

Памяти С. М. Натанзона

СТРУКТУРА АЛГЕБР ТИПОВ ПЕРЕХОДОВ И ОПЕРАТОР ТРАНСПОЗИЦИИ

© Е. С. КРАСИЛЬНИКОВ

Простые вещественные числа Гурвица перечисляют вещественные мероморфные функции на вещественных алгебраических кривых, все конечные критические значения которых простые. М. Э. Казарян, С. К. Ландо и С. М. Натанзон построили алгебры типов переходов, для которых эти числа являются структурными константами, и вывели уравнения транспозиции на производящие функции для них. В настоящей статье изучается структура алгебр типов переходов и разрабатываются подходы к эффективному вычислению простых вещественных чисел Гурвица.

§1. Введение

Восходящая к А. Гурвицу [3] теория комплексных чисел Гурвица, перечисляющих разветвленные накрытия комплексной проективной прямой (мероморфные функции на алгебраических кривых) с предписанными данными ветвления, по мнению автора, в последние десятилетия превратилась в одну из центральных областей математики. В ней сошлись такие по видимости далекие друг от друга темы как геометрия пространств модулей комплексных кривых [1], теория интегрируемых систем математической физики [12, 6], теория представлений симметрических групп [2, 12].

Одно из естественных направлений развития теории Гурвица — ее расширение на случай вещественных разветвленных накрытий проективной прямой, т.е. на перечисление мероморфных функций на вещественных

Ключевые слова: вещественные числа Гурвица, представления симметрических групп, оператор транспозиции.

Работа выполнена при поддержке Международной лаборатории кластерной геометрии НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ, договор № 075-15-2021-608 от 08.06.2021.

алгебраических кривых, эквивариантных относительно комплексного сопряжения. Попытки такого распространения были предприняты в [11, 4, 7]. Однако развитие вещественной версии теории существенно отстает от ее комплексного варианта. Среди наиболее существенных трудностей, встречающихся на этом пути, — отсутствие понимания того, чем заменить в вещественной теории групповые алгебры симметрических групп, их центры и функции Шура, играющие ключевую роль в комплексной теории.

Как показали Я. Гульден и Д. Джексон [2], производящая функция $H^\circ = H^\circ(u; p_1, p_2, \dots)$ для простых чисел Гурвица (т.е. чисел Гурвица, перечисляющих разветвленные накрытия проективной прямой с простыми ветвлениями над всеми точками ветвления, за исключением, быть может, одной), удовлетворяет уравнению в частных производных первого порядка вида

$$\frac{\partial H^\circ}{\partial u} = W H^\circ,$$

где через W обозначен линейный однородный дифференциальный оператор второго порядка

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1} \left((i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right)$$

от переменных p_i , $i = 1, 2, \dots$, называемый оператором транспозиции (или оператором cut-&-join). Этот оператор является самосопряженным относительно естественного скалярного произведения на пространстве квазиоднородных многочленов степени n от переменных p_i для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$. Последнее пространство, в свою очередь, естественно отождествляется с центром групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ симметрической группы. А. Окуньков [12] доказал, что многочлены Шура от переменных p_i являются собственными многочленами оператора W , вычислил соответствующие собственные числа и вывел отсюда, что функция H° является однопараметрическим семейством τ -функций для иерархии Кадомцева–Петвиашвили уравнений в частных производных. Этот результат подчеркивает ключевую роль многочленов Шура в комплексной теории Гурвица.

Отметим, что все собственные числа оператора транспозиции рациональны, как и коэффициенты многочленов Шура, и известны эффективные методы вычисления многочленов Шура, что позволяет, в свою очередь, эффективно вычислять простые комплексные числа Гурвица. Действительно, в базисе из многочленов Шура оператор транспозиции диагонален, с известными элементами на диагонали, и производящую функцию H° можно вычислять как результат применения экспоненты диагонального оператора uW к известным начальным условиям.

Отметим также, что логарифм $H = \log H^\circ$ производящей функции H° является производящей функцией для связных простых чисел Гурвица, перечисляющих разветвленные накрытия сферы связными поверхностями (утверждение о том, что экспоненциальная производящая функция для *связных* помеченных объектов является логарифмом экспоненциальной производящей функции для помеченных объектов — общий факт, см., например, [9]); в частности, эффективное вычисление простых чисел Гурвица позволяет эффективно вычислять и связные простые числа Гурвица.

Простые *вещественные* числа Гурвица перечисляют вещественные мероморфные функции с заданными порядками полюсов и данным набором вещественных критических значений, все из которых являются простыми. В [11] и [7] аналоги уравнения транспозиции выведены для двух различных вариантов простых вещественных чисел Гурвица, перечисляющих, соответственно, накрытия общими и разделяющими вещественными кривыми. Вещественная алгебраическая кривая называется *общей* или *разделяющей* в зависимости от того, связно или несвязно дополнение к вещественной части этой кривой. Так же, как и в комплексной ситуации, оператор транспозиции в этих случаях самосопряжен относительно естественного скалярного произведения, а значит, имеет собственный базис и диагонализируем в нем. Однако как собственные числа, так и коэффициенты полиномов, реализующих собственный базис оператора транспозиции, уже не являются, как правило, рациональными числами. Это — вещественные алгебраические корни характеристических многочленов ограничения оператора транспозиции на подпространства квазиоднородных многочленов данной степени n .

В случае комплексных накрытий оператор транспозиции можно интерпретировать как оператор умножения на некоторый фиксированный элемент центра групповой алгебры симметрической группы (класс транспозиции, что и объясняет его название). Цель настоящей работы — дать аналогичную интерпретацию оператора транспозиции в вещественном случае, что позволяет прояснить его структуру и, соответственно, структуру вещественных чисел Гурвица. Заметим, что для связных чисел Гурвица в комплексной ситуации имеется формула, связывающая их с теорией пересечения на пространствах модулей комплексных кривых [1]. Было бы крайне интересно найти аналог этой формулы в вещественной ситуации, и мы надеемся, что предлагаемое алгебраическое описание может способствовать продвижению в этом направлении.

Напомним основы подхода к построению вещественных чисел Гурвица. В [7] вводятся простые чисто вещественные числа Гурвица $h_{m;\mu}^{\mathbb{R}\circ}$, перечисляющие вещественные мероморфные функции на оснащенных разделяющих вещественных кривых с типом ветвления $\mu = (\kappa^+, \kappa^-, \lambda)$ над бесконечностью и m данными невырожденными вещественными значениями; $h_{m;\mu}^{\mathbb{R}}$ — простые чисто вещественные числа Гурвица, отвечающие вещественным мероморфным функциям со связной областью определения. Тип ветвления μ над бесконечностью для вещественной мероморфной функции определяется следующим образом. Всякий прообраз бесконечности (полюс) либо является чисто вещественным, либо имеет ненулевую мнимую часть; полюсы с ненулевой мнимой частью разбиваются на пары комплексно сопряженных. Каждому чисто вещественному полюсу сопоставим знак $+$ или $-$ в зависимости от того, возрастает или убывает функция слева от этого полюса на вещественной части кривой (ориентация вещественной части кривой индуцируется комплексной ориентацией самой кривой). Порядки положительных (соответственно, отрицательных) полюсов образуют разбиение κ^+ (соответственно, κ^-). Порядки полюсов с положительной мнимой частью образуют разбиение λ . Вещественное число Гурвица $h_{m;\mu}^{\mathbb{R}\circ}$ определяется как

$$h_{m;\mu}^{\mathbb{R}\circ} = \sum_f \frac{1}{|\text{Aut}(f)|},$$

где суммирование идет по всем функциям f с типом ветвления над бесконечностью μ и m простыми предписанными критическими значениями, а через $|\text{Aut}(f)|$ обозначен порядок группы автоморфизмов функции f .

Сопоставим типу ветвления

$$\mu = (\kappa^+, \kappa^-, \lambda) = ((k_1^+, k_2^+, \dots), (k_1^-, k_2^-, \dots), (l_1, l_2, \dots))$$

моном $p_\mu = p_{k_1^+}^+ p_{k_2^+}^+ \cdots p_{k_1^-}^- p_{k_2^-}^- \cdots q_1 q_2 \cdots$ от переменных p_k^+, p_k^-, q_k , $k = 1, 2, \dots$. Так, типу ветвления $\mu = ((3, 2, 2, 1), (1, 1, 1), (2))$ соответствует моном $p_3^+ (p_2^+)^2 p_1^+ (p_1^-)^3 q_2$. Коэффициент $h_{m;\mu}^{\mathbb{R}\circ}$ при мономе $p_\mu u^m / m!$ равен количеству вещественных накрытий проективной прямой разделяющими вещественными кривыми с ветвлением типа μ над бесконечностью и m простыми вещественными точками ветвления.

Введем производящие функции

$$H^{\mathbb{R}}(u; p_1^+, \dots, p_1^-, \dots, q_1, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h_{m;\mu}^{\mathbb{R}} p_\mu \frac{u^m}{m!},$$

$$H^{\mathbb{R}\circ}(u; p_1^+, \dots, p_1^-, \dots, q_1, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h_{m;\mu}^{\mathbb{R}\circ} p_\mu \frac{u^m}{m!},$$

суммирования в правых частях равенств идут по всем разбиениям $\mu = (\kappa^+, \kappa^-, \lambda)$ и по всем значениям m .

