ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2025, том 522, с. 40–49

МАТЕМАТИКА

УДК 519.15, 519.17

ОБ ОДНОМ КОМБИНАТОРНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ: НОВАЯ КОНСТРУКЦИЯ ГРАФОВ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И С ПРОИЗВОЛЬНО БОЛЬШИМ ХРОМАТИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ

© 2025 г. Н. Л. Поляков[1,*]

Представлено академиком РАН А. Л. Семеновым

Получено 13.11.2024 г.
После доработки 26.12.2024 г.
Принято к публикации 20.03.2025 г.

В работе описан новый метод построения графов без треугольников и с произвольно большим хроматическим числом. Для обоснования метода применяются свойства различных типов ультрарасширений функций и предикатов.

Ключевые слова: граф, граф без треугольников, хроматическое число, ультрафильтр, ультрарасширение

DOI: 10.31857/S2686954325020073, **EDN:** HZFKYF

1. ВВЕДЕНИЕ

Графы без треугольников и с произвольно большим конечным хроматическим числом изучались начиная с середины XX в. В конце 40-х годов XX в. существование таких графов было доказано Таттом (см. [1]) и независимо Зыковым [2]. В середине 50-х годов результат был передоказан Мычельким [3]. Он предложил операцию над графами, иногда называемую *мычельскианом*, которая сохраняет отсутствие треугольников и увеличивает на единицу хроматическое число графа. Обобщение операции взятия мычельскиана, называемое *конусом над графом* и также приводящее к построению графов без треугольников с произвольно большим хроматическим числом, было введено Штибицем в [4]. Другую конструкцию предложил Ловас в 1978 г. Он показал [5], что этому свойству удовлетворяют некоторые серии *Кнезеровских графов* (см. также [6, 7]). Иной тип графов без треугольников и с произвольно большим хроматическим числом можно найти в работах [8] и [9]. Более общий результат (о существовании графов с произвольно большим хроматическим числом и при этом со сколь угодно большим обхватом) доказан в 1958 г. Эрдёшем [1] вероятностными методами. Явная конструкция построена Ловасом в работе [10]. О'Доннелл перенес [11, 12] теорему Эрдёша на *дистанционные графы*. Дальнейшие результаты в этом направлении см., напр., в работах [13, 14].

В настоящей статье мы предлагаем новый метод построения графов без треугольников с произвольно большим хроматическим числом, опирающийся на теорию ультрафильтров. Метод приводит к весьма естественному семейству графов, а обоснования требуемого свойства оказываются чрезвычайно просты (по модулю базовых теорем теории ультрафильтров).

Основные определения и результаты теории ультрафильтров (включая комбинаторные приложения) можно найти в монографиях [15] и [16]. Особенность предложенного в данной работе метода состоит в том, что мы используем алгебраические свойства ультрарасширений различных типов функций и предикатов произвольной конечной арности. Систематическое исследование этой конструкции начато в начале XXI века в работах Горанко [17] и Савельева [18, 19]. Более подробную информацию, включая историческую справку, можно найти в работе [20]. Заметим, однако, что, насколько нам известно, это ответвление теории ультрафильтров до сих пор не имело комбинаторных приложений.

[1] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия*
[*] *E-mail: npolyakov@hse.ru*

2. УЛЬТРАРАСШИРЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ПРЕДИКАТОВ: ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Множество всех подмножеств множества X обозначается символом $\mathscr{P}(X)$. *Ультрафильтром* на множестве X называется произвольное множество $\mathfrak{u} \subseteq \mathscr{P}(X)$, удовлетворяющее следующим условиям — для любых множеств $A, B \subseteq X$:

1) если $A \in \mathfrak{u}$ и $A \subseteq B$, то $B \in \mathfrak{u}$;

2) если $A \in \mathfrak{u}$ и $B \in \mathfrak{u}$, то $A \cap B \in \mathfrak{u}$;

3) $A \in \mathfrak{u}$ тогда и только тогда, когда $X \setminus A \notin \mathfrak{u}$.

Множество всех ультрафильтров на множестве X обозначается символом βX и, если это необходимо, наделяется топологией с открыто-замкнутой базой:

$$\{\{\mathfrak{u} \in \beta X : A \in \mathfrak{u}\} : A \in X\}.$$

Полученное таким образом топологическое пространство является компактным, хаусдорфовым, нульмерным и экстремально несвязным, см., напр., [15].

Каждый ультрафильтр вида $\{S \subseteq X : a \in S\}$, где $a \in X$, называется *главным ультрафильтром* (порожденным элементом a). Все ультрафильтры на множестве X, которые не являются главными, называются *неглавными*. ZFC влечет существование неглавных ультрафильтров на каждом бесконечном множестве X. Главный ультрафильтр, порожденный элементом $a \in X$, как правило, отождествляется с самим элементом a.

Для каждой функции $f : X \to Y$ ее ультрарасширение $\widetilde{f}$ есть функция из множества βX в множество βY, которая определяется следующим образом:

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \{S \subseteq Y : \{x \in X : f(x) \in S\} \in \mathfrak{u}\}, \qquad (1)$$

для всех $\mathfrak{u} \in \beta X$, см., напр., [15] . Легко проверить, что это определение эквивалентно каждому из следующих: для всех $\mathfrak{u} \in \beta X$

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \{S \subseteq Y : (\forall A \in \mathfrak{u})(\exists a \in A)\, f(a) \in S\} \qquad (2)$$

и

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \{S \subseteq Y : (\exists A \in \mathfrak{u})(\forall a \in A)\, f(a) \in S\}. \qquad (3)$$

Из определения легко следует, что для любого ультрафильтра $\mathfrak{u} \in \beta X$ и функции $f : X \to Y$

$$(\forall A \subseteq X)\, A \in \mathfrak{u} \Rightarrow f(A) \in \widetilde{f}(\mathfrak{u}), \qquad (4)$$

