод линейной интерполяции, метод конечных разностей, метод стрельбы [10]. Суть метода стрельбы заключается в сведении краевой задачи к многократному решению задачи Коши. Некоторым развитием метода стрельбы является метод дифференциальной прогонки, в котором решаются вспомогательные задачи Коши не для исходного дифференциального уравнения, а для других уравнений меньшего порядка.

В целом проблема решения двухточечных задач актуальна, а методы ее решения предлагаются и сегодня, часть их основана на использовании нейронных сетей [13–19].

Одним из методов решения краевых задач ~~использу~~ется метод последовательных приближений. Этот метод, который до сих пор не получил широкого распространения, сводит исходную задачу к некоторой последовательности линейно-квадратичных задач. В [15] приведен метод синтеза оптимального управления с обратной связью одним классом нелинейных систем по квадратичному критерию. Данный метод базируется на специальном методе последовательных приближений, сходимость которого позволяет доказать существование оптимального управления и получить процедуру его построения. В работе рассмотрено аналитическое и численное исследование данного метода и его реализация в системе MathCloud.

Для решения вариационных задач с конца 20-го в. интенсивно развиваются два неклассических метода. Первый метод основан на методе дифференциального преобразования (Differential Transform Method, DTM), который ищет аналитическое решение в виде определенного функционального ряда [18–20]. Второй метод основан на нейронной сети, основанной на математических моделях естественных наук (Physics-Informed Neural Network, PINN), где искусственный интеллект в форме нейронной сети используется для решения дифференциального уравнения [19, 20].

Первый метод, DTM, характеризуется своей гибкостью как в форме дифференциального уравнения, так и в граничных условиях. Одной из его сильных сторон является его масштабируемость для обработки приближенных решений различных порядков, и иногда он даже позволяет предсказывать точное решение на основе формы найденных коэффициентов исходного уравнения. Недостатком этого метода является сложность автоматизации процесса решения заданной задачи.

Второй метод (PINN) использует нейронные сети для решения соответствующего дифференциального уравнения. Одним из преимуществ этого метода является его относительно простая реализация и гибкость. После обучения модели дифференциального уравнения она может предоставлять решения для различных сеток без повторного расчета задачи каждый раз.

В настоящей работе предлагается альтернативный численным методам путь решения двухточечных краевых задач, основанный на предположении справедливости обратного принципа оптимальности Р. Беллмана [21], заключающийся в сохранении функциональной связи между компонентами двухточечной краевой задачи во всем интервале управления.

2. Терминальная задача оптимального управления

2.1. Постановка задачи

В статье рассматривается объект, который описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) + g(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \\
&f, g : T \times \Omega_s \to \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \to f(t, x),\, g(t).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Здесь T – интервал управления $[t_0, t_f]$; $u \in \{u(t) \in \mathbb{R}^r \subset U, t \in [t_0, t_f]\}$ – управление, подлежащее нахождению, матрицы $f(t, x)$, $g(t)$ действительны и непрерывны; U – компактное множество допустимых управлений; Ω_s – множество траекторий $x(\cdot) : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют начальному условию $x(t_0) = x_0$ и дифференциальному включению $\{dx(t)/dt\} \in \mathrm{co}\{[f(t, x(t)) + g(t)u(t)] : u \in U\}$.

Предполагается, что при всех (t, x) пара $\{f(t, x(t)), g(t)\}$ является управляемой. Кроме того, функции $f(t, x(t))$, $g(t)$ будем предполагать достаточно гладкими, чтобы через любые $(t_0, x_0) \in T \times X_0$ проходило одно и только одно решение (2.1) $x(t, t_0, x_0) \in \Omega_s$.

Множество целей в данной задаче задается в виде $S \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$. Элементами множества целей являются пары (t, x), состоящие из состояния X и точки t, где $t \in [t_0, t_f]$.

Рассматривая задачу синтеза закона управления, введем функционал Больца

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = K(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \{L(t,x(t),u(t))\}dt. \tag{2.2}$$

Пусть $L(t,x(t),u(t))$ – непрерывная действительная функция, заданная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [t_0,t_f]$, и $K(x(t_f))$ – действительная функция на $\mathbb{R}^n \times t_f$.

Предположение 1. О свойствах функции $f(t,x)$ и лагранжиана $L(t,x,u)$ [2–4].

1. Функции $f(t,x)$, $L(t,x,u)$ и $K(x(t_f))$ являются непрерывными и удовлетворяют ограничениям

$$\|f(t,x)\| \leqslant (1+\|x\|)R_f, \quad |L(t,x,u)| \leqslant (1+\|x\|)R_L, \quad K(x(t)) \leqslant (1+\|x\|)R_K$$

для всех $(t,x,u) \in [t_0,t_f]\times\mathbb{R}^n\times U$ (здесь R_f, R_L, R_K – положительные числа).

2. Будем считать, что функции $f(t,x(t))$ и $L(t,x,u)$ отвечают условию Липшица по переменной x:

$$\|f(t,x+y)-f(t,x)\| + |L(t,x+y,u)-L(t,x,u)| \leqslant \lambda_{\mathrm{up}}\|y\|$$

для всех $(t,x) \in [t_0,t_f]\times\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^n$.