Теорема 1 ([7]). *Производящая функция $H^{\mathbb{R}^\circ}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial H^{\mathbb{R}^\circ}}{\partial u} = W^+(H^{\mathbb{R}^\circ}),$$

где

$$W^+ = \sum_{i,j=1}^{\infty} \left(p_i^{\bar{i}} p_j^+ \frac{\partial}{\partial p_{i+j}^{\bar{i}}} + p_{i+j}^{\bar{i}} \frac{\partial^2}{\partial p_i^{\bar{i}} \partial p_j^+} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(i p_{2i}^+ \frac{\partial}{\partial q_i} + q_i \frac{\partial}{\partial p_{2i}^+} \right);$$

для натурального i через \bar{i} обозначен знак $+$, если число i четное, и знак $-$, если нечетное.

В §3 мы описываем разложение оператора транспозиции в прямую сумму операторов, отвечающих изотипическим разложениям представлений произведений двух симметрических групп. Мы показываем, что такие операторы в подходящем базисе записываются целочисленными матрицами и даем явные способы вычисления этих матриц. Случай необязательно разделяющих вещественных кривых изучается в [11] — для чисел Гурвица $\tilde{h}_{m;\mu}^{\mathbb{R}}$, $\tilde{h}_{m;\mu}^{\mathbb{R}^\circ}$ и соответствующих производящих функций $\tilde{H}^{\mathbb{R}}$, $\tilde{H}^{\mathbb{R}^\circ}$. Мы напомним соответствующие результаты в §2 и описываем в этом разделе блочное разложение соответствующего оператора транспозиции.

Автор благодарен М. Э. Казаряну, поделившемуся результатами своих компьютерных экспериментов и указавшему на возможные подходы к доказательству сделанных на их основе гипотез. Автор также благодарен С. К. Ландо за постоянное внимание к работе.

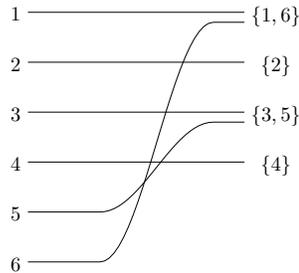
§2. Случай необязательно разделяющих вещественных кривых

В [11] выведено уравнение транспозиции для вещественных простых чисел Гурвица на общих (вообще говоря, не разделяющих) вещественных кривых. Мы напоминаем это уравнение в п. 2.3. В [7] введена алгебра типов переходов и дана интерпретация дифференциального оператора в правой части уравнения транспозиции как оператора умножения на класс транспозиции в этой алгебре. Исходной точкой для построения алгебры типов переходов является пространство состояний V_n , порожденное инволюциями на n -элементном множестве. Группа перестановок S_n действует на этом множестве, а значит, и на пространстве V_n . Алгебра переходов T_n представляет собой тензорный квадрат пространства состояний; умножение в ней задается композицией переходов. Алгебра T_n служит аналогом

групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ симметрической группы в случае вещественных накрытий. В свою очередь, алгебра типов переходов A_n представляет собой S_n -инвариантную часть алгебры T_n и является аналогом центра групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ симметрической группы для случая вещественных накрытий.

В п. 2.1 мы описываем разложение представления группы S_n в пространстве V_n на неприводимые. Далее в п. 2.2 мы используем это разложение для построения разложения алгебры типов переходов A_n в прямую сумму матричных алгебр. Наконец, в п. 2.3 мы используем последнее разложение для получения блочного представления оператора транспозиции и вычисления его экспоненты.

2.1. Пространство состояний и представление группы S_n в нем. Обозначим через N_n конечное множество $N_n = \{1, \dots, n\}$. Назовём *состоянием* множества N_n инволюцию на нем, т.е. его разбиение на одноэлементные и двухэлементные подмножества. Мы будем использовать графическое представление состояний, в котором элементы множества N_n изображаются занумерованными отрезками кривых, и принадлежность двух элементов одной орбите инволюции изображается сближением концов соответствующих отрезков. Так, состояние $\{1, 6\}, \{2\}, \{3, 5\}, \{4\}$ множества N_6 имеет графическое представление



Множество состояний на множестве N_n обозначим через I_n . Как известно, количество элементов в этом множестве дается следующим предложением, см., например, [10].

Предложение 1. Производящая функция $\sum |I_n|t^n$ для количества элементов в множествах I_n представляется в виде непрерывной дроби

$$\begin{aligned} \sum |I_n|t^n &= \frac{1}{1-t-\frac{t^2}{1-t-\frac{2t^2}{1-t-\frac{3t^2}{1-t-\dots}}}} \\ &= 1 + t + 2t^2 + 4t^3 + 10t^4 + 26t^5 + 76t^6 + \dots \end{aligned}$$

Формальные линейные комбинации состояний на множестве N_n образуют *пространство состояний* V_n , $\dim V_n = |I_n|$. Здесь и далее в качестве основного поля выступает поле \mathbb{C} комплексных чисел.

Группа перестановок S_n действует на элементах базиса пространства V_n перенумерацией множества N_n . Это действие продолжается по линейности на всё пространство V_n и порождает тем самым представление группы S_n , которое мы будем обозначать через $\rho_n : S_n \rightarrow \text{Aut}(V_n)$.

Наша цель — разложить это представление на неприводимые: $V_n = \bigoplus_{\lambda} (\mathbb{C}^{k_{\lambda}} \otimes \lambda)$, где k_{λ} — кратность вхождения неприводимого представления $\lambda \vdash n$ в V_n . Пространство $\mathbb{C}^{k_{\lambda}}$ в этом разложении называется *изотипическим пространством* неприводимого представления λ . Мы хотим определить размерности k_{λ} этих изотипических пространств.

Обозначим через $V_{n,m}$ подпространство в V_n , порожденное состояниями $I_{n,m} \subset I_n$ с m одноэлементными и k двухэлементными подмножествами, $2k + m = n$, $V_n = \bigoplus_m V_{n,m}$. Заметим, что $\dim V_{n,m} = |I_{n,m}| = \frac{n!}{m!k!2^k}$. Действительно, стационарная подгруппа данной инволюции с m неподвижными точками при действии группы перестановок S_n на I_n изоморфна $S_m \times S_k \times S_2 \times \dots \times S_2$, произведению подгрупп, сохраняющих m -элементное подмножество неподвижных точек инволюции, k -элементное подмножество орбит длины 2 и подгрупп перестановок элементов внутри каждой орбиты длины 2; порядок стационарной подгруппы как раз и равен знаменателю формулы. Подпространство $V_{n,m}$ инвариантно относительно действия группы S_n ; представление группы S_n в этом пространстве обозначим через $\rho_{n,m} : S_n \rightarrow \text{Aut}(V_{n,m})$; представление ρ_n является прямой суммой представлений $\rho_{n,m}$. Обозначим через $k_{m,\lambda}$ кратность вхождения неприводимого представления λ в представление $\rho_{n,m}$ группы S_n в пространстве $V_{n,m}$. Тем самым, $V_{n,m} = \bigoplus_{\lambda} (\mathbb{C}^{k_{m,\lambda}} \otimes \lambda)$ и $k_{\lambda} = \sum_m k_{m,\lambda}$.

Для вычисления кратностей $k_{m,\lambda}$ разложим характер представления $\rho_{n,m}$ по характерам неприводимых представлений группы S_n . Обозначим через $\chi_{n,m}$ характер представления группы S_n в пространстве $V_{n,m}$, т.е. отображение $\chi_{n,m} : S_n \rightarrow \mathbb{C}$, сопоставляющее каждой перестановке след представляющего ее элемента в $\text{Aut}(V_{n,m})$.

Введем многочлен Шура $X_{n,m}$ представления группы S_n в пространстве $V_{n,m}$, зависящий от набора переменных u_1, u_2, \dots, u_n :

$$\begin{aligned} X_{n,m}(u_1, u_2, \dots, u_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi_{n,m}(\sigma) u_{\text{cycl}(\sigma)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{Tr}_{V_{n,m}}(\rho_{n,m}(\sigma)) u_{\text{cycl}(\sigma)}, \end{aligned}$$

где для перестановки σ циклического типа $(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ через $u_{\text{cycl}(\sigma)}$ обозначен моном $u_{\sigma_1} u_{\sigma_2} \dots u_{\sigma_l}$ от переменных u_i .

Следующая теорема дает универсальный способ вычисления многочленов Шура $X_{n,m}$ представления группы S_n в пространстве $V_{n,m}$.

Теорема 2. *Многочлен Шура представления группы S_n в пространстве $V_{n,m}$ равен*

$$X_{n,m} = \mathcal{S}_m(u) \left(\mathcal{S}_{\frac{n-m}{2}}(v) \Big|_{v_k = \frac{u_{2k} + u_k^2}{2}} \right),$$

где через \mathcal{S}_k , $k = 0, 1, \dots$, обозначена функция Шура для одночастичного разбиения $(k) \vdash k$.