где $f(A)$ есть образ множества A при отображении f:

$$f(A) = \{y \in Y : (\exists x \in A)\, f(x) = y\}.$$

При этом множество $\{f(A) : A \in \mathfrak{u}\}$ образует базу ультрафильтра $\widetilde{f}(\mathfrak{u})$, т. е.

$$(\forall B \subseteq Y)\, B \in \widetilde{f}(\mathfrak{u}) \Rightarrow (\exists A \in \mathfrak{u})\, f(A) \subseteq B. \qquad (5)$$

Для каждой функции

$$f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$$

ее ультрарасширение

$$\widetilde{f} : \beta X_1 \times \beta X_2 \times \ldots \times \beta X_n \to \beta Y$$

может быть определено рекурсией по n, см., напр., [20] или [21]. Нуль-местная функция f отождествляется с константой $c_f \in Y$. Для $n = 0$ функция $\widetilde{f}$ есть нуль-местная функция, которая отождествляется с константой, равной главному ультрафильтру, порожденному константой c_f, т. е. $\widetilde{f} = \{S \subseteq Y : c_f \in S\}$. Для $n > 0$ положим:

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n) =$$
$$= \{S \subseteq Y : (\forall A \in \mathfrak{u}_1)(\exists a \in A)\, S \in \widetilde{f_a}(\mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n)\},$$

где $f_a(x_2, \ldots, x_n) = f(a, x_2, \ldots, x_n)$ для всех $a, x_2, \ldots, x_n \in X$. При $n = 1$ мы получаем определение (2).

Из определения легко следует, что множество $S \subseteq Y$ принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f}(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}&(\forall A_1 \in \mathfrak{u}_1)(\exists a_1 \in A_1)(\forall A_2 \in \mathfrak{u}_2)(\exists a_2 \in A_2)\ldots\\ &\ldots(\forall A_n \in \mathfrak{u}_n)(\exists a_n \in A_n)\, f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S,\end{aligned} \qquad (6)$$

причем это утверждение останется справедливым, если в выражении (6) произвольное количество вхождений кванторных блоков вида $(\forall A_i \in \mathfrak{u}_i)(\exists a_i \in A_i)$ заменить на соответствующие вхождения кванторных блоков $(\exists A_i \in \mathfrak{u}_i)(\forall a_i \in A_i)$. В частности, $S \in \widetilde{f}(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}&(\exists A_1 \in \mathfrak{u}_1)(\forall a_1 \in A_1)(\exists A_2 \in \mathfrak{u}_2)(\forall a_2 \in A_2)\ldots\\ &\ldots(\exists A_n \in \mathfrak{u}_n)(\forall a_n \in A_n)\, f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S.\end{aligned} \qquad (7)$$

Другой тип ультрарасширения функции $f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$ можно получить рассматривая ее как унарную функцию на множестве $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ и применяя формулу (1).

В этом случае мы получим функцию из множества $\beta(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n)$ в множество βY, которую будем обозначать символом $\widehat{f}$.

Чтобы установить связь между этими двумя типами ультрарасширения, нам потребуется определение (тензорного) произведения ультрафильтров. Если даны ультрафильтры $\mathfrak{u} \in \beta X$ и $\mathfrak{v} \in \beta Y$, то их произведение $\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}$ есть ультрафильтр из $\beta(X \times Y)$, который задается следующей формулой:

$$\mathfrak{u} \times \mathfrak{v} =$$
$$= \{S \subseteq X \times Y : \{x \in X : \{y \in Y : (x, y) \in S\} \in \mathfrak{v}\} \in \mathfrak{u}\}.$$

Произведение $\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 \times \ldots \times \mathfrak{u}_n$ ультрафильтров $\mathfrak{u}_1 \in \beta X_1$, $\mathfrak{u}_2 \in \beta X_2$, …, $\mathfrak{u}_n \in \beta X_n$ может быть определено по рекурсии:

$$\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 \times \ldots \times \mathfrak{u}_n = \mathfrak{u}_1 \times (\mathfrak{u}_2 \times \ldots \times \mathfrak{u}_n).$$

Из этого определения легко следует, что множество $S \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 \times \ldots \times \mathfrak{u}_n$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered}(\forall A_1 \in \mathfrak{u}_1)(\exists a_1 \in A_1)(\forall A_2 \in \mathfrak{u}_2)(\exists a_2 \in A_2)\ldots \\ \ldots(\forall A_n \in \mathfrak{u}_n)(\exists a_n \in A_n)\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S.\end{gathered} \tag{8}$$

Предложение 1 ([20]). *Для любых ультрафильтров* $\mathfrak{u}_1 \in \beta X_1$, $\mathfrak{u}_2 \in \beta X_2$, …, $\mathfrak{u}_n \in \beta X_n$ *и функции* $f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$ *имеет место равенство:*

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n) = \widehat{f}(\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 \times \ldots \times \mathfrak{u}_n).$$

Существует два различных канонических определения ультрарасширения предикатов, см. [20]. Пусть дан предикат $P \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Ультрарасширение $\widetilde{P} \subseteq \beta X_1 \times \beta X_2 \times \ldots \times \beta X_n$ можно определить, отождествив предикат P с его характеристической функцией (в данной работе этот тип ультрарасширения не используется). Более широкое ультрарасширение $P^* \subseteq \beta X_1 \times \beta X_2 \times \ldots \times \beta X_n$ (также иногда обозначаемое P^{ue}) введено в работе [22]. Для всех ультрафильтров $\mathfrak{u}_1 \in \beta X_1$, $\mathfrak{u}_2 \in \beta X_2$, …, $\mathfrak{u}_n \in \beta X_n$ предикат P^* задается условием: $P^*(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered}(\forall A_1 \in \mathfrak{u}_1)(\forall A_2 \in \mathfrak{u}_2)\ldots \\ \ldots(\forall A_n \in \mathfrak{u}_n)(\exists a_1 \in A_1)(\exists a_2 \in A_2)\ldots \\ \ldots(\exists a_n \in A_n)P(a_1, a_2, \ldots, a_n).\end{gathered} \tag{9}$$

Несложно заметить, что отношение P^* на множестве $\beta X_1 \times \beta X_2 \times \ldots \times \beta X_n$ есть замыкание отношения P в топологии произведения естественных топологий на βX_1, βX_2, …, βX_n.