3. Функции $f(t,x(t))$, $L(t,x(t),u(t))$ и их частные производные по t, x, u, т.е.

$$\begin{aligned}
&f_i(t,x(t)), \quad \frac{\partial f_i(t,x(t))}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_i(t,x(t))}{\partial x}, \quad i=1,\dots,n,\\
&L(t,x(t),u(t)), \quad \frac{\partial L(t,x(t),u(t))}{\partial t}, \quad \frac{\partial L(t,x(t),u(t))}{\partial x}, \quad \frac{\partial L(t,x(t),u(t))}{\partial u},
\end{aligned}$$

непрерывны на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times[t_0,t_f]$.

Отметим, что для ряда задач не требуется существования непрерывных частных производных $L(t,x(t),u(t))$ по u.

4. Функция конечной стоимости $K(x(t_f))$, заданная на $\mathbb{R}^n\times t_f$, — действительная функция такая, что

$$K(x(t)), \quad \frac{\partial K(x(t))}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 K(x(t))}{\partial x^2}$$

непрерывны на $\mathbb{R}^n\times[t_0,t_f]$.

Дополнительные предположения о свойствах вектора $f(t,x(t))$ будут сделаны ниже (раздел 4).

Пусть элемент $\xi = (x(t),u(t),t_0,t_f)$, для которого выполнены все указанные условия и ограничения задачи, является допустимым управляемым процессом. Допустимыми элементами $\xi = (x(t),u(t),t_0,t_f)$ в поставленной задаче будем считать функции класса $x(\cdot)\in C^1([t_0,t_f],\mathbb{R}^n)$, $u(\cdot)\in C([t_0,t_f],\mathbb{R}^r)$.

Уточнение вида ограничений, накладываемых на управление, производится ниже.

Задача управления заключается в построении оптимальной стратегии, т.е. в нахождении допустимого управляемого процесса $\xi^0 = (x^0(t), u^0(t), t_f)$, минимизирующего функционал вида (2.2) на объекте (2.1), где цель управления задана в виде $S \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$.

2.2. Необходимые условия оптимальности

Запишем гамильтониан системы $H(t, x(t), u(t), \lambda(t))$:

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = L(t, x(t), u(t)) + \lambda^{\mathrm{T}}(t)[f(t, x) + g(t)u(t)] : \tag{2.3}$$

Здесь $\lambda(t)$ множитель Лагранжа.

Необходимые условия оптимальности имеют вид [1, 2, 7]

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left\{\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial \lambda}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad \lambda(t_f) = \left\{\frac{\partial K(x(t_f))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}. \tag{2.5}$$

Известно [1–4], что оптимальное управление $u(t)$, синтез которого выполняется с использованием гамильтониана (2.3), приводит к необходимости решения двухточечной краевой задачи (2.4), (2.5). Однако при этом следует отметить, что гамильтониан не содержит какой-либо информации о функциональной связи процессов $x(t)$ и $\lambda(t)$.

В рассматриваемой задаче с учетом сделанных выше предположений, должно выполняться необходимое условие

$$H^0(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \min_{u(t)} H(t, x(t), u(t), \lambda(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \tag{2.6}$$

где $\lambda(t)$ – решение системы (2.5). В случае, когда множество допустимых управлений U совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, т.е. $U = \mathbb{R}^n$, условие (2.6) может соблюдаться лишь в стационарной точке, т.е.

$$\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial u} = \frac{\partial L(t, x(t), u(t))}{\partial u} + g^{\top}(t)\lambda(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{2.7}$$

Однако если U – замкнутое множество и $U \neq \mathbb{R}^n$, то соотношение (2.7) в общем случае не выполняется и для синтеза оптимального управления следует применять принцип Понтрягина [2–4].

Предположим, что существует оптимальное управление, удовлетворяющее необходимым условиям (2.6) или (2.7), которое запишем в виде

$$u(t) = -\varphi(x(t))\lambda(t), \tag{2.8}$$

где матричная функция $\varphi(x(t)) \in \mathbb{R}^{r\times n}$ такая, что

$$g(t)\varphi(x(t)) \leqslant \Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{2.9}$$

Здесь Φ – параметрически заданная матрица, поэлементно определяющая множество возможных значений параметров матрицы $\varphi(x(t))$ при известной матрице $g(t)$; это означает, что ограничения, накладываемые на управление $u(t) \subset U$, конкретизируются в виде условия (2.9). Вопрос о связи установленных ограничений на параметры регулятора будет рассмотрен в четвертом разделе статьи при конкретизации вида функций $L(t, x(t), u(t))$ и $K(x(t_f))$ критерия качества (2.2).

Таким образом, синтез оптимального допустимого процесса $\xi = \{x(t), u(t), t_0, t_f\}$ заменяется на поиск матрицы $\varphi(x(t))$, при которой управление $u(t) = -\varphi(x(t))\lambda(t) \subset U$ обеспечивает выполнение условия (2.9) и минимизирует функционал (2.2).