Доказательство. Обозначим через $I_{n,m}$ подмножество в I_n , состоящее из состояний на N_n с m одноэлементными множествами, $I_n = \sqcup_{m=0}^n I_{n,m}$. Отметим, что для данной перестановки σ величина $\text{Tr}_{V_{n,m}}(\sigma)$ равна числу состояний на N_n с m одноэлементными множествами, сохраняемых перестановкой σ . Отсюда

$$\begin{aligned} X_{n,m} &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{Tr}_{V_{n,m}}(\rho_{n,m}(\sigma)) u_{\text{cycl}(\sigma)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\substack{\alpha \in I_{n,m}, \\ \sigma(\alpha) = \alpha}} u_{\text{cycl}(\sigma)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in I_{n,m}} \sum_{\sigma \in \text{Stab}(\alpha)} u_{\text{cycl}(\sigma)}, \end{aligned}$$

где суммирование в последних двух строчках идет по всем состояниям α с m одноэлементными множествами. Заметим, что вклад состояния α не зависит от выбранного состояния. Поэтому результат суммирования по всем состояниям α с m одноэлементными множествами равен вкладу произвольного состояния $\alpha_0 \in I_{n,m}$, умноженному на количество таких состояний, т.е. на $|I_{n,m}| = \dim V_{n,m}$:

$$\frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in I_{n,m}} \sum_{\sigma \in \text{Stab}(\alpha)} u_{\text{cycl}(\sigma)} = \frac{\dim V_{n,m}}{n!} \sum_{\sigma \in \text{Stab}(\alpha_0)} u_{\text{cycl}(\sigma)}.$$

Группа $\text{Stab}(\alpha_0) \subset S_n$ имеет вид

$$S_m \times \left(S_{\frac{n-m}{2}} \times \underbrace{S_2 \times S_2 \times \dots \times S_2}_{\frac{n-m}{2} \text{ раз}} \right).$$

Здесь S_m переставляет m одноэлементных подмножеств состояния α_0 , $S_{\frac{n-m}{2}}$ переставляет орбиты инволюции длины 2, а каждая из групп S_2

– элементы внутри каждой такой орбиты. Поэтому

$$\sum_{\sigma \in \text{Stab}(\alpha_0)} u_{\text{cycl}(\sigma)} = \left(\sum_{\phi \in S_m} u_{\text{cycl}(\phi)} \right) \left(\sum_{\psi \in S_{\frac{n-m}{2}} \times S_2 \times \dots \times S_2} u_{\text{cycl}(\psi)} \right).$$

Первый множитель в правой части — не что иное, как функция Шура \mathcal{S}_m для одночастичного разбиения m , умноженная на $m!$:

$$\sum_{\phi \in S_m} u_{\text{cycl}(\phi)} = m! \mathcal{S}_m(u).$$

Положим $k = \frac{n-m}{2}$. Второй множитель в правой части приобретает вид

$$\sum_{\psi \in S_k \times S_2 \times \dots \times S_2} u_{\text{cycl}(\psi)} = \sum_{\substack{\mu \vdash k \\ \mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)}} |c_\mu| (u_{2\mu_1} + u_{\mu_1}^2) \dots (u_{2\mu_l} + u_{\mu_l}^2) 2^{\mu_1-1} \dots 2^{\mu_l-1},$$

где $|c_\mu|$ — количество перестановок типа μ в S_k . В самом деле, мы переставляем $2k$ элементов, сначала переставляя k пар, а затем элементы внутри каждой пары. Для части μ_i разбиения $\mu \vdash k$ внутри каждой из $\mu_i - 1$ пар элементы переставляются произвольно (множитель 2^{μ_i-1}), и в зависимости от выбора перестановки μ_i -ой пары мы получаем либо один цикл длины $2\mu_i$ (моном $u_{2\mu_i}$), либо два цикла длины μ_i (моном $u_{\mu_i}^2$).

Учитывая, что $k = \mu_1 + \dots + \mu_l$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\psi \in S_k \times S_2 \times \dots \times S_2} u_{\text{cycl}(\psi)} &= \sum_{\substack{\mu \vdash k \\ \mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)}} |c_\mu| \left(\frac{u_{2\mu_1} + u_{\mu_1}^2}{2} \right) \dots \left(\frac{u_{2\mu_l} + u_{\mu_l}^2}{2} \right) 2^k \\ &= 2^k k! \mathcal{S}_m(v) \Big|_{v_k = \frac{u_{2k} + u_k^2}{2}}. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$X_{n,m} = \frac{\dim V_{n,m}}{n!} m! \mathcal{S}_m(u) 2^k k! \mathcal{S}_m(v) \Big|_{v_k = \frac{u_{2k} + u_k^2}{2}}.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для размерности $\dim V_{n,m} = \frac{n!}{m! k! 2^k}$, получаем

$$X_{n,m} = \mathcal{S}_m(u) \mathcal{S}_m(v) \Big|_{v_k = \frac{u_{2k} + u_k^2}{2}},$$

что и требовалось. \square

Для всякого представления V группы S_n многочлен Шура представления раскладывается по базису из функций Шура неприводимых представлений $X_V(u) = \sum_{\lambda \vdash n} k_\lambda \mathcal{S}_\lambda(u)$, где коэффициенты k_λ суть кратности вхождения соответствующих неприводимых представлений в представление V . Таким образом, кратности $k_{m,\lambda}$ вхождений неприводимых представлений в представления в пространстве $V_{n,m}$ могут быть вычислены как коэффициенты разложения значения многочлена Шура $X_{n,m}$ по базису из функций Шура.

Следующие два предложения дают явные разложения характеров представлений $\rho_{2n,0}$ и $\rho_{2n-1,1}$ по неприводимым.

Предложение 2 ([5]). *Многочлен Шура представления группы S_n в пространстве состояний $V_{2n,0}$ равен $X_{2n,0} = \sum_{\lambda \vdash n} \mathcal{S}_{2\lambda}$.*

Вот многочлены Шура представлений в пространствах состояний для $n = 1, 2, 3, 4$:

$$X_{2,0} = \mathcal{S}_2,$$

$$X_{4,0} = \mathcal{S}_4 + \mathcal{S}_{22},$$

$$X_{6,0} = \mathcal{S}_6 + \mathcal{S}_{42} + \mathcal{S}_{222},$$

$$X_{8,0} = \mathcal{S}_8 + \mathcal{S}_{44} + \mathcal{S}_{62} + \mathcal{S}_{422} + \mathcal{S}_{2222}.$$

Предложение 3. *Многочлен Шура представления группы S_n в пространстве состояний $V_{2n-1,1}$ равен $X_{2n-1,1} = \sum_{\lambda \vdash 2n-1 \text{ с одной нечетной частью}} \mathcal{S}_\lambda$.*

Для начальных n :

$$X_{1,1} = \mathcal{S}_1,$$

$$X_{3,1} = \mathcal{S}_3 + \mathcal{S}_{21},$$

$$X_{5,1} = \mathcal{S}_5 + \mathcal{S}_{32} + \mathcal{S}_{41} + \mathcal{S}_{221},$$

$$X_{7,1} = \mathcal{S}_7 + \mathcal{S}_{43} + \mathcal{S}_{52} + \mathcal{S}_{61} + \mathcal{S}_{322} + \mathcal{S}_{421} + \mathcal{S}_{2221}.$$

Эти два предложения являются частными случаями следующего более общего утверждения.

Теорема 3. *Многочлен Шура представления группы S_n в пространстве состояний $V_{2k+m,m}$ равен $X_{2k+m,m} = \sum_{\lambda \vdash k} \sum_{\theta} \mathcal{S}_\theta$, где θ получается добавлением m клеток к диаграмме Юнга разбиения 2λ так, чтобы каждый столбец получившейся диаграммы содержал не более одной добавленной клетки.*

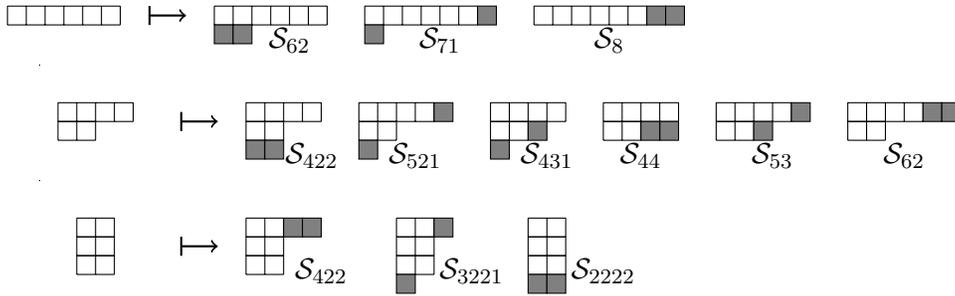
Доказательство. Формула Пьери — частный случай соотношения Литтлвуда-Ричардсона — утверждает, что $\mathcal{S}_\lambda \mathcal{S}_m = \sum_{\theta} \mathcal{S}_\theta$, где θ получается

добавлением m клеток к диаграмме Юнга разбиения λ так, чтобы каждый столбец получившейся диаграммы содержал не более 1 добавленной клетки.

Таким образом, $\sum_{\lambda \vdash k} \sum_{\theta} \mathcal{S}_{\theta} = \sum_{\lambda \vdash k} \mathcal{S}_{2\lambda} \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m X_{2k,0}$.

С другой стороны, согласно теореме 1 $X_{2k+m,m} = \mathcal{S}_m \mathcal{S}_k \Big|_{v_k = \frac{u_{2k} + u_k^2}{2}} = \mathcal{S}_m X_{2k,0}$, что и требовалось. \square

Теорема 3 дает простой и эффективный способ вычисления разложения представлений $V_{n,m}$ группы S_n на неприводимые. Например, для $k = 3$, $m = 2$ имеется три возможных разбиения λ числа k : (3) , (21) , (111) . Им соответствуют разбиения 2λ числа $2k$: (6) , (42) , (222) . Добавляя всеми возможными способами две клетки к диаграммам Юнга разбиений 2λ , мы получаем следующие диаграммы Юнга:



Просуммировав соответствующие полученным диаграммам Юнга многочлены Шура, получим

$$X_{8,2} = \mathcal{S}_8 + \mathcal{S}_{44} + \mathcal{S}_{53} + 2\mathcal{S}_{62} + \mathcal{S}_{71} + 2\mathcal{S}_{422} + \mathcal{S}_{431} + \mathcal{S}_{521} + \mathcal{S}_{2222} + \mathcal{S}_{3221}.$$

Вот ещё несколько примеров для $k = 2$:

$$X_{5,1} = \mathcal{S}_5 + \mathcal{S}_{32} + \mathcal{S}_{41} + \mathcal{S}_{221}$$

$$X_{6,2} = \mathcal{S}_6 + 2\mathcal{S}_{42} + \mathcal{S}_{51} + \mathcal{S}_{222} + \mathcal{S}_{321}$$