Расширения $\widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}^*$ алгебраических структур $\mathfrak{A} = (X; f_1, f_2, \ldots; P_1, P_2, \ldots)$ определяются естественным образом:

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = (\beta X; \widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}, \ldots; \widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \ldots)$$
$$\text{и} \quad \mathfrak{A}^* = (\beta X; \widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}, \ldots; P_1^*, P_2^*, \ldots).$$

Таким образом, если алгебраическая структура $\mathfrak{A}$ есть модель языка первого порядка $\mathcal{L}$, то $\widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}^*$ также являются моделями языка $\mathcal{L}$: функциональные и предикатные символы языка $\mathcal{L}$ интерпретируются в моделях $\widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}^*$ ультрарасширениями их интерпретаций в модели $\mathfrak{A}$. Более подробно см. [20].

Операция ультрарасширения не сохраняет многие естественные тождества. Например, в общем случае не сохраняются тождества коммутативности, дистрибутивности и т.п. Один из немногих общих результатов состоит в следующем:

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (s = t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \widetilde{\mathfrak{A}} \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (s = t),$$

если все переменные в каждом из термов s и t не повторяются и идут в термах s и t в одинаковом порядке. Формально определим функцию v из множества термов языка $\mathcal{L}$ в множество $\mathrm{Var}^{<\omega}$ (где Var есть множество всех переменных языка $\mathcal{L}$) следующим образом:

1) если t есть константа, то $v(t) = \varnothing$ (т. е. $v(t)$ есть пустая последовательность);

2) если t есть переменная x, то $v(t) = x$;

3) если $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где f есть функциональный символ, а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, то $v(t) = v(t_1)v(t_2)\ldots v(t_n)$ (здесь последовательности записываются в виде слов, т. е. без служебных символов; конкатенация обозначается пустым символом).

Фактически $v(t)$ есть слово в алфавите Var, которое получается из терма t удалением всех символов, не входящих в Var.

Теорема 1 (Савельев, [19]). *Пусть* $\mathcal{L}$ *есть язык первого порядка,* t *и* s *— термы языка* $\mathcal{L}$ *и* $\mathfrak{A}$ *— модель языка* $\mathcal{L}$. *Пусть* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *есть последовательность переменных языка* $\mathcal{L}$ *без повторений и при этом:*

1) $v(t)$ *и* $v(s)$ *суть подпоследовательности* $\mathbf{x}$;

2) $\mathfrak{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\, t = s$.

Тогда $\widetilde{\mathfrak{A}} \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\, t = s$.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующий факт.

Теорема 2. *Пусть* $P \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, $Q \subseteq Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n$, $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$, …, $f_n : X_n \to Y_n$ *и*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow Q(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n))$$

для всех $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, …, $x_n \in X_n$. *Тогда*

$$P^*(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n) \Leftrightarrow Q^*(\widetilde{f_1}(\mathfrak{u}_1), \widetilde{f_2}(\mathfrak{u}_2), \ldots, \widetilde{f_n}(\mathfrak{u}_n))$$

для всех $\mathfrak{u}_1 \in \beta X_1$, $\mathfrak{u}_2 \in \beta X_2$, …, $\mathfrak{u}_n \in \beta X_n$.

Доказательство. Пусть выполнено

$$P^*(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n),$$

т. е. для любых $A_1 \in \mathfrak{u}_1$, $A_2 \in \mathfrak{u}_2$, …, $A_n \in \mathfrak{u}_n$ существуют $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$, для которых имеет место условие $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ суть произвольные элементы ультрафильтров $\widetilde{f_1}(\mathfrak{u}_1), \widetilde{f_2}(\mathfrak{u}_2), \ldots, \widetilde{f_n}(\mathfrak{u}_n)$ соответственно. Используя (5), в каждом ультрафильтре $\mathfrak{u}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выберем элемент A_i, для которого $f(A_i) \subseteq B_i$. Из каждого множества A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выберем элемент a_i так, чтобы выполнялось $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равносильно $Q(f_1(a_1), f_2(a_2), \ldots, f_n(a_n))$. Поскольку $f_i(a_i) \in B_i$ для каждого номера i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеем $Q^*(\widetilde{f_1}(\mathfrak{u}_1), \widetilde{f_2}(\mathfrak{u}_2), \ldots, \widetilde{f_n}(\mathfrak{u}_n))$.

Пусть, наоборот, выполнено

$$Q^*(\widetilde{f_1}(\mathfrak{u}_1), \widetilde{f_2}(\mathfrak{u}_2), \ldots, \widetilde{f_n}(\mathfrak{u}_n)),$$

т. е. для любых $A_1 \in \widetilde{f_1}(\mathfrak{u}_1)$, $A_2 \in \widetilde{f_2}(\mathfrak{u}_2)$, …, $A_n \in \widetilde{f_n}(\mathfrak{u}_n)$ существуют $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$, для которых имеет место условие $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ суть произвольные элементы ультрафильтров $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n$ соответственно. В силу (4), каждое множество $f(B_i)$ принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f_i}(\mathfrak{u}_i)$. Из каждого множества $f(B_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, выберем элемент a_i так, чтобы выполнялось $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Каждый элемент a_i имеет хотя бы один прообраз (при отображении f_i), лежащий в множестве B_i. Обозначим его b_i. Тогда выполнено $Q(f_1(b_1), f_2(b_2), \ldots, f_n(b_n))$ равносильно $P(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Следовательно, имеет место $P^*(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n)$. □

Следствие 1. *Пусть* $f, g : X \to Y$, $P \subseteq X \times X$ *и*

$$P(x, y) \Leftrightarrow f(x) = g(y)$$

для всех $x, y \in X$. *Тогда*

$$P^*(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) \Leftrightarrow \widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \widetilde{g}(\mathfrak{v})$$

для всех $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \beta X$.