Перепишем условия (2.4), (2.5) с учетом (2.8):

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) - g(t)\varphi(x(t))\lambda(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} \lambda(t) - \left\{\frac{\partial L(t, x(t), u(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}, \\ \lambda(t_f) = \left\{\frac{\partial K(x(t_f))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Таким образом, успешное решение задачи синтеза оптимального управления в виде $u(t) = -\varphi(x(t))\lambda(t)$ зависит от возможности успешного решения двухточечной краевой задачи (2.10), (2.11).

3. Псевдооптимальное решение задачи синтеза

Следует отметить, что представленные выше этапы построения оптимального управления основаны на использовании свойств гамильтониана (2.3), однако гамильтониан, как уже отмечалось выше, не содержит информации относительно краевых условий системы управления. Только условие $K(x(t_f))$ в функционале (2.2), т.е. $\lambda(t_f) = \{\partial K(x(t_f))/\partial x\}^{\mathrm{T}}$ в краевом условии уравнения (2.11), может связать переменные $x(t)$ и $\lambda(t)$ в момент t_f. Кроме этого, следует заметить, что так как система (2.1) описывается нелинейным дифференциальным уравнением, то ограничение (2.9), накладываемое на оптимальное управление, в общем случае может не содержать управляющих воздействий, при которых достигается цель управления при заданных начальных условиях $x_0 \in X_0$ и, более того, доставляющих равномерную асимптотическую устойчивость системе [1–4].

Для обоснования предлагаемого метода решения задачи построения псевдооптимального управления используем обратный принцип оптимальности

Беллмана [4, 21], который предполагает, что оптимальное управление обладает тем свойством, что для любого начального состояния и используемого начального управления, на величину критерия на конечном интервале оказывает управление на этом интервале и значение фазового вектора в конце интервала. Для рассматриваемой в данной работе проблемы уточним это определение.

Определение 1 [обратный принцип оптимальности]. *Для оптимальности допустимого процесса $\xi^0 = (x^0(t), u^0(t), t_0, t_f)$ в задаче* (2.1), (2.2) *необходимо, чтобы при любом из подынтервалов $[t_0, \tau] \subset [t_0, t_f]$, $\tau \leqslant t_f$ допустимый процесс, начинающийся в момент t_0, был оптимален относительно управления на этом интервале и значения фазового вектора в конце интервала $x(\tau)$, определяющего значения функции вспомогательной переменной $\lambda(\tau)$, т.е. $\xi^0 = (x^0(t), u^0(t), t_0, \tau)$.*

Основываясь на этом определении, сделаем следующее

Предположение 2. Отмечая, что условие, связывающее переменные $x(t)$ и $\lambda(t)$ в момент t_f, определяется как $\lambda(t_f) = \{\partial K(x(t_f))/\partial x\}^{\mathrm{T}}$, будем считать, опираясь на обратный принцип оптимальности, что справедливо соотношение $\tilde{\lambda}(\tau) = \{\partial K(\tilde{x}(\tau))/\partial \tilde{x}\}^{\mathrm{T}}$ для всех $\tau \in [t_0, t_f]$.

Выполнение предположения 2 означает, что для всех $t \in [t_0, t_f]$ переменная $\tilde{\lambda}(t)$ является функцией состояния $\tilde{x}(t)$.

Определение 2. Управление $\tilde{u}(t) = -\varphi(\tilde{x}(t))\tilde{\lambda}(t)$, синтез которого основан на принятии сделанного предположения 2, назовем псевдооптимальным управлением.

Перепишем уравнения (2.10), (2.11) с допустимым управлением $\tilde{u}(t) = -\varphi(\tilde{x}(t))\tilde{\lambda}(t)$ в виде

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(t, \tilde{x}(t)) - g(t)\varphi(\tilde{x}(t))\tilde{\lambda}(t), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\tilde{\lambda}(t) = -\left\{\frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}} \tilde{\lambda}(t) - \left\{\frac{\partial L(t, \tilde{x}(t), u(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}}, \\ \tilde{\lambda}(t_f) = \lambda(t_f) = \left\{\frac{\partial K(x(t_f))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

При выполнении сделанного предположения 2 первые полные производные основного и вспомогательного уравнений связаны соотношением

$$\frac{d}{dt}\tilde{\lambda}(t) = \left\{\frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2}\right\} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{3.3}$$

Подставляя $dx(t)/dt$ и $d\lambda(t)/dt$, определенные в (3.1) и (3.2), будем иметь

$$-\left\{\frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}} \tilde{\lambda}(t) - \left\{\frac{\partial L(t, \tilde{x}(t), u(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}} =$$
$$= \left\{\frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2}\right\} f(t, \tilde{x}(t)) - \left\{\frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2}\right\} g(t)\varphi(\tilde{x}(t))\tilde{\lambda}(t).$$