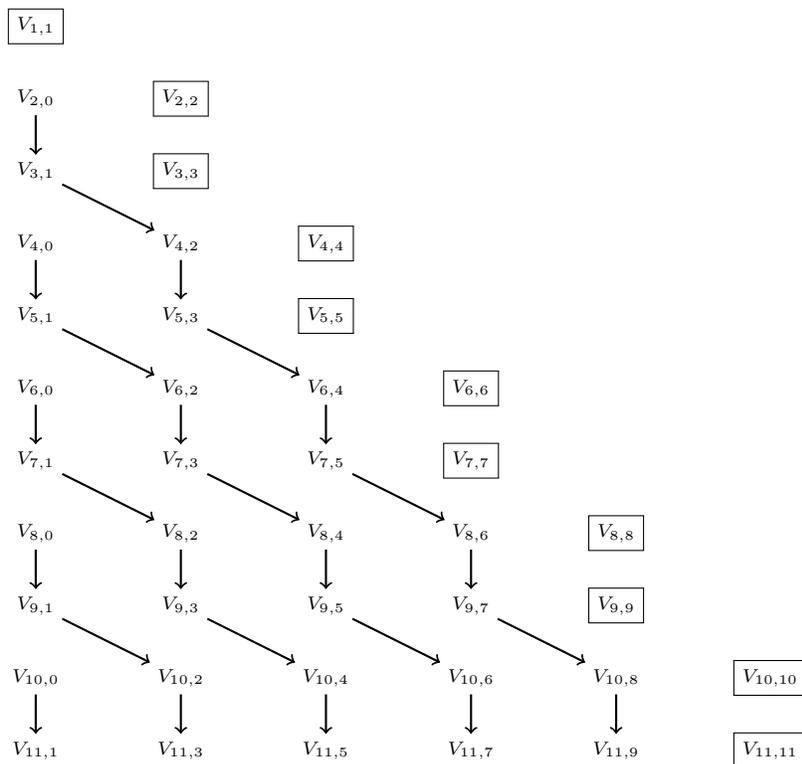
$$X_{7,3} = \mathcal{S}_7 + \mathcal{S}_{43} + 2\mathcal{S}_{52} + \mathcal{S}_{61} + \mathcal{S}_{322} + \mathcal{S}_{421}$$

$$X_{8,4} = \mathcal{S}_8 + \mathcal{S}_{44} + \mathcal{S}_{53} + 2\mathcal{S}_{62} + \mathcal{S}_{71} + \mathcal{S}_{422} + \mathcal{S}_{521}$$

$$X_{9,5} = \mathcal{S}_9 + \mathcal{S}_{54} + \mathcal{S}_{63} + 2\mathcal{S}_{72} + \mathcal{S}_{81} + \mathcal{S}_{522} + \mathcal{S}_{621}$$

Предложение 4. *Справедливо равенство $X_{n,n} = \mathcal{S}_n$.*

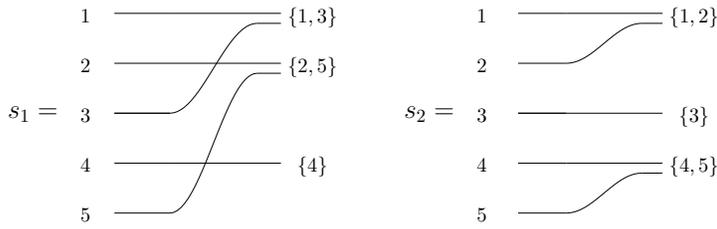
Предложенный способ разложения представлений $\rho_{n,m}$ группы S_n в прямую сумму неприводимых можно графически изобразить следующим образом:



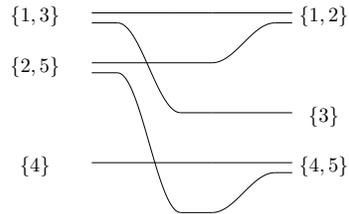
Стрелками обозначены последовательности вычислений по формуле теоремы 3 для фиксированного n , последовательно принимая $m = 0, 1, 2, \dots$. В рамку выделены пространства состояний, многочлены Шура представлений в которых вычисляются в соответствии с предложением 4. Пространства представлений $\rho_{n,m}$ при фиксированном n расположены в одну строку.

2.2. Алгебра типов переходов. В [7] вещественные числа Гурвица интерпретируются как структурные константы в алгебре типов переходов A_n , определяемой следующим образом.

Пусть s_1, s_2 — состояния на множестве N_n . *Переход* это пара состояний (s_1, s_2) . Мы изображаем переход графически в виде набора из n занумерованных отрезков кривых, левые концы которых склеены в соответствии с состоянием s_1 , а правые — в соответствии с состоянием s_2 . Так, например, для $n=5$ и



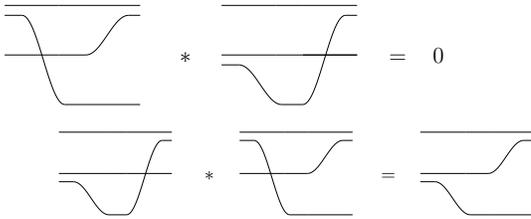
переход (s_1, s_2) имеет вид



Обозначим через T_n пространство переходов, т.е. пространство формальных линейных комбинаций переходов на множестве N_n . Это пространство изоморфно $V_n^{\otimes 2}$, и его размерность равна $(\dim V_n)^2 = |I_n|^2$. Зададим умножение на элементах базиса в пространстве T_n правилом

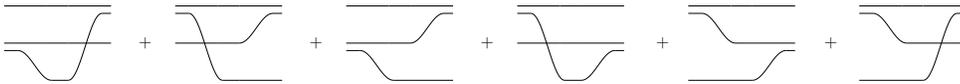
$$(s_l, s_r) * (s'_l, s'_r) = \begin{cases} (s_l, s'_r), & \text{если } s_r = s'_l, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и продолжим на всё пространство по линейности. Графически произведение элементов базиса изображается как результат конкатенации двух последовательных переходов, если такая конкатенация возможна. Пространство T_n с введенным умножением $*$ превращается в алгебру. Эта алгебра некоммутативна, например,

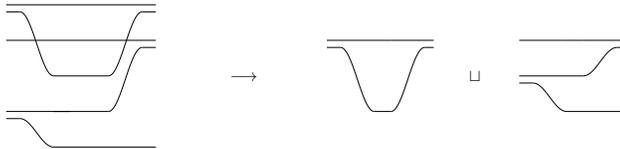


Единицей в алгебре T_n является сумма $e_n = \sum_{s \in I_n} (s, s)$, где суммирование происходит по множеству всех состояний. Легко видеть, что $e_n * t = t = t * e_n$ для всякого $t \in T_n$.

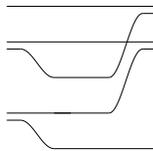
Типом перехода назовем класс эквивалентности переходов относительно действия группы S_n перестановками множества N_n . Алгебра типов переходов $A_n = T_n^{S_n}$ это подалгебра в T_n , состоящая из элементов, инвариантных относительно действия группы S_n . В качестве базиса алгебры A_n возьмём суммы элементов орбит действия группы S_n на базисе пространства T_n перестановками множества N_n , т.е. суммы всех переходов одного типа. Например, для $n = 3$ этот базис содержит следующую линейную комбинацию переходов:



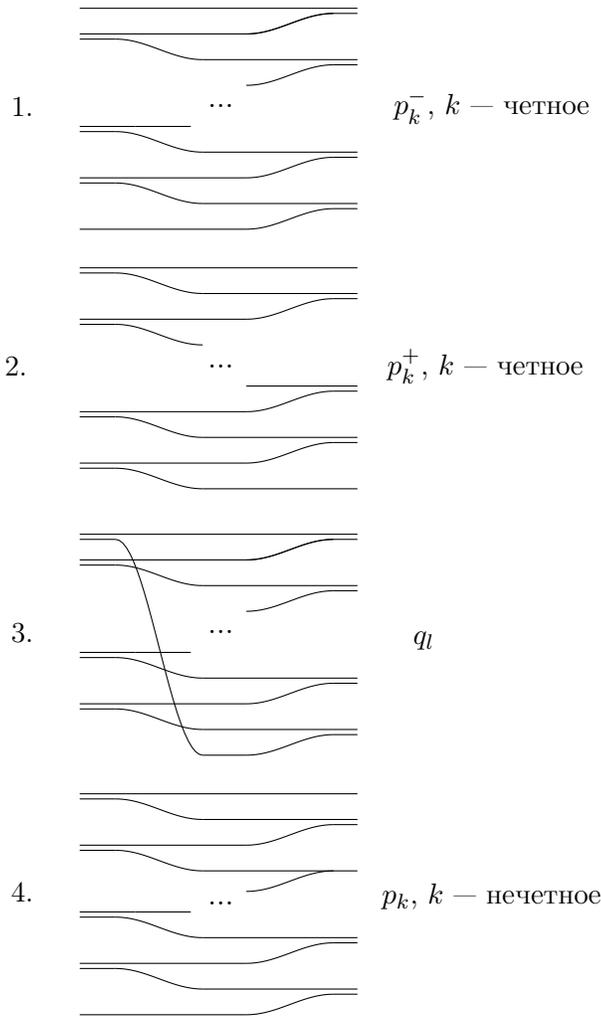
Пусть r, s — два состояния на множестве N_n . Назовём переход (r, s) *связным*, если множество N_n нельзя разбить на два непустых подмножества, инвариантных относительно обеих инволюций r и s . Свойство связности сохраняется при действии группы S_n , что позволяет говорить о связности типа перехода. Всякий тип перехода может быть представлен в виде объединения набора связных типов переходов:



Здесь переход на множестве N_5 представляется в виде объединения двух связных переходов, одного на множестве N_2 , другого на множестве N_3 . Следующий переход на N_5 является связным:



В выбранном нами базисе пространства A_n каждый элемент является набором связных типов переходов. Сопоставим каждому связному типу перехода одну из букв $\{p_k, p_k^+, p_k^-, q_l\}$ в соответствии со следующим правилом (индексы переменных p_k, p_k^\pm совпадают с мощностью множества определения перехода, индексы переменных q_l вдвое меньше этой мощности):



Вот базисы алгебр A_n , $n = 1, 2, 3, 4$, записанные таким образом:

$$A_1 : \{p_1\}$$

$$A_2 : \{p_1^2, q_1, p_2^-, p_2^+\}$$

$$A_3 : \{p_1^3, p_3, p_1 q_1, p_1 p_2^-, p_1 p_2^+\}$$

$$A_4 : \{p_1^4, p_1 p_3, p_1^2 q_1, q_1^2, q_2, p_1^2 p_2^-, q_1 p_2^-, (p_2^-)^2, p_1^2 p_2^+, q_1 p_2^+, p_2^- p_2^+, (p_2^+)^2, p_4^-, p_4^+\}$$

Степень n всякого монома в A_n равна сумме степеней переменных в мономе. При этом степени переменных определяются равенствами $\deg(q_l) = 2l$, $\deg(p_k) = \deg(p_k^\pm) = k$. Так, $\deg(p_1^5 q_2^6 (p_3^-)^7) = 1 \cdot 5 + 2(2 \cdot 6) + 3 \cdot 7 = 50$,

и $p_1^5 q_2^6 (p_3^-)^7 \in A_{50}$. Поскольку всякий базисный элемент пространства A_n является произведением элементов $p_{2k-1}, p_{2k}^+, p_{2k}^-, q_k, k \in \mathbb{N}$, из которых первый имеет вес $2k-1$, а три остальных — вес $2k$, справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. *Производящая функция для размерностей алгебр A_n имеет вид*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \dim A_n t^n &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^{2k-1})^{-1} (1 - t^{2k})^{-3} \\ &= 1 + t + 4t^2 + 5t^3 + 14t^4 + 18t^5 + 41t^6 + \dots \end{aligned}$$

Действительно, коэффициент при мономе t^n в произведении справа равен количеству произведений $t^{2k_1-1} \cdot t^{2k_2} \cdot t^{2k_3} \cdot t^{2k_4}$, $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}$, для которых выполнено $2k_1 - 1 + 2k_2 + 2k_3 + 2k_4 = n$, а значит, количеству образующих в A_n .

Умножение в алгебре A_n индуцировано умножением в T_n . Например, таблица умножения в алгебре A_3 имеет следующий вид:

*	p_1^3	p_3	$p_1 q_1$	$p_1 p_2^-$	$p_1 p_2^+$
p_1^3	p_1^3	0	0	$p_1 p_2^-$	0
p_3	0	$p_3 + 2p_1 q_1$	p_3	0	$2p_1 p_2^+$
$p_1 q_1$	0	p_3	$p_1 q_1$	0	$p_1 p_2^+$
$p_1 p_2^-$	0	$2p_1 p_2^-$	$p_1 p_2^-$	0	$3p_1^3$
$p_1 p_2^+$	$p_1 p_2^+$	0	0	$p_3 + p_1 q_1$	0

Здесь в ячейке (i, j) на пересечении i -й строки и j -го столбца ($i > 1, j > 1$) стоит результат умножения справа элемента в ячейке $(i, 1)$ на элемент в ячейке $(1, j)$; так, $p_1 p_2^- * p_3 = 2p_1 p_2^-$.

Единица $e_n \in A_n$ представляется в виде $\sum_{k+2l=n} p_1^k q_1^l$.

Алгебру A_n можно интерпретировать как алгебру сплетающих операторов представления ρ_n группы S_n , т.е. $A_n = \text{Hom}_{S_n}((\rho_n, V_n), (\rho_n, V_n))$ линейных операторов из V_n в V_n , коммутирующих с действием группы S_n . Из классической леммы Шура вытекает

Теорема 4. *Алгебра A_n полупроста для всех $n = 1, 2, \dots$ и допускает разложение в прямую сумму*

$$A_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \text{End}(\mathbb{C}^{k_\lambda})$$

алгебр эндоморфизмов изотипических подпространств \mathbb{C}^{k_λ} неприводимых представлений λ в представлении ρ_n .

Следствие 1. *Количество различных типов переходов для n -элементного множества равно $\dim A_n = \sum_{\lambda \vdash n} k_\lambda^2$.*

Пусть $A_{n,m} \subset A_n$ — подпространство в пространстве типов переходов (s_1, s_2) , таких, что $s_1 \in V_{n,m}$. Это подпространство раскладывается в прямую сумму пространств линейных отображений,

$$A_{n,m} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \text{Hom}(\mathbb{C}^{k_\lambda}, \mathbb{C}^{k_{\lambda,m}}),$$

откуда вытекает следствие.

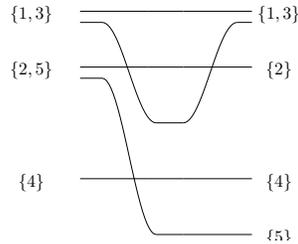
Следствие 2. *Справедливо равенство $\dim A_{n,m} = \sum_{\lambda \vdash n} k_{m,\lambda} k_\lambda$.*

Действие алгебры A_n на себе умножением справа сохраняет каждое из подпространств $A_{n,m}$.

Для всякого элемента $a \in A_n$ обозначим через $P_{a,\lambda}$ характеристический многочлен действия элемента a умножением справа на изотипическом пространстве неприводимого представления λ . Из теоремы 4 сразу же вытекает следующее предложение.

Предложение 6. *Характеристический многочлен оператора умножения справа на a в пространстве A_n равен $\prod_{\lambda \vdash n} (P_{a,\lambda})^{k_\lambda}$. Характеристический многочлен оператора умножения справа на a в пространстве $A_{n,m}$ равен $\prod_{\lambda \vdash n} (P_{a,\lambda})^{k_{m,\lambda}}$.*

2.3. Вещественные числа Гурвица и действие оператора cut-&-join как умножение на класс транспозиции в алгебре типов переходов. Переход называется **транспозицией**, если начальное и конечное состояния различаются двумя элементами, объединёнными в пару в одном из состояний и образующими два одноэлементных подмножества в другом:



Обозначим через $H^{\mathbb{R}^o} = H^{\mathbb{R}^o}(u; p_1, p_2, \dots)$ производящую функцию для вещественных простых чисел Гурвица (см. определения в [7]). В [11] доказано следующее утверждение:

Теорема 5. Производящая функция $H^{\mathbb{R}^0}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial H^{\mathbb{R}^0}}{\partial u} = W^{\mathbb{R}}(H^{\mathbb{R}^0}),$$

где

$$\begin{aligned} W^{\mathbb{R}} = & \sum_{i,j} \left(p_{2i-1} p_{2j-1} \frac{\partial}{\partial p_{2i+2j-2}} + p_{2i-1} p_{2j}^+ \frac{\partial}{\partial p_{2i+2j-1}} + p_{2i}^+ p_{2j}^+ \frac{\partial}{\partial p_{2i+2j}} \right) \\ & + \sum_{i,j} \left(2p_{2i+2j-1} \frac{\partial^2}{\partial p_{2i-1} \partial p_{2j}^+} + \frac{1}{2} p_{2i+2j-2}^- \frac{\partial^2}{\partial p_{2i-1} \partial p_{2j-1}} + 2p_{2i+2j}^+ \frac{\partial^2}{\partial p_{2i}^+ \partial p_{2j}^+} \right) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left(i p_{2i}^+ \frac{\partial}{\partial q_i} + q_i \frac{\partial}{\partial p_{2i}^+} \right), \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$H^{\mathbb{R}^0}(0; p_1, p_2, \dots) = e^{p_1 + q_1/2}.$$

Оператор умножения справа на класс транспозиции $\sum_{k+2l=n-2} (p_2^+ + p_2^-) p_1^k q_1^l$ действует в алгебре A_n как дифференциальный оператор $W^{\mathbb{R}}$ на многочленах степени n от переменных $p_k, p_{2k}^+, p_{2k}^-, q_l$.

Пусть $\mu = (\kappa, \kappa^+, \kappa^-, \lambda)$ — четверка разбиений, $|\mu| = |\kappa| + |\kappa^+| + |\kappa^-| + 2|\lambda|$. Каждая такая четверка описывает тип перехода на множестве $N_{|\mu|}$. Обозначим через C_μ сумму всех переходов типа μ , через $|C_\mu|$ — количество таких переходов; $C_\mu \in A_{|\mu|}$. Классы C_μ образуют базис в векторном пространстве $A_{|\mu|}$. Введём на A_n скалярное произведение, положив

$$(C_\mu, C_{\mu'}) = \delta_{\mu, \mu'} n! \frac{1}{|C_\mu|}. \quad (*)$$

Отметим, что мономы образуют в пространстве A_n ортогональный базис относительно введенного скалярного произведения и, в частности, подпространства $A_{n,m} \subset A_n$, будучи координатными, задают разложение пространства A_n в прямую сумму попарно ортогональных подпространств. Мономы в разложении в ряд начального условия

$$H^{\mathbb{R}^0}(0; p_1, p_2, \dots) = e^{p_1 + q_1/2} = 1 + p_1 + \left(\frac{p_1^2}{2} + \frac{q_1}{2} \right) + \left(\frac{p_1^3}{6} + \frac{p_1 q_1}{2} \right) + \dots$$

также попарно ортогональны. При этом моном $\frac{1}{k!((n-k)/2)!2^{(n-k)/2}} p_1^k q_1^{\frac{n-k}{2}}$ лежит в пространстве $A_{n,k}$ и является, тем самым, ортогональной проекцией начального условия на это подпространство.