Доказательство. С учетом теоремы 2 достаточно заметить, что $*$-расширение отношения равенства на множестве X есть отношение равенства на множестве βX. □

3. ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР И ГРАФОВ

Множество $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X)$ называется *разбиением* множества X (на непустые подмножества), если:

1) $\varnothing \notin \mathcal{P}$,

2) $\bigcup \mathcal{P} = X$,

3) $(\forall Y, Z \in \mathcal{P})\, Y \cap Z = \varnothing \vee Y = Z$.

Под *хроматическим числом* $\chi(\mathfrak{A})$ алгебраической структуры $\mathfrak{A} = (X; R)$, где $R \subseteq X^n$ $(1 \leqslant n < \omega)$, мы будем понимать такой наименьший кардинал κ, что для некоторого разбиения $\mathcal{P}$ множества X мощности κ выполнено

$$(\forall Y \in \mathcal{P})\, Y^n \cap R = \varnothing.$$

Если таких кардиналов не существует, положим $\chi(\mathfrak{A}) = \infty$. Очевидно, $\chi(\mathfrak{A}) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models \exists x\, P(x, x, \ldots, x)$. В противном случае $\chi(\mathfrak{A}) \leqslant |X|$. Неравенство $\chi(\mathfrak{A}) \geqslant \omega$ (и выражение «хроматическое число алгебраической структуры $\mathfrak{A}$ бесконечно») означает, что $\chi(\mathfrak{A})$ есть бесконечный кардинал или ∞. Очевидно, это условие равносильно следующему: в каждом конечном разбиении $\mathcal{P}$ носителя X алгебраической структуры $\mathfrak{A}$ найдется такой элемент Y, что $R(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ для некоторых $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$. Если это условие не выполняется — мы говорим, что хроматическое число алгебраической структуры $\mathfrak{A}$ конечно, и записываем $\chi(\mathfrak{A}) < \omega$.

Пусть $\mathfrak{A} = (X; R)$, где $R \subseteq X^n$ $(1 \leqslant n < \omega)$. Для каждого непустого множества $Y \subseteq X$ обозначим символом $\mathfrak{A}_Y$ подмодель модели $\mathfrak{A}$ с универсумом Y: $\mathfrak{A}_Y = (Y; R \cap Y^n)$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{A} = (X; R)$, *где* $1 \leqslant n < \omega$ *и* $R \subseteq X^n$, *и* $\varnothing \neq Y \subseteq X$. *Тогда следующие условия равносильны:*

1) *существует такой ультрафильтр* $\mathfrak{u} \in \beta X$, *что* $Y \in \mathfrak{u}$ *и* $R^*(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$,

2) $\chi(\mathfrak{A}_Y) \geqslant \omega$.

В частности, $\chi(\mathfrak{A}) \geqslant \omega$ *тогда и только тогда, когда* $R^*(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ *для некоторого ультрафильтра* $\mathfrak{u} \in \beta X$.

Доказательство. ($1 \implies 2$). Пусть $Y \in \mathfrak{u}$ и $R^*(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Рассмотрим произвольное конечное разбиение $\mathcal{P}$ множества Y. Для некоторого множества $Z \in \mathcal{P}$ имеем: $Z \in \mathfrak{u}$. Следовательно, для некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in Z$ выполнено $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, т. е. $Z \cap R \neq \varnothing$. Поэтому хроматическое число $\chi(\mathfrak{A}_Y)$ не может быть конечным.

($2 \implies 1$). Пусть $\chi(\mathfrak{A}_Y) \geqslant \omega$. Покажем, что существует такой ультрафильтр $\mathfrak{u} \in \beta X$, что $Y \in \mathfrak{u}$ и $\chi(\mathfrak{A}_Z) \geqslant \omega$ для каждого множества $Z \in \mathfrak{u}$. Действительно, в противном случае существует покрытие множества $\mathrm{Cl}\,(Y) = \{\mathfrak{v} \in \beta X : Y \in \mathfrak{v}\}$ множествами вида $\{\mathfrak{v} \in \beta X : B \in \mathfrak{v}\}$, где $\chi(\mathfrak{A}_B) < \omega$. В силу компактности βX, из этого покрытия него можно выделить конечное подпокрытие. Следовательно, существуют такие множества $B_1, B_2, \ldots, B_m$ (где $m < \omega$), что

1) $Y = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$ и

2) $\chi(\mathfrak{A}_{B_i}) < \omega$ для каждого номера i, $1 \leqslant i \leqslant m$, т. е. существует конечное разбиение $\mathcal{P}_i$ множества B_i, для которого выполнено: $(\forall Z \in \mathcal{P}_i)\, Z^n \cap R = \varnothing$.

Без ограничения общности семейство $\{B_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ можно считать дизъюнктным. Значит, множество $Q = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} \mathcal{P}_i$ есть конечное разбиение множества Y, причем $Z^n \cap R = \varnothing$ для каждого $Z \in Q$. Следовательно, $\chi(\mathfrak{A}_Y) < \omega$, противоречие.