Откуда, приведя подобные члены и учитывая (2.9), получим

$$
\tag{3.4}
\begin{gathered}
\tilde{\lambda}(t) = \left[-\left\{ \frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^{\mathrm{T}} + \left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \Phi \right]^{-1} \times \\
\times \left[\left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} f(t,\tilde{x}(t)) + \left\{ \frac{\partial L(t,\tilde{x}(t),u(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^{\mathrm{T}} \right].
\end{gathered}
$$

Очевидно, что выражение $\left\{\partial^2 K(\tilde{x}(t))/\partial \tilde{x}^2\right\} \Phi - \{\partial f(t,\tilde{x}(t))/\partial \tilde{x}\}^{\mathrm{T}}$ должно быть положительно определенным. Это условие, как будет показано в разделе 4, можно обеспечить выбором соответствующих элементов функции терминального штрафа функционала (2.2). Таким образом, матрица

$$
\left[\left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \Phi - \left\{ \frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^{\mathrm{T}} \right]^{-1}
$$

положительно определенная, что будет учитываться при анализе устойчивости системы с синтезированным управлением.

Псевдооптимальное управление вида (2.8) будет определяться следующим выражением

$$
\tag{3.5}
\begin{gathered}
\tilde{u}(t) = -\varphi(\tilde{x}(t)) \left[\left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \Phi - \left\{ \frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^{\mathrm{T}} \right]^{-1} \times \\
\times \left[\left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} f(t,\tilde{x}(t)) + \left\{ \frac{\partial L(t,\tilde{x}(t),u(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^{\mathrm{T}} \right].
\end{gathered}
$$

Для установления требований равномерной асимптотической устойчивости, которым должна отвечать система (3.1) с управлением (3.5), введем функцию Ляпунова

$$
\tag{3.6}
V_L(t) = \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{x}(t).
$$

Полная производная функции Ляпунова (3.6) имеет вид

$$
\tag{3.7}
\frac{d}{dt}V_L(t) = f^{\mathrm{T}}(t,\tilde{x}(t))\tilde{x}(t) - \tilde{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\Phi^{\mathrm{T}}\tilde{x}(t) + \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)f(t,\tilde{x}(t)) - \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)\Phi\tilde{\lambda}(t) \leqslant 0,
$$

где $\tilde{\lambda}(t)$ определяется уравнением (3.4). Таким образом, система (3.1) равномерно асимптотически устойчива, если выполняется условие

$$
\tag{3.8}
f^{\mathrm{T}}(t,\tilde{x}(t))\tilde{x}(t) + \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)f(t,\tilde{x}(t)) \leqslant \tilde{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\Phi^{\mathrm{T}}\tilde{x}(t) + \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)\Phi\tilde{\lambda}(t).
$$

Можно заметить, что выполнение условия (3.8) зависит от матрицы Φ, ограничивающей возможности управления.

Обобщая полученный выше результат, формулируем теорему 1.

Теорема 1. Псевдооптимальное решение задачи управления нелинейным динамическим объектом (2.1) *с функционалом* (2.2) *существует, если и только если*

$$\left\{\frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2}\right\}\Phi - \left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}} > 0, \quad \forall (t,\tilde{x}) \in [t_0, t_f] \times \Omega_x. \tag{3.9}$$

В этом случае траектория $\tilde{x}^0(t)$ *системы* (2.1), *исходящая из* $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$ *и соответствующая псевдооптимальному управлению* $\tilde{u}^0(t)$, *является решением уравнения*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(t,\tilde{x}(t)) - g(t)\varphi(\tilde{x}(t))\left[\left\{\frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2}\right\}\Phi - \left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\times\\ \times\left[\left\{\frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2}\right\} f(t,\tilde{x}(t)) + \left\{\frac{\partial L(t,\tilde{x}(t),u(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}}\right].\end{gathered} \tag{3.10}$$

Выполнение условия (3.9) *с учетом наложенных на параметры управляющего воздействия ограничений* (2.9) *позволяет определить область начальных условий системы* (3.10), *при которых псевдооптимальное управление* (3.5) *обеспечит нелинейной системе равномерную асимптотическую устойчивость:*

$$\left\{\frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2}\right\}_{t=t_0}\Phi - \left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}}_{t=t_0} \succ 0. \tag{3.11}$$

4. Задача с квадратичным функционалом качества

Задача управления динамическими системами по квадратичному критерию является классической задачей современной теории управления. Для линейных систем эта задача полностью решена и ее решение полно и подробно описано во многих книгах (см. например [1–3])). Для нелинейных систем одно из первых ее рассмотрений приведено в книге [4]. Здесь описана схема последовательных приближений, которая в некоторых случаях дает оптимальное управление в виде закона с обратной связью. Особенностью метода является то, что оператор системы меняется от итерации к итерации. Это затрудняет аналитическое исследование задачи и чрезвычайно усложняет вычислительную процедуру. Поэтому данный метод не нашел широкого применения. В [6–8] были рассмотрены различные аспекты задачи (от построения оптимального управления до доказательства существования ее решения). В [17] описана модифицированная схема последовательных приближений для задачи оптимального управления нелинейной системой по квадратичному функционалу качества. Данная схема дает решение задачи во многих важных случаях. Вместе с тем вопрос о сходимости метода на произвольном конечном горизонте пока остается открытым и является темой дальнейших исследований.