Теорема 6. *Оператор $W^{\mathbb{R}}$ на векторном пространстве A_n самосопряжён относительно скалярного произведения $(*)$.*

Доказательство. Покажем, что $(W^{\mathbb{R}}C_\mu, C_{\mu'}) = (C_\mu, W^{\mathbb{R}}C_{\mu'})$ для любой пары типов μ, μ' . Обозначим через τ сумму всех транспозиций в пространстве A_n . По Теореме 5 имеем:

$$(W^{\mathbb{R}}C_\mu, C_{\mu'}) = (C_\mu\tau, C_{\mu'}) = \left(\sum_{\sigma} C_\sigma t_{\mu\sigma}, C_{\mu'} \right) = t_{\mu\mu'}(C_{\mu'}, C_{\mu'}) = \frac{n!}{|C_{\mu'}|} t_{\mu\mu'},$$

$$(C_\mu, W^{\mathbb{R}}C_{\mu'}) = (C_\mu, C_{\mu'}\tau) = \left(C_\mu, \sum_{\sigma} C_\sigma t_{\mu'\sigma} \right) = t_{\mu'\mu}(C_\mu, C_\mu) = \frac{n!}{|C_\mu|} t_{\mu'\mu}.$$

Здесь $t_{\mu\mu'}$ и $t_{\mu'\mu}$ — количества транспозиций в τ , переводящих C_μ в $C_{\mu'}$ и $C_{\mu'}$ в C_μ соответственно.

Заметим, что $|C_\mu|t_{\mu\mu'} = |C_{\mu'}|t_{\mu'\mu}$. Действительно, рассмотрим тройки переходов $(d_\mu, d_{\mu'}, \tau_{\mu\mu'})$ и тройки $(d_{\mu'}, d_\mu, \tau_{\mu'\mu}^*)$ такие, что переходы d_μ и $d_{\mu'}$ имеют циклические типы μ и μ' , соответственно, $\tau_{\mu\mu'}$ — транспозиция, переводящая d_μ в $d_{\mu'}$, а $\tau_{\mu'\mu}^*$ — транспозиция, обратная к $\tau_{\mu\mu'}$ и переводящая $d_{\mu'}$ в d_μ . В левой части равенства стоит количество троек первого вида, в правой — второго. Ясно, что эти количества совпадают. \square

Из доказанного утверждения следует, что на каждом из пространств A_n , а также на каждом из подпространств $A_{n,m}$, оператор $W^{\mathbb{R}}$ имеет собственный базис. Однако непосредственное вычисление этого базиса трудоемко и требует нахождения корней полиномов возрастающей степени; мы упрощаем его, представляя оператор в блочном виде. Поскольку оператор $W^{\mathbb{R}}$ является оператором умножения на элемент алгебры A_n , справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Действие оператора $W^{\mathbb{R}}$ на пространстве многочленов данной степени n раскладывается в прямую сумму его действий на подпространствах изотипических представлений группы S_n .*

Тем самым, вычисление однородной составляющей степени n производящей функции $H^{\mathbb{R}\circ} = e^{uW^{\mathbb{R}}} e^{p_1+q_1/2}$ можно выполнить, действуя в соответствии со следующим алгоритмом:

- (1) найти разложение действия группы S_n на пространстве состояний V_n на неприводимые;
- (2) для каждой из подалгебр $A_{n,m} \subset A_n$ алгебры переходов найти ее разложение в прямую сумму алгебр эндоморфизмов изотипических подпространств неприводимых представлений группы S_n ;

- (3) разложить действие оператора транспозиции $W^{\mathbb{R}}$ в прямую сумму действий умножениями в каждой из алгебр эндоморфизмов изотипических подпространств;
- (4) разложить начальные условия по изотипическим подпространствам;
- (5) воспользовавшись знанием характеристического многочлена ограничения оператора транспозиции на изотипическое подпространство, выписать рациональную производящую функцию для вещественных чисел Гурвица, определяемых соответствующим изотипическим подпространством.

Продемонстрируем, как работает алгоритм на примере алгебры A_6 . Ее размерность равна $\dim A_6 = 41$, и непосредственное вычисление экспоненты оператора транспозиции потребовало бы вычисления экспоненты матрицы размера 41×41 . Как мы увидим ниже, нам потребуется вычислять лишь рациональные производящие функции, определяемые целочисленными матрицами размера не более 4×4 .

Многочлены Шура $X_{6,m}$ представлений $\rho_{6,m}$ группы S_6 в пространствах $V_{6,m}$ имеют вид

$$\begin{aligned} X_{6,0} &= \mathcal{S}_6 + \mathcal{S}_{42} + \mathcal{S}_{222} \\ X_{6,2} &= \mathcal{S}_6 + 2\mathcal{S}_{42} + \mathcal{S}_{51} + \mathcal{S}_{222} + \mathcal{S}_{321} \\ X_{6,4} &= \mathcal{S}_6 + \mathcal{S}_{42} + \mathcal{S}_{51} \\ X_{6,6} &= \mathcal{S}_6, \end{aligned}$$

так что

$$X_6 = X_{6,0} + X_{6,2} + X_{6,4} + X_{6,6} = 4\mathcal{S}_6 + 4\mathcal{S}_{42} + 2\mathcal{S}_{51} + 2\mathcal{S}_{222} + \mathcal{S}_{321}.$$

Размерность наибольшего изотипического подпространства равна наибольшей кратности неприводимого представления в разложении, а значит, равна 4.

Идеал $A_{6,6} \subset A_6$ состоит из линейных комбинаций мономов $p_1^6, p_1^4 p_2^-, p_1^2 (p_2^-)^2, (p_2^-)^3$. В базисе из этих мономов ограничение оператора $W^{\mathbb{R}}$ на этот идеал задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а ее характеристический многочлен равен $x^4 - 30x^2 + 45$. Нам будет удобнее, однако, записывать матрицу этого оператора в другом базисе. В качестве первого вектора этого базиса возьмем вектор $e_1 = p_1^6$, представляющий собой, с точностью до постоянного коэффициента $1/6!$, проекцию начального условия на подпространство $A_{6,6}$. Остальные векторы базиса имеют вид $e_2 = W_{6,6}^{\mathbb{R}} e_1 = 15p_1^4 p_2^-$, $e_3 = (W_{6,6}^{\mathbb{R}})^2 e_2 = 15p_1^6 + 90p_1^2 (p_2^-)^2$, $e_4 = (W_{6,6}^{\mathbb{R}})^3 e_3 = 405p_1^4 p_2^- + 90(p_2^-)^3$. В базисе $\{e_i\}$ матрица оператора транспозиции имеет вид

$$M_{S_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -45 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как следствие, производящая функция для результатов применения матриц $M_{S_6}^n$ к вектору e_1 имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (W_{6,6}^{\mathbb{R}})^n e_1 u^n \\ &= \frac{1}{1 - 30u^2 + 45u^4} ((1 - 75u^2 + 45u^4)e_1 + u(1 - 75u^2 + 45u^4)e_2 + u^2 e_3 + u^3 e_4), \end{aligned}$$

что дает явные формулы для вещественных чисел Гурвица — коэффициентов при всех мономах $p_1^{2k} (p_2^-)^{3-k} u^n$, $k = 3, 2, 1, 0$, в производящей функции $H^{\mathbb{R}_o}$.

Матрица оператора $W_{6,4}^{\mathbb{R}}$ имеет размер 10×10 , и в подходящем базисе состоит из трёх блоков, отвечающих неприводимым представлениям $\mathcal{S}_6, \mathcal{S}_{42}, \mathcal{S}_{51}$, размерностей соответственно 4, 4 и 2. Ее характеристический многочлен равен $(x^4 - 30x^2 + 45)(x^4 - 10x^2 + 5)(x^2 - 3)$.

Представлению \mathcal{S}_6 отвечает, в подходящем базисе, матрица M_{S_6} . В качестве циклического вектора e_1 этого базиса для нее выберем проекцию начального условия $p_1^4 q_1$ на ядро оператора $(W_{6,4}^{\mathbb{R}})^4 - 30(W_{6,4}^{\mathbb{R}})^2 + 45I$. Это ядро порождено 4-мя векторами, в качестве первого из которых можно выбрать $e_1 = p_1^4 q_1 + 8p_1^3 p_3 + 6p_1^2 p_2^- p_2^+$, а в качестве всех остальных — вектора, ортогональные как начальному условию, так и вектору e_1 . Этот вектор и является, с точностью до ненулевого коэффициента, ортогональной проекцией начального условия на соответствующее подпространство. Остальные векторы имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} e_2 &= W_{6,4}^{\mathbb{R}} e_1 = 15p_1^4 p_2^+ + 12p_1^2 q_1 p_2^- + 24p_1^2 p_4^- + 48p_1 p_3 p_2^- + 6(p_2^-)^2 p_2^+ \\ e_3 &= W_{6,4}^{\mathbb{R}} e_2 = 27p_1^4 q_1 + 216p_1^3 p_3 + 18q_1 (p_2^-)^2 + 162p_1^2 p_2^- p_2^+ + 72p_2^- p_4^- \\ e_4 &= W_{6,4}^{\mathbb{R}} e_3 = 405p_1^4 p_2^+ + 360p_1^2 q_1 p_2^- + 720p_1^2 p_4^- + 1440p_1 p_3 p_2^- + 180(p_2^-)^2 p_2^+, \end{aligned}$$

а обыкновенная производящая функция для вещественных чисел Гурвица имеет тот же вид, что и выше,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (W_{6,4}^{\mathbb{R}})^n e_1 u^n \\ &= \frac{1}{1 - 30u^2 + 45u^4} ((1 - 75u^2 + 45u^4)e_1 + u(1 - 75u^2 + 45u^4)e_2 + u^2e_3 + u^3e_4), \end{aligned}$$

но уже с новыми образующими e_i .