Теперь покажем, что для любого ультрафильтра $\mathfrak{u}$ с указанным свойством выполнено $R^*(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные элементы ультрафильтра $\mathfrak{u}$, и $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$. Поскольку $A \in \mathfrak{u}$, выполнено: $\chi(\mathfrak{A}_A) \geqslant \omega$. Следовательно, $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ для некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ (в противном случае $\chi(\mathfrak{A}_A) = 1$). Таким образом, мы имеем

$$(\forall A_1 \in \mathfrak{u})(\forall A_2 \in \mathfrak{u}) \ldots$$
$$\ldots (\forall A_1 \in \mathfrak{u})(\exists a_1 \in A_1)(\exists a_2 \in A_2) \ldots$$
$$\ldots (\exists a_n \in A_n)\, R(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

т. е.

$$R^*(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}),$$

что и требуется. □

Под (неориентированным) графом Γ мы понимаем пару (V, E), где $E \subseteq \{e \subseteq V : 0 < |e| \leqslant 2\}$. Элементы множества V называются вершинами графа Γ, а элементы множества E — его ребрами. *Хроматическим числом* $\chi(\Gamma)$ графа $\Gamma = (V, E)$ называется наименьший кардинал κ, для которого существует такое разбиение $\mathcal{P}$ множества V мощности κ, что любые две вершины графа Γ, принадлежащие одному и тому же множеству $Y \in \mathcal{P}$, независимы, т. е. выполнено условие

$$(\forall Y \in \mathcal{P})\, \mathscr{P}(Y) \cap E = \varnothing.$$

Если такого кардинала не существует, положим $\chi(\Gamma) = \infty$. Очевидно, $\chi(\Gamma) = \infty$ тогда и только тогда, когда граф Γ имеет петлю. Неравенство $\chi(\Gamma) \geqslant \omega$ (и выражение «хроматическое число графа Γ бесконечно») означает, что $\chi(\Gamma)$ есть бесконечный кардинал или ∞. Если это условие не выполняется — мы говорим, что хроматическое число графа Γ конечно.

Понятия хроматического числа графа $\Gamma = (V, E)$ и хроматического числа алгебраической структуры $\mathfrak{M} = (X; R)$, где $R \subseteq X^2$, легко сводимы друг к другу. Легко проверить, что имеет место следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть даны алгебраическая структура* $\mathfrak{A} = (X; R)$, *где* $R \subseteq X^2$, *и граф* $\Gamma = (X, E)$, *где* $E = \{\{x, y\} \in \mathscr{P}(X) : R(x, y)\}$.[1] *Тогда* $\chi(\Gamma) = \chi(\mathfrak{A})$.

Пусть дано натуральное число $n \geqslant 1$, множества X, Y и $Z \subseteq X^n$, подпоследовательности $\tau = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ и $\sigma = (j_1, j_2, \ldots, j_l)$ последовательности $(1, 2, \ldots, n)$ и функции $f : X^k \to Y$ и $g : X^l \to Y$. Определим неориентированный граф $\Gamma(n, \tau, \sigma, f, g, Z)$ с множеством вершин Z и множеством ребер, состоящим из всех таких одно- и двухэлементных множеств $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)\}$, что

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in Z, \quad (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in Z$$
$$\text{и} \quad f(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}) = g(b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}).$$

[1] Алгебраическую структуру $\mathfrak{A} = (X; R)$, где $R \subseteq X^2$, можно воспринимать как ориентированный граф. Тогда граф Γ получается из графа $\mathfrak{A}$ дезориентацией его ребер.

Теорема 4. *Пусть дано натуральное число $n \geqslant 1$, множества X, Y, подпоследовательности $\tau = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ и $\sigma = (j_1, j_2, \ldots, j_l)$ последовательности $(1, 2, \ldots, n)$ и функции $f : X^k \to Y$ и $g : X^l \to Y$. Пусть также дана последовательность ультрафильтров $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n$ (не обязательно различных) и произвольный элемент Z ультрафильтра $\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 \times \ldots \times \mathfrak{u}_n$. Пусть выполнено равенство*

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}_{i_1}, \mathfrak{u}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{u}_{i_k}) = \widetilde{g}(\mathfrak{u}_{j_1}, \mathfrak{u}_{j_2}, \ldots, \mathfrak{u}_{j_l}).$$

Тогда хроматическое число графа $\Gamma(n, \tau, \sigma, f, g, Z)$ бесконечно.

Доказательство. Определим функции $h_1, h_2 : X^n \to Y$ равенствами:

$$h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$$
$$\text{и} \quad h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_l})$$

для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Из теоремы 1 легко следует, что для всех ультрафильтров $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_n \in \beta X$ выполнены равенства:

$$\widetilde{h}_1(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_n) = \widetilde{f}(\mathfrak{v}_{i_1}, \mathfrak{v}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{v}_{i_k})$$
$$\text{и} \quad \widetilde{h}_2(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_n) = \widetilde{g}(\mathfrak{v}_{j_1}, \mathfrak{v}_{j_2}, \ldots, \mathfrak{v}_{j_l}).$$

По предложению 1 имеем

$$\widehat{h}_1(\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 \times \ldots \times \mathfrak{u}_n) = \widehat{h}_2(\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 \times \ldots \times \mathfrak{u}_n).$$

Остается применить следствие 1, теорему 3 и предложение 2. □

Из теоремы 4 следует, что каждое равенство, выполненное в ультрарасширении произвольной алгебраической структуры $\mathfrak{M}$, дает нам некоторый граф с бесконечным хроматический числом.

Граф $\Gamma = (V, E)$ называется *графом без треугольников*, если для любых его трех вершин v_1, v_2, v_3 по крайней мере одно из множеств $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_3\}$ не принадлежит множеству его ребер. В частности, граф без треугольников не содержит петель.

Дальнейшие результаты посвящены задаче построения конечных графов без треугольников с произвольно большим конечным хроматическим числом. В силу теоремы де Бруина–Эрдёша [23] имеет место следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть Γ есть граф без треугольников с бесконечным хроматическим числом. Тогда существует возрастающая (по отношению «быть подграфом») последовательность $\{\Gamma_n\}_{n<\omega}$ конечных подграфов графа Γ (очевидно, также являющихся графами без треугольников) с условием $\lim\limits_{n\to\infty} \chi(\Gamma_n) = \infty$.*

Поэтому для решения задачи достаточно строить графы Γ без треугольников с бесконечным хроматическим числом. Для этого можно использовать весьма простые частные случаи теоремы 4.