В данной статье рассматривается задача управления объектом вида (2.1)

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) + g(t)u(t), \quad x(t_0) = x_s, \tag{4.1}$$
$$f, g : T \times \Omega_x \to \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \to f(t, x), \, g(t),$$

с функционалом

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_f} \left\{x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}QCx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\right\} dt. \tag{4.2}$$

Матрицы F, Q, R положительно определенные.

Задача управления заключается в построении оптимальной стратегии, т.е. в нахождении допустимого управляемого процесса $\xi^0 = (x^0(t), u^0(t), t_0, t_f)$, минимизирующего функционал вида (4.2) на объекте (4.1), где цель управления задана в виде $S \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$.

Предположим, что существует оптимальное управление, удовлетворяющее необходимым условиям (2.6) или (2.7), которое запишем в виде

$$u(t) = -\varphi(x(t))\lambda(t), \tag{4.3}$$

где матричная функция $\varphi(x(t)) \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с учетом (2.10), такая, что

$$g(t)R^{-1}g^{\mathrm{T}}(t) = g(t)\varphi(x(t)) \leqslant \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{4.4}$$

Здесь Φ – параметрически заданная матрица, поэлементно определяющая множество возможных значений параметров матрицы $\varphi(x(t))$ при известной матрице $g(t)$, что означает, что ограничения, накладываемые на управление $u(t) \subset U$, конкретизируются в виде условия (4.4).

Предположение 3. Назначением матриц штрафа F, Q, R функционала качества (4.2) можно при определении оптимального управления обеспечить выполнение условия (4.4).

Двухточечная краевая задача в данной подзадаче с учетом (4.4) имеет вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) - \Phi\lambda(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.5}$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial f(t, x(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}} \lambda(t) - C^{\mathrm{T}}QCx(t), \quad \lambda(t_f) = Fx(t_f). \tag{4.6}$$

Таким образом, успешное решение задачи синтеза оптимального управления в виде $u(t) = -\varphi(x(t))\lambda(t)$ зависит от возможности успешного решения двухточечной краевой задачи (4.5), (4.6).

При выполнении сделанного выше предположения 2 в рассматриваемой задаче с квадратичным функционалом качества функции $\tilde{\lambda}(t)$ и $\tilde{x}(t)$ связаны линейно соотношением $\tilde{\lambda}(t) = F\tilde{x}(t)$. Таким образом, полные производные основного и вспомогательного уравнений имеют вид

$$\frac{d}{dt}\tilde{\lambda}(t) = F\frac{d}{dt}\tilde{x}(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{4.7}$$

Подставляя $d\tilde{x}(t)/dt$ и $d\tilde{\lambda}(t)/dt$, определенные в (4.6), будем иметь

$$-\left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}} \tilde{\lambda}(t) + F\Phi\tilde{\lambda}(t) = Ff(t,\tilde{x}(t)) + C^{\mathrm{T}}QC\tilde{x}(t).$$

Откуда, приведя подобные члены, получим

$$\tilde{\lambda}(t) = \left[F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}}\right]^{-1} \left[Ff(t,\tilde{x}(t)) + C^{\mathrm{T}}QC\tilde{x}(t)\right]. \tag{4.8}$$

Здесь принимаем, что

$$F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}} > 0, \quad \forall (t,\tilde{x}) \in [t_0, t_f] \times \Omega_x. \tag{4.9}$$

Как можно заметить, выполнение условия (4.9) при заданных ограничениях (4.4) зависит от назначения матрицы F в функционале (4.2).

Управление (4.5) с учетом (4.8) принимает вид

$$\tilde{u}(t) = -\varphi(x(t))\left[F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}}\right]^{-1} \left[Ff(t,\tilde{x}(t)) + C^{\mathrm{T}}QC\tilde{x}(t)\right]. \tag{4.10}$$

Запишем исходную систему (4.1) с управлением (4.10) (учитывая (4.3) и (4.4)):

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(t,\tilde{x}(t)) - \Phi\left[F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}}\right]^{-1} \left[Ff(t,\tilde{x}(t)) + C^{\mathrm{T}}QC\tilde{x}(t)\right], \\ &\tilde{x}(t_0) = x_0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Для проверки устойчивости системы (4.11) предварительно введем некоторые обозначения: пусть

$$S(\tilde{x}(t)) = \left[F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}}\right]^{-1} > 0. \tag{4.12}$$

Перепишем (4.11) с учетом сделанного обозначения:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = [I - \Phi S(\tilde{x}(t))F]f(t,\tilde{x}(t)) - \Phi S(\tilde{x}(t))C^{\mathrm{T}}QC\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0. \tag{4.13}$$

Введем функцию Ляпунова [22] в виде

$$V_L\tilde{x}(t) = \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{x}(t). \tag{4.14}$$

Полная производная функции Ляпунова определяется выражением

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}V_L\tilde{x}(t) = f^{\mathrm{T}}(t,\tilde{x}(t))[I-\Phi S(\tilde{x}(t))F]^{\mathrm{T}}\tilde{x}(t) - \\ - C^{\mathrm{T}}QC\tilde{x}(t)S^{\mathrm{T}}(\tilde{x}(t))\Phi^{\mathrm{T}}\tilde{x}(t) + \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)[I-\Phi S(\tilde{x}(t))F]f(t,\tilde{x}(t)) - \\ - \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)\Phi S(\tilde{x}(t))C^{\mathrm{T}}QC\tilde{x}(t) \leqslant 0.\end{gathered} \tag{4.15}$$

Назначая соответствующим образом матрицы Q и F в функционале (4.2) можно обеспечить выполнение неравенства (4.15), при котором система динамическая (4.11) обладает свойством равномерной асимптотической устойчивости.