Для вычисления матрицы, отвечающей представлению \mathcal{S}_{42} , выберем в качестве вектора e_1 проекцию начального условия $p_1^4 q_1$ на ядро оператора $(W_{6,4}^{\mathbb{R}})^4 - 10(W_{6,4}^{\mathbb{R}})^2 + 5I$. Это ядро также порождено 4-мя векторами; проекция начального условия имеет вид $e_1 = -2p_1^3 p_3 + p_1^4 q_1 + p_1^2 p_2^- p_2^+$. Остальные векторы выражаются через e_1 :

$$\begin{aligned} e_2 &= W_{6,4}^{\mathbb{R}} e_1 = -2p_1 p_3 p_2^- + 7p_1^2 q_1 p_2^- - 6p_1^2 p_4^- + (p_2^-)^2 p_2^+ \\ e_3 &= W_{6,4}^{\mathbb{R}} e_2 = -14p_1^3 p_3 + 7p_1^4 q_1 + 8q_1 (p_2^-)^2 - 8p_2^- p_4^- + 7p_1^2 p_2^- p_2^+ \\ e_4 &= W_{6,4}^{\mathbb{R}} e_3 = -30p_1 p_3 p_2^- + 65p_1^2 q_1 p_2^- - 50p_1^2 p_4^- + 15(p_2^-)^2 p_2^+. \end{aligned}$$

Матрица оператора транспозиции в этом базисе имеет вид

$$M_{\mathcal{S}_{42}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а соответствующая обыкновенная производящая функция представляется в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (W_{6,4}^{\mathbb{R}})^n e_1 u^n \\ &= \frac{1}{1 - 10u^2 + 5u^4} ((1 - 15u^2 + 5u^4)e_1 + u(1 - 15u^2 + 5u^4)e_2 + u^2e_3 + u^3e_4). \end{aligned}$$

Наконец, представлению \mathcal{S}_{51} соответствуют проекция $e_1 = -2p_1^3 p_3 - p_1^4 q_1 + 3p_1^2 p_2^- p_2^+$ начального условия на ядро оператора $(W_{6,4}^{\mathbb{R}})^2 - 3I$, второй вектор $e_2 = W_{6,4}^{\mathbb{R}} e_1 = 6p_1 p_3 p_2^- - 3p_1^2 q_1 p_2^- - 6p_1^2 p_4^- + 3(p_2^-)^2 p_2^+$ и матрица оператора в этом базисе:

$$M_{\mathcal{S}_{51}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обыкновенная производящая функция для вещественных чисел Гурвица имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (W_{6,4}^{\mathbb{R}})^n e_1 u^n = \frac{1}{1-3u^2} (e_1 + ue_2).$$

Матрица оператора $W_{6,2}^{\mathbb{R}}$ имеет размер 17×17 и в подходящем базисе состоит уже из шести блоков, отвечающих неприводимым представлениям $\mathcal{S}_6, \mathcal{S}_{42}, \mathcal{S}_{51}, \mathcal{S}_{222}, \mathcal{S}_{321}$, причём блок, отвечающий представлению \mathcal{S}_{42} , имеет кратность 2. Характеристический многочлен матрицы оператора равен $-x(x^4 - 30x^2 + 45)(x^4 - 10x^2 + 5)^2(x^2 - 3)^2$.

Представлению \mathcal{S}_6 отвечает блок $M_{\mathcal{S}_6}$ в следующем базисе. В качестве первого базисного вектора e_1 выберем проекцию $p_1^2 q_1^2$ на ядро оператора $(W_{6,2}^{\mathbb{R}})^4 - 30(W_{6,2}^{\mathbb{R}})^2 + 45I$. Тогда

$$\begin{aligned} e_1 &= 8p_3^2 + 16p_1 p_5 + 8p_1 p_3 q_1 + p_1^2 q_1^2 + 2p_1^2 q_2 + 2q_1 p_2^- p_2^+ + 4p_4^- p_2^+ + 4p_2^- p_4^+ \\ e_2 &= W_{6,2}^{\mathbb{R}} e_1 = 3q_1^2 p_2^- + 6q_2 p_2^- + 12q_1 p_4^- + 24p_6^- + 48p_1 p_3 p_2^+ \\ &\quad + 12p_1^2 q_1 p_2^+ + 6p_2^- (p_2^+)^2 + 24p_1^2 p_4^+ \\ e_3 &= W_{6,2}^{\mathbb{R}} e_2 = 120p_3^2 + 240p_1 p_5 + 120p_1 p_3 q_1 + 15p_1^2 q_1^2 \\ &\quad + 30p_1^2 q_2 + 30q_1 p_2^- p_2^+ + 60p_4^- p_2^+ + 90p_1^2 (p_2^+)^2 + 60p_2^- p_4^+ \\ e_4 &= W_{6,2}^{\mathbb{R}} e_3 = 45q_1^2 p_2^- + 90q_2 p_2^- + 180q_1 p_4^- + 360p_6^- + 1440p_1 p_3 p_2^+ \\ &\quad + 360p_1^2 q_1 p_2^+ + 180p_2^- (p_2^+)^2 + 720p_1^2 p_4^+. \end{aligned}$$

Двум копиям представления \mathcal{S}_{42} отвечают, соответственно, два блока $M_{\mathcal{S}_{42}}$. В качестве вектора e_1 выберем проекцию начального условия $p_1^2 q_1^2$ на ядро оператора $(W_{6,2}^{\mathbb{R}})^4 - 10(W_{6,2}^{\mathbb{R}})^2 + 5I$. Применение оператора $W_{6,2}^{\mathbb{R}}$ к этой проекции даёт 4-мерное подпространство, порожденное векторами

$$\begin{aligned} e_1 &= 2p_3^2 - 16p_1 p_5 + 2p_1 p_3 q_1 + 4p_1^2 q_1^2 + 3p_1^2 q_2 + 3q_1 p_2^- p_2^+ + p_4^- p_2^+ + p_2^- p_4^+ \\ e_2 &= W_{6,2}^{\mathbb{R}} e_1 = 7q_1^2 p_2^- + 4q_2 p_2^- + 3q_1 p_4^- - 14p_6^- - 8p_1 p_3 p_2^+ \\ &\quad + 13p_1^2 q_1 p_2^+ + 4p_2^- (p_2^+)^2 - 9p_1^2 p_4^+ \\ e_3 &= W_{6,2}^{\mathbb{R}} e_2 = -30p_3^2 - 80p_1 p_5 + 50p_1 p_3 q_1 + 20p_1^2 q_1^2 - 5p_1^2 q_2 \\ &\quad + 35q_1 p_2^- p_2^+ - 5p_4^- p_2^+ + 15p_2^- p_4^+ \\ e_4 &= W_{6,2}^{\mathbb{R}} e_3 = 55q_1^2 p_2^- + 10q_2^2 p_2^- + 45q_1 p_4^- - 110p_6^- - 100p_1 p_3 p_2^+ \\ &\quad + 125p_1^2 q_1 p_2^+ + 50p_2^- (p_2^+)^2 - 75p_1^2 p_4^+. \end{aligned}$$

Вторая копия представления \mathcal{S}_{42} может быть получена как ортогональное дополнение к первой копии, однако для подсчета производящей функции вычисление базиса второй копии \mathcal{S}_{42} не требуется.

Представлениям \mathcal{S}_{51} и \mathcal{S}_{222} отвечают матрицы $M_{\mathcal{S}_{51}}$ и $M_{\mathcal{S}_{222}} = M_{\mathcal{S}_{51}}$. Спроецировав начальное условие на ядро оператора $(W_{6,2}^{\mathbb{R}})^2 - 3I$, получаем базис 2-мерного подпространства:

$$\begin{aligned} e_1 &= 2p_3^2 - 4p_1p_5 - p_1^2q_1^2 - p_1^2q_2 + 2p_4^-p_2^+ + 2p_2^-p_4^+ \\ e_2 &= W_{6,2}^{\mathbb{R}}e_1 = -q_1^2p_2^- + q_2^2p_2^- + 2q_1p_4^- - 2p_6^- + 4p_1p_3p_2^+ - 2p_1^2q_1p_2^+ \\ &\quad + 2p_2^-(p_2^+)^2 - 4p_1^2p_4^+. \end{aligned}$$

Наконец, представление \mathcal{S}_{321} одномерно; проекция начального условия совпадает с собственным вектором $e = -p_3^2 + p_1p_5 - p_1p_3q_1 + p_1^2q_1^2 - p_1^2q_2 - q_1p_2^-p_2^+ + p_4^-p_2^+ + p_2^-p_4^+$, отвечающим нулевому собственному значению. При этом блок матрицы имеет вид

$$M_{\mathcal{S}_{321}} = (0).$$

Матрица оператора $W_{6,0}^{\mathbb{R}}$ имеет размер 10×10 и в подходящем базисе состоит из трёх блоков, $M_{\mathcal{S}_6}$, $M_{\mathcal{S}_{42}}$ и $M_{\mathcal{S}_{222}}$, отвечающих неприводимым представлениям \mathcal{S}_6 , \mathcal{S}_{42} и \mathcal{S}_{222} соответственно. Подходящий базис, соответствующий каждому представлению, приведён в таблице.