Пусть *id* обозначает тождественное отображение из X в X. Для каждой функции $f : X^2 \to X$ обозначим для краткости графы $\Gamma(2, (1, 2), (1), f, id, X^2)$ и $\Gamma(2, (1, 2), (2), f, id, X^2)$ символами Γ^l_f и Γ^r_f.

Таким образом, граф Γ^l_f (граф Γ^r_f) – это неориентированный граф, множество вершин которого есть X^2, и пара вершин (a_1, a_2) и (b_1, b_2) связаны ребром тогда и только тогда, когда $f(a_1, a_2) = b_1$ или $f(b_1, b_2) = a_1$ (соответственно, $f(a_1, a_2) = b_2$ или $f(b_1, b_2) = a_2$).

Следствие 2. *Пусть дана полугруппа $\mathfrak{G} = (X, \circ)$ и функция $* : X^2 \to X$. Если для всех $x, y, z \in X$ выполнены условия:*

1) $(x * y) * z = x * (y \circ z)$,

2) $x * y \neq x$,

то Γ^l_* есть граф без треугольников с бесконечным хроматическим числом.

Аналогично, если для всех $x, y, z \in X$ выполнены условия:

3) $x * (y * z) = (x \circ y) * z$,

4) $x * y \neq y$,

то Γ^r_* есть граф без треугольников с бесконечным хроматическим числом.

Доказательство. Пусть выполнены условия 1 и 2. Хорошо известно (см., напр., [16]), что ультрарасширение $\widetilde{\mathfrak{G}}$ содержит идемпотент, т. е. такой ультрафильтр $\mathfrak{v}$, что

$$\mathfrak{v} \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{v} = \mathfrak{v}.$$

Выберем произвольный идемпотент $\mathfrak{v} \in \beta X$ и положим $\mathfrak{u} = \mathfrak{v} \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{v}$. По теореме 1 тождество $(x * y) * z = x * (y \circ z)$ сохраняется при переходе к ультрарасширению, т. е. для всех $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ выполнено

$$(\mathfrak{u} \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{v}) \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{w} = \mathfrak{u} \mathbin{\widetilde{*}} (\mathfrak{v} \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{w}).$$

Поэтому

$$\mathfrak{u} \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{v} = (\mathfrak{v} \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{v}) \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \mathbin{\widetilde{*}} (\mathfrak{v} \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{v}) = \mathfrak{v} \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{v} = \mathfrak{u}.$$

По теореме 4 граф $\Gamma^l_\circ$ и имеет бесконечное хроматическое число.

Проверим, что граф Γ^l_* есть граф без треугольников (и петель). Допустим обратное. Тогда существуют пары (x_1, x_2), (x_3, x_4) и (x_5, x_6) из X^2, для которых

$$x_1 * x_2 = x_3, \quad x_3 * x_4 = x_5$$

и либо (а) $x_1 * x_2 = x_5$, либо (б) $x_5 * x_6 = x_1$. В случае (а) приходим к равенству $x_3 * x_4 = x_3$, а в случае (б) — к равенству $x_1 * (x_2 \circ x_4 \circ x_6) = x_1$, которые противоречат условию.

Оставшаяся часть утверждения доказывается аналогично. □

Пользуясь следствием 2, можно построить следующие примеры:

1. Пусть $\mathfrak{G} = (X, \circ)$ есть полугруппа, удовлетворяющая условию $x \circ y \neq x$ (условию $x \circ y \neq y$) для всех $x, y \in X$. Тогда граф $\Gamma^l_\circ$ (соответственно, граф $\Gamma^r_\circ$) есть граф без треугольников с бесконечным хроматическим числом (надо положить $* = \circ$ и воспользоваться ассоциативностью операции $\circ$). В качестве конкретных примеров графов без треугольников с бесконечным хроматическим числом можно взять графы $\Gamma^l_\circ$ и $\Gamma^r_\circ$ для операции $\circ$ сложения на множестве $\omega \setminus 1$ или умножения на множестве $\omega \setminus 2$.

2. Пусть exp есть операция возведения в степень на множестве $\omega \setminus 2$: $\exp(x, y) = x^y$. Тогда граф $\Gamma^l_{\exp}$ есть граф без треугольников с бесконечным хроматическим числом (это следует из того факта, что операция возведения в степень удовлетворяет тождеству $(x^y)^z = x^{yz}$).

3. Для каждого натурального числа k определим функцию $f_k : (\omega \setminus 1)^2 \to \omega \setminus 1$ равенством $f(x, y) = kx + y$. Тогда для каждого положительного натурального числа k граф $\Gamma^r_{f_k}$ есть граф без треугольников с бесконечным хроматическим числом (это следует из того, что функция f удовлетворяет тождеству $f(x, f(y, z)) = f(x + y, z)$).

Заметим, что получающиеся таким образом графы в некотором смысле противоположны графам Мычельского. Напомним, что графы Мычельского сторятся с помощью следующей операции Мычельскиана, см. [3]. Пусть $\Gamma = (V, E)$ есть неориентированный граф, и пусть фиксировано некоторое биективное отображение $v \mapsto v'$, которое отображает множество V на некоторое множество V', для которого $V \cap V' = \varnothing$. *Мычельскиан* $M(\Gamma)$ графа Γ есть граф с множеством вершин $V \cup V' \cup \{\alpha\}$, где $\alpha \notin V \cup V'$ и множеством ребер:

$$E \cup \{\{x, v'\} : \{x, v\} \in E\} \cup \{\{x, \alpha\} : x \in V'\}.$$

Если граф Γ не содержит треугольников, то и граф $M(\Gamma)$ не содержит треугольников. При этом $\chi(M(\Gamma)) = \chi(\Gamma) + 1$. Таким образом, стартуя, допустим, с одновершинного графа Γ_1 без ребер можно получить последовательность графов без треугольников $\Gamma_2 = M(\Gamma_1)$, $\Gamma_3 = M(\Gamma_2)$, ... с условием $\lim\limits_{n\to\infty} \chi(\Gamma_n) = \infty$.