Обобщая полученный выше результат, формулируем теорему 2.

Теорема 2. Псевдооптимальное решение задачи управления нелинейным динамическим объектом (4.1) *с функционалом* (4.2) *существует, если и только если*

$$F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}} > 0, \quad \forall (t,\tilde{x}) \in [t_0, t_f] \times \Omega_x. \tag{4.16}$$

В этом случае траектория $\tilde{x}^0(t)$ *системы* (4.1), *исходящая из* $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$ *и соответствующая псевдооптимальному управлению* $\tilde{u}^0(t)$, *является решением уравнения*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(t,\tilde{x}(t)) - \\ - \Phi\left[F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\left[Ff(t,\tilde{x}(t)) + C^{\mathrm{T}}QC\tilde{x}(t)\right].\end{gathered} \tag{4.17}$$

Выполнение условия (4.9) *позволяет определить область начальных условий системы* (4.11), *при которых псевдооптимальное управление* (4.10) *обеспечит нелинейной системе равномерную асимптотическую устойчивость:*

$$\left\{F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t,\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^{\mathrm{T}}\right\}_{t=t_0} \succ 0. \tag{4.18}$$

Результат, представленный выше, распространим на некоторый класс нелинейных систем, представленных с применением метода SDC-параметризации (State Dependent Coefficient, [23,24]). Для этого сделаем ряд предположений.

Предположение 4. Вектор-функция $f = f(t, \tilde{x}(t))$ – непрерывная дифференцируемая по $x \in \Omega_x$, т.е. $f(\cdot) \in C^1(\Omega_x)$.

Предположение 5. Без потери общности положим, что условие $\tilde{x} = 0 \subset \Omega_x$ есть точка равновесия системы так, что $f(t, 0) = 0$.

Предположение 6. Положим [23], что

$$\frac{|f(t, \tilde{x}(t))|}{|\tilde{x}|} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to 0. \tag{4.19}$$

Учитывая предположения, сделанные относительно свойства $f(t, \tilde{x}(t))$, перейдем от описания исходной системы (4.1) к ее SDC-представлению [23]. Записав $f(t, \tilde{x}(t))$ в виде

$$f(t, \tilde{x}(t)) = [A(t) + A(\tilde{x}(t))]x(t) = A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t), \tag{4.20}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t) + g(t)u(t), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0, \\ &y(t) = C\tilde{x}(t), \\ &A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t), g(t) : T \times \Omega_x \to \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \to f(t, x),\ g(t). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Предположение 7. Положим, что пара $\{A(t, \tilde{x}), g(t)\}$ является управляемой, пара $\{A(t, \tilde{x}), C\}$ – наблюдаемой.

Управляемый объект (4.17) с учетом (4.11) принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t, \tilde{x})x(t) - \\ &\qquad - \Phi \left[F\Phi - \left\{ \frac{\partial A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t)}{\partial \tilde{x}} \right\}^{\mathrm{T}} \right]^{-1} \left[FA(t, \tilde{x}) + C^{\mathrm{T}}QC \right] \tilde{x}(t), \\ &y(t) = C\tilde{x}(t), \quad x(t_0) = x_0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Очевидно, что решение этого уравнения существует, если и только если выполняется условие, аналогичное условию (4.9),

$$F\Phi - \left\{ \frac{\partial A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t)}{\partial \tilde{x}} \right\}^{\mathrm{T}} > 0, \quad \forall (t, \tilde{x}) \in [t_0, t_f] \times \Omega_x. \tag{4.23}$$

Для проверки устойчивости системы (4.22) предварительно введем некоторые обозначения: пусть

$$S(\tilde{x}(t)) = \left[F\Phi - \left\{ \frac{\partial A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t)}{\partial \tilde{x}} \right\}^{\mathrm{T}} \right]^{-1} > 0, \tag{4.24}$$

т.е. управляемая система (4.22) с учетом сделанных обозначений принимает вид (4.13).