Функция $* : X^2 \to X$ называется левосократимой (правосократимой), если для всех $x, y, z \in X$ равенство $x * y = x * z$ (соответственно, равенство $y * x = z * x$) влечет равенство $y = z$.

Теорема 5. *Пусть дана полугруппа $\mathfrak{G} = (X, \circ)$ и левосократимая (правосократимая) функция $* : X^2 \to X$, которые удовлетворяют условиям 1 и 2 (соотвественно, условиям 3 и 4) следствия 2. Тогда каждый подграф Γ_1 графа $\Gamma = \Gamma^l_*$ (соответственно, графа $\Gamma = \Gamma^r_*$), изоморфный мычельскиану некоторого графа Γ_0, имеет хроматическое число не более 3.*

Доказательство. Пусть функция $*$ левосократимая и выполнены условия 1 и 2 следствия 2.

Факт 1. *Если граф Γ содержит цикл длины 4, то не существует таких трех вершин (x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6) из этого цикла, что*

$$x_1 * x_2 = x_3 \text{ и } x_3 * x_4 = x_5.$$

Доказательство. Пусть, напротив, такие три вершины существуют, и (x_7, x_8) есть четвертая вершина данного цикла (отличная от этих трех вершин). Имеет место один из следующих случаев:

(а) $x_5 * x_6 = x_7$ и $x_7 * x_8 = x_1$;

(b) $x_5 * x_6 = x_7$ и $x_1 * x_2 = x_7$;

(c) $x_7 * x_8 = x_5$ и $x_7 * x_8 = x_1$;

(d) $x_7 * x_8 = x_5$ и $x_1 * x_2 = x_7$.

Случаи (a), (b) и (c) противоречат условию 2 следствия 2. Действительно, в случае (a) имеем:

$$x_1 = (((x_1 * x_2) * x_4) * x_6) * x_8 = x_1 * (x_2 \circ x_4 \circ x_6 \circ x_8),$$

в случае (b) имеем:

$$x_1 * x_2 = ((x_1 * x_2) * x_4) * x_6 = (x_1 * x_2) * (x_4 \circ x_6),$$

а в случае (c) имеем:

$$x_7 * x_8 = ((x_7 * x_8) * x_2) * x_4 = (x_7 * x_8) * (x_2 \circ x_4).$$

Наконец, в случае (d) имеем $x_3 = x_7$ и, далее, $x_3x_4 = x_3x_8$. Используя левосократимость операции $*$, получаем $x_4 = x_8$. Значит, $(x_3, x_4) = (x_7, x_8)$, противоречие с предположением. □

Пусть граф Γ содержит подграф Γ_1, изоморфный мычельскиану некоторого графа Γ_0. Заметим, что мычельскиан любого графа Γ_0, содержащего цепь из последовательных вершин v_1, v_2, v_3, содержит цикл длины 4 из последовательных вершин v_1, v_2, v_3, v_2'. Тогда из факта 1 следует, что ребра графа Γ_0 можно ориентировать так, чтобы полученный ориентированный граф не содержал подграфов вида

Легко проверить, что никакой цикл нечетной длины не допускает такой ориентации. Следовательно, граф Γ_0 не имеет циклов нечетной длины и, следовательно, имеет хроматическое число не более 2. Значит, хроматическое число графа Γ_1 не более 3.

Симметричное утверждение доказывается аналогично.

□

Замечания. *Можно заметить, что результат теоремы 5, вообще говоря, не улучшаемый. Например, граф Γ_+^l, где $+$ есть операция сложения натуральных чисел на $\omega \setminus 1$, содержит подграф изоморфный мычельскиану трехвершинного графа с двумя ребрами (и имеющий, следовательно, хроматическое число 3). Еще одно замечание состоит в том, что теорема 5 остается верна, если в ее формулировке заменить мычельскиан на произвольный обобщенный мычельскиан μ_k, $k \geqslant 1$. Для любого натурального числа $k \geqslant 1$ и графа $\Gamma = (V, E)$ обобщенный k-мычельскиан $\mu_k(\Gamma)$ графа Γ определяется следующим образом. Пусть фиксированы биективные отображения $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$, заданные на множестве V, такие что σ_0 есть тождественное отображение, и $\operatorname{ran}\sigma_i \cap \operatorname{ran}\sigma_j \neq \varnothing \Rightarrow i = j$ для всех $i, j \leqslant k$. Пусть также фиксирован некоторый элемент $u \notin \bigcup_{i \leqslant k} \operatorname{ran}\sigma_i$. Тогда множество вершин графа $\mu_k(\Gamma)$ есть $\bigcup_{i \leqslant k} \operatorname{ran}\sigma_i \cup \{u\}$, а множество ребер есть*

$$E \cup \bigcup_{i<k} \{(\sigma_i(a), \sigma_{i+1}(b)) : (a, b) \in E\} \cup \{(c, u) : c \in \operatorname{ran}\sigma_k\}.$$

Легко заметить, что при $k \geqslant 1$ граф $\mu_k(\Gamma)$ обладает тем же свойством, что и граф $M(\Gamma)$: если Γ_0 содержит цепь из последовательных вершин v_1^0, v_2^0, v_3^0, то $\mu_k(\Gamma_0)$ содержит цикл длины 4 из последовательных вершин $v_1^0, v_2^0, v_3^0, \sigma_1(v_2)$.