С учетом (4.23) и принимая во внимание (4.15), запишем полную производную функции Ляпунова

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}V_L(t,\tilde{x}) = \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}(t,\tilde{x})\left[I-\Phi S(\tilde{x}(t))F\right]^{\mathrm{T}}\tilde{x}(t) - \\ -\tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}QC\tilde{x}(t)S^{\mathrm{T}}(\tilde{x}(t))\Phi^{\mathrm{T}}\tilde{x}(t) + \\ +\tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)\left[I-\Phi S(\tilde{x}(t))F\right]A(t,\tilde{x})\tilde{x}(t) - \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)\Phi S(\tilde{x}(t))C^{\mathrm{T}}QC\tilde{x}(t) \leqslant 0.\end{gathered} \tag{4.25}$$

Таким образом, асимптотическая устойчивость управляемой системы (4.22) должна обеспечиваться выполнением условия

$$\begin{gathered}A^{\mathrm{T}}(t,\tilde{x})\left[I-\Phi S(\tilde{x}(t))F\right]^{\mathrm{T}} + \left[I-\Phi S(\tilde{x}(t))F\right]A(t,\tilde{x}) \leqslant \\ \leqslant C^{\mathrm{T}}QCS^{\mathrm{T}}(\tilde{x}(t))\Phi^{\mathrm{T}} + \Phi S(\tilde{x}(t))C^{\mathrm{T}}QC.\end{gathered} \tag{4.26}$$

Выполнение условий (4.4) и (4.26) при заданной матрице Φ можно обеспечить соответствующим назначением матриц штрафов F, Q, R функционала качества (4.2).

5. Пример

Для иллюстрации полученных теоретических результатов рассмотрим пример [25] синтеза псевдооптимального управления для системы вида (4.1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= x_2(t) + \left[x_1^5(t) - x_1^3(t) - x_1(t) + x_1(t)x_2^4(t)\right] + x_1(t)u_1(t), \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + \left[x_2^5(t) - x_2^3(t) - x_2(t) + x_2(t)x_1^4(t)\right] + x_2(t)u_2(t).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь в соответствии с разделом 4 статьи

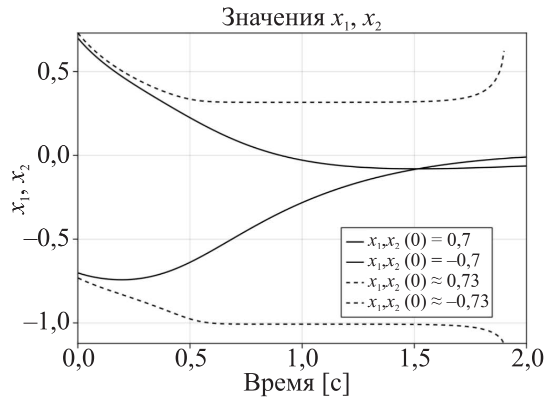
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^5(t) - x_1^3(t) - x_1(t) + x_1(t)x_2^4(t) \\ x_2^5(t) - x_2^3(t) - x_2(t) + x_2(t)x_1^4(t) \end{pmatrix},$$

$$g(x(t))u(t) = \begin{pmatrix} g_1(x(t))u_1(t) \\ g_2(x(t))u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t)u_1(t) \\ x_2(t)u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) & 0 \\ 0 & x_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Задан квадратичный функционал качества вида (4.2) с параметрами

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интервал управления $[t_0, t_f] = [0, 2]$.



Результаты моделирования.

Ограничения, накладываемые на управления при заданной матрице F и

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

определяются следующим образом:

$$g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t)) = \begin{pmatrix} x_1^2(t) & 0 \\ 0 & x_2^2(t) \end{pmatrix} \leqslant \Phi. \tag{5.3}$$

Синтезированное псевдооптимальное управление, согласно (4.10), имеет вид

$$\tilde{u}(t) = -\varphi(x(t)) \left[F\Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} \right\}^{\mathrm{T}} \right]^{-1} \left[Ff(t, x(t)) + C^{\mathrm{T}}QCx(t) \right], \tag{5.4}$$

где матрица $\varphi(x(t))$ удовлетворяет условию (5.2), а $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для проверки устойчивости системы с синтезированным управлением (5.4) запишем систему (5.1) с учетом (5.4):

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}x(t) = [Ax(t) + f(t, x(t))] - \\ - \Phi \left[F\Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} \right\}^{\mathrm{T}} \right]^{-1} \left[F\left(Ax(t) + f(t, x(t)) \right) + Qx(t) \right], \\ x(0) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Численное моделирование системы (5.5) с начальными условиями $x_1(0) = 0{,}5$, $x_2(0) = 0{,}5$, представленное на ~~рисунке~~, показывает, что траектории $x_1(t)$ и $x_2(t)$ стремятся к нулю при $t \to t_f$, что подтверждает равномерную асимптотическую устойчивость системы при заданных параметрах. Это согласуется с выводами теоремы 2 ((4.16)) и условием (4.18).

6. Заключение

Каноническая система Эйлера-Лагранжа с заданием соответствующих краевых условий является основой необходимых условий оптимальности в задаче синтеза оптимальных управлений динамическим объектом, сам же синтез этих управлений проводится на основе анализа поведения гамильтониана на оптимальной траектории. Однако гамильтониан не содержит какой-либо информации о соотношении процессов, входящих в каноническую систему. Успех синтеза оптимального управления в целом зависит от возможности решения канонической системы с заданными краевыми условиями. Следует отметить, что функциональная связь между процессами двухточечной краевой задачи имеется только в частной производной по x первого слагаемого функционала качества Больца. В настоящей работе предложен альтернативный численным методам путь решения двухточечных краевых задач, основанный на предположении справедливости обратного принципа оптимальности Р. Беллмана, заключающийся в сохранении функциональной связи между компонентами двухточечной краевой задачи во всем интервале управления.