ДИСКУССИЯ

Многие классические задачи теории Рамсея сводятся к установлению бесконечности хроматического числа некоторых алгебраических структур $(X; R)$. Например, свойство Шура[2] для функции $f : X^2 \to X$ равносильно условию $\chi(\mathfrak{A}) \geqslant \omega$, где $\mathfrak{A} = (X; R)$ и R есть график функции f, а теорема Ван дер Вардена равносильна условию $(\forall n \in \omega \setminus 3)\, \chi(\mathfrak{A}_n) \geqslant \omega$, где $\mathfrak{A}_n = (\omega; R_n)$ и R_n состоит из всех арифметических прогрессий длины n. Теорема 3 связывает условие $\chi(\mathfrak{A}) \geqslant \omega$ с алгебраическими свойствами структуры $\mathfrak{A}^*$, что дает надежду на получение дальнейших результатов в этой области.

Конструкция графов Γ вида Γ_f^l и Γ_f^r выглядит простой и естественной, что наталкивает на дальнейшее изучение хроматических свойств этих графов. Верно ли, что для каждой функции $f(x, y) = kx + ly$ на $\omega \setminus 1$, где $k, l \in \omega \setminus 1$, графы

[2]Функция $f : X^2 \to X$ обладает *свойством Шура*, если для любого конечного разбиения $\mathcal{P}$ множества X существует такой элемент $Z \in \mathcal{P}$, что $\{a, b, f(a, b)\} \subseteq Z$ для некоторых $a, b \in X$. Свойство Шура для операции сложения натуральных чисел установлено в [24]. Любая ассоциативная функция обладает свойством Шура. Этот факт можно без вывести из теоремы Рамсея; кроме того, он немедленно следует из теоремы Хиндмана, см. [16]. В общем случае вопрос значительно труднее. Свойство Шура для экспоненты на $\omega \setminus 2$ доказано в [25].

Γ^l_f и Γ^r_f имеют бесконечные хроматические числа? Существует ли функция $f : X^2 \to X$, для которой выполнено свойство Шура, но не выполнено ни одно из условий $\chi(\Gamma^l_f) \geqslant \omega$ и $\chi(\Gamma^r_f) \geqslant \omega$, и наоборот?

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит Дениса Игоревича Савельева за плодотворное обсуждение результатов данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *P. Erdős*, Graph Theory and Probability. Canadian Journal of Mathematics, 11, 34–38 (1959).
2. *А.А. Зыков,* О некоторых свойствах линейных комплексов. Математический сборник, 24 (66), 163–188 (1949).
3. *J. Mycielski,* Sur le coloriage des graphs. Colloquium Mathematicum 3, 161–162 (1955).
4. *M. Shtibitz,* Beitrage zur Theorie der farbungskritschen Graphen. Technische Universitat Ilmenau, Habilitation Thesis (1985).
5. *L. Lovász,* Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 25 (3), 319–324 (1978).
6. *J.E. Greene,* A new short proof of Kneser's conjecture. American Mathematical Monthly, 109 (10), 918–920 (1978).
7. *J. Matoušek,* A combinatorial proof of Kneser's conjecture. Combinatorica, 24 (1), 163–170 (2004).
8. *J.P. Burling,* On coloring problems of families of prototypes. Boulder: University of Colorado, PhD thesis (1965).
9. *A. Pawlik, J. Kozik, et al,* Triangle-free intersection graphs of line segments with large chromatic number. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 105(5), 6–10 (2014).
10. *L. Lovász,* On chromatic number of finite set–systems. Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 19, 59–67 (1968).
11. *P. O'Donnell*, Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. I. Graph description. Geombinatorics, 9 (3), 145–152 (2000).
12. *P. O'Donnell*, Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. II. Graph embedding. Geombinatorics, 9 (4), 180–193 (2000).
13. *A.M. Raigorodskii*, Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters. Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. AMS. Contemp. Math., 625, 93–109 (2014).
14. *N. Alon, A. Kupavskii*, Two notions of unit distance graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 125, 1–17 (2014).
15. *W.W. Comfort, S. Negrepontis*, The theory of ultrafilters. Springer, Berlin (1974).
16. *N. Hindman, D. Strauss,* Algebra in the Stone–Cech Compactification. 2nd ed., revised and expanded, W. de Gruyter, Berlin–N.Y. (2012).
17. *V. Goranko,* Filter and ultrafilter extensions of structures: universal-algebraic aspects. Preprint (2007).
18. *D.I. Saveliev,* Ultrafilter extensions of models. Lecture Notes in AICS, 6521, 162–177 (2011).
19. *D.I. Saveliev,* On ultrafilter extensions of models. In: S.-D. Friedman et al. (eds.). The Infinity Project Proc. CRM Documents 11, Barcelona, 599–616 (2012).
20. *N.L. Poliakov, D.I. Saveliev,* On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations. Arch. Math. Logic 60, 625–681 (2021).
21. *N.L. Polyakov,* On the Canonical Ramsey Theorem of Erdos and Rado and Ramsey Ultrafilters. Dokl. Math. 108, 392–401 (2023).
22. *B. Jónsson, A. Tarski,* Boolean algebras with operators. Part I: Amer. J. Math. 73 (4), 891–939 (1951); Part II: ibid. 74 (1), 127–162 (1952).
23. *N.G. de Bruijn, P. Erdős,* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. Proceedings of the Section of Sciences of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series A, mathematical sciences, 54(5), 371–373 (1951).
24. *I. Shur,* Über die Kongruenz $x^m + y^m = z^m \pmod p$. Jahresber. Deutsche Math.-Verein. 25, 114–116 (1916).
25. *A. Sisto*, Exponential Triples. The Electronic Journal of Combinatorics, 18 (1), P147 (2011).

ON A COMBINATORIAL APPLICATION OF ULTRAFILTER THEORY: A NEW CONSTRUCTION OF TRIANGLE-FREE GRAPHS WITH ARBITRARILY LARGE CHROMATIC NUMBER

N. L. Polyakov[a]

[a] *HSE University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A. L. Semenov

The paper describes a new method for constructing triangle-free graphs with an arbitrarily large chromatic number. The method is substantiated using properties of various types of ultrafilter extensions of functions and predicates.

Keywords: graph, triangle-free graph, chromatic number, ultrafilter, ultrafilter extension