В результате исследований задачи синтеза управления для нелинейной динамической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением и функционалом Больца, получено аналитическое выражение для псевдооптимального управления, сформулирована теорема о необходимых условиях оптимальности этого управления. Для задачи с квадратичным функционалом качества, SDC представлением нелинейного динамического объекта и соответствующим псевдооптимальным управлением доказана теорема об асимптотической устойчивости системы управления. Получены условия, которым должны отвечать матрицы штрафов функционала качества, при которых обеспечивается требуемое качество переходных процессов управляемой нелинейной системы при выполнении установленных ограничений на управление.

Полученные теоретические результаты подтверждены моделированием системы управления с синтезированным управлением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2009. 385 с.
2. *Афанасьев В.Н.* Математическая теория управления непрерывными динамическими системами. М.: КРАСАНД, 2021. 480 с.
3. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 615 с.
4. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Т. 1. Г.л.2, 6. М.: МЦИМО, 2011. 620 с.
5. *Болдырев Ю.Я.* Вариационное исчисление и методы оптимизации. М.: Серия Университеты России, 2021. 240 с.

6. *Галеев Э.М., Зеликин М.И.* и др. Оптимальное управление / Под ред. Н.П. Осмоловского и В.М. Тихомирова. М.: Изд. МЦИМО, 2008. 320 с.
7. *Struwe M.* Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Springer-Verlag, 2008. 302 p.
8. *Гурьянов А.В.* Некоторые аспекты численного решения двухточечной краевой задачи методом ортогонального переноса граничных условий // Журн. кристаллы и их практическое использование. 2014. Т. 14. № 3. С. 75–79.
9. *Барсегян В.Р.* Задача оптимального управления колебаниями струны с перераспределенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени // АнТ. 2020. № 2. С. 36–47.
10. *Квитко А.Н.* Об одном методе решения локальной краевой задачи для нелинейной управляемой системы // АнТ. 2020. № 2. С. 48–61.
11. *Rao A.V.* Survey of Numerical Methods of Optimal Control // Advances in the Astronautical Sciences. 2010. Vol. 135 (1). P. 497–528.
12. *Terekhoff S.A., Fedonova N.N.* Cascade Neural Networks in Variational Methods for Boundary Value Problems // Proceedings IJCNN'99. 1999. https://doi.org/10.1109/IJCNN.1999.832592
13. *Васильев А.Н., Терехов Д.А.* Нейросетевые подходы к решению краевых задач многомерных сетевых областей // Изв. ТРТУ. Таганрог, 2004. С. 60–89.
14. *Brociek R., Pleszczynski M.* Differential Transform Method and Neural Network for Solving Variational Calculus Problem // Mathematics. 2024. Vol. 12. P. 2182. https://doi.org/10.3390/math12142182
15. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М., Емельянова Е.И.* Исследование задачи оптимального управления нелинейной системой по квадратичному критерию в среде MathLout // Сборник НСКФ, ИПС им. А.А. Самарского РАН. 2015.
16. *Ayaz F.* On the two-dimensional differential transform method // Applied Mathematics and Computation. 2003. Vol. 143. P. 361–374. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00368-3
17. *Kanth A.S.V.R., Aruna K.* Differential transform method for solving linear and nonlinear systems of partial differential equations // Physics Letters A. 2008. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.10.008
18. *Eivazi H., Wang Y., Vinuesa R.* Physics-informed deep-learning applications to experimental fluid mechanics // Measurement Science and Technology. 2024. https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.15402
19. *Cuomo S., Schiano Di Cola V., Giampaolo F., Rozza G., Raissi M., Piccialli F.* Scientific Machine Learning Through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What's Next // J. Sci. Comput. 2022. V.92. No. 3. https://doi.org/10.1007/s10915-022-01939-z
20. *Абрамов А.А.* О численной устойчивости оценок метода переноса граничных условий // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 3. С. 404–406.
21. *Габасов Р., Кирилова Ф.М.* Основы динамического программирования. Минск: Изд-во БГУ, 1975. 265 с.
22. *Малкин И.Г.* Теория устойчивого движения. 2-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2004. 432 с.

23. *Cimen T.D.* State-Dependent Riccati Equation Control: A Survey // Proceedings of the 17th World Congress IFAC. Seoul, Korea, 2008. P. 3771–3775.

24. *Афанасьев В.Н.* Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: ЛЕНАРД, 2015.

25. *Leong Y.P., Horowitz M.B., Burdick J.* Linearly Solvable Stochastic Control Lyapunov Functions // J. Control Optim. Math. 2016. No. 54. https://doi.org/10.1137/16M105767X

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 02.12.2024

После доработки 13.05.2025

Принята к публикации 20.05.2025