Представление	Базис подпространства
\mathcal{S}_6	$e_1 = q_1^3 + 6q_1q_2 + 8q_3$ $e_2 = 3q_1^2p_2^+ + 6q_2p_2^+ + 12q_1p_4^+ + 24p_6^+$ $e_3 = 3q_1^3 + 18q_1q_2 + 24q_3 + 18q_1(p_2^+)^2 + 72p_2^+p_4^+$ $e_4 = 45q_1^2p_2^+ + 90q_2p_2^+ + 90(p_2^+)^3 + 180q_1p_4^+ + 360p_6^+$
\mathcal{S}_{42}	$e_1 = -q_1^3 - q_1q_2 + 2q_3$ $e_2 = -3q_1^2p_2^+ - q_2p_2^+ - 2q_1p_4^+ + 6p_6^+$ $e_3 = -3q_1^3 - 3q_1q_2 + 6q_3 - 8q_1(p_2^+)^2 + 8p_2^+p_4^+$ $e_4 = -25q_1^2p_2^+ + 5q_2p_2^+ - 30q_1p_4^+ + 50p_6^+$
\mathcal{S}_{222}	$e_1 = q_1^3 - 3q_1q_2 + 2q_3$ $e_2 = 3q_1^2p_2^+ - 3q_2p_2^+ - 6q_1p_4^+ + 6p_6^+$

Здесь e_1 для каждого подпространства — проекция начального условия q_1^3 на ядро соответствующего оператора.

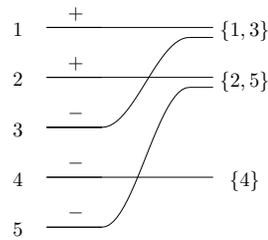
§3. Случай разделяющих вещественных кривых

В [7] доказывается аналог теоремы Гульдена–Джексона для случая разделяющих вещественных кривых. Эти случаи — простых вещественных функций на произвольных кривых и на разделяющих кривых — параллельны друг другу. В настоящем разделе мы докажем аналогичные сформулированным в §2 результаты.

В случае разделяющих кривых возникающие пространства состояний и переходов наделены дополнительной градуировкой, и вместо действия симметрической группы нам приходится иметь дело с действием произведения двух симметрических групп. В п. 3.1 мы вводим пространства состояний V_{n^+,n^-} и описываем разложение представления группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ в пространстве V_{n^+,n^-} на неприводимые. Далее в п. 3.2 мы определяем алгебру типов переходов A_{n^+,n^-} , следуя [7], и строим разложение алгебры A_{n^+,n^-} в прямую сумму матричных алгебр. Наконец, в п. 3.3 мы показываем, как вычислить экспоненту оператора транспозиции W^+ .

3.1. Представление группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ в пространстве состояний.

Как и выше, обозначим через N_n конечное множество $N_n = [1, \dots, n]$. Зафиксируем разбиение $N_n = N_n^+ \sqcup N_n^-$ множества N_n на два непересекающихся подмножества, и положим $n^+ = |N_n^+|$ и $n^- = |N_n^-|$, так что $n^+ + n^- = n$. Без ограничения общности можно считать, что множество N_n^+ состоит из первых n^+ элементов множества N_n . Назовём *состоянием* множества N_n такое его разбиение на одноэлементные и двухэлементные подмножества, что каждое двухэлементное подмножество содержит один элемент из N^+ и один из N^- . Мы будем использовать графическое представление состояний, в котором элементы множеств N_n^+ и N_n^- изображаются занумерованными отрезками кривых, помеченными плюсами и минусами соответственно, и принадлежность двух элементов одной орбите инволюции изображается сближением концов соответствующих отрезков. Так, для разбиения $N_5^+ = \{1, 2\}$, $N_5^- = \{3, 4, 5\}$ множества N_5 состояние $\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}$ имеет графическое представление



Множество состояний на множестве N_{n^+,n^-} обозначим через I_{n^+,n^-} . Формальные линейные комбинации состояний на множестве N_{n^+,n^-} образуют *пространство состояний* V_{n^+,n^-} , $\dim V_{n^+,n^-} = |I_{n^+,n^-}|$.

Группа $S_{n^+} \times S_{n^-}$ действует на элементах базиса пространства V_{n^+,n^-} перенумерацией множеств N^+ и N^- . Это действие продолжается по линейности на всё пространство V_{n^+,n^-} и порождает представление группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$, которое мы обозначим через $\rho_{n^+,n^-} : S_{n^+} \times S_{n^-} \rightarrow \text{Aut}(V_{n^+,n^-})$.

Всякое неприводимое представление произведения двух конечных групп представляет собой тензорное произведение неприводимых представлений сомножителей. Разложим представление ρ_{n^+,n^-} на неприводимые:

$$V_{n^+,n^-} = \bigoplus_{\lambda^+ \vdash n^+, \lambda^- \vdash n^-} (\mathbb{C}^{c_{\lambda^+, \lambda^-}} \otimes \lambda^+ \otimes \lambda^-),$$

где $c_{\lambda^+ \otimes \lambda^-}$ – кратность вхождения неприводимого представления $\lambda^+ \otimes \lambda^-$ в V_{n^+,n^-} .

Обозначим через $I_{n^+,n^-,k}$ подмножество множества I_{n^+,n^-} , состоящее из состояний на N_{n^+,n^-} с k двухэлементными подмножествами, а через $V_{n^+,n^-,k}$ подпространство в V_{n^+,n^-} , порожденное элементами множества $I_{n^+,n^-,k}$. Так, $I_{n^+,n^-} = \sqcup_k I_{n^+,n^-,k}$ и $V_{n^+,n^-} = \bigoplus_k V_{n^+,n^-,k}$. Подпространство $V_{n^+,n^-,k}$ инвариантно относительно действия группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$; представление группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ в этом пространстве обозначим через $\rho_{n^+,n^-,k} : S_{n^+} \times S_{n^-} \rightarrow \text{Aut}(V_{n^+,n^-,k})$. Обозначим также через $c_{\lambda^+, \lambda^-, k}$ кратность вхождения неприводимого представления $\lambda^+ \otimes \lambda^-$ в представление $\rho_{n^+,n^-,k}$ группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ в пространстве $V_{n^+,n^-,k}$. Тем самым,

$$V_{n^+,n^-,k} = \bigoplus_{\lambda^+, \lambda^-} (\mathbb{C}^{c_{\lambda^+, \lambda^-, k}} \otimes \lambda^+ \otimes \lambda^-) \quad \text{и} \quad c_{\lambda^+, \lambda^-} = \sum_k c_{\lambda^+, \lambda^-, k}.$$

Обозначим через $\chi_{n^+,n^-,k}$ характер представления группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ в пространстве $V_{n^+,n^-,k}$, то есть отображение $\chi_{n^+,n^-,k} : S_{n^+} \times S_{n^-} \rightarrow \mathbb{C}$, сопоставляющее каждой перестановке след представляющего её элемента в $\text{Aut}(V_{n^+,n^-,k})$.

Введём многочлен Шура $X_{n^+,n^-,k} = X_{n^+,n^-,k}(u_1^+, u_2^+, \dots, u_1^-, u_2^-, \dots)$ представления группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ в пространстве $V_{n^+,n^-,k}$:

$$\begin{aligned} X_{n^+,n^-,k} &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_{n^+} \times S_{n^-}} \chi_{n^+,n^-,k}(\sigma) u_{\text{cycl}(\sigma^+)}^+ u_{\text{cycl}(\sigma^-)}^- \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_{n^+} \times S_{n^-}} \text{Tr}_{V_{n^+,n^-,k}}(\sigma) u_{\text{cycl}(\sigma^+)}^+ u_{\text{cycl}(\sigma^-)}^-, \end{aligned}$$

где для перестановки $\sigma = (\sigma^+, \sigma^-)$ циклического типа $((\sigma_1^+, \dots, \sigma_t^+), (\sigma_1^-, \dots, \sigma_r^-))$ через $u_{\text{cycl}(\sigma^+)}^+ u_{\text{cycl}(\sigma^-)}^-$ обозначен моном $u_{\sigma_1^+}^+ \dots u_{\sigma_t^+}^+ u_{\sigma_1^-}^- \dots u_{\sigma_r^-}^-$.

Следующая теорема дает универсальный способ вычисления многочленов Шура представлений группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ в пространствах $V_{n^+,n^-,k}$.

Теорема 8. *Многочлен Шура представления группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ в пространстве $V_{n^+,n^-,k}$ равен*

$$X_{n^+,n^-,k} = \mathcal{S}_{n^+-k}(u^+) \mathcal{S}_{n^- -k}(u^-) \mathcal{S}_k(v) |_{v_t = u_t^+ u_t^-},$$

где через \mathcal{S}_k , $k = 0, 1, \dots$ обозначена функция Шура для одночастичного разбиения (k) , $t = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Для данной перестановки σ величина $\text{Tr}_{V_{n^+,n^-,k}}(\sigma)$ равна числу состояний на N_{n^+,n^-} с k двухэлементными подмножествами, сохраняемых перестановкой σ . Отсюда

$$\begin{aligned} X_{n^+,n^-,k} &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_{n^+} \times S_{n^-}} \text{Tr}_{V_{n^+,n^-,k}}(\sigma) u_{\text{cycl}(\sigma^+)}^+ u_{\text{cycl}(\sigma^-)}^- \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_{n^+} \times S_{n^-}} \sum_{\substack{\alpha \in I_{n^+,n^-,k} \\ \sigma(\alpha) = \alpha}} u_{\text{cycl}(\sigma^+)}^+ u_{\text{cycl}(\sigma^-)}^- \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in I_{n^+,n^-,k}} \sum_{\sigma \in \text{Stab}(\alpha)} u_{\text{cycl}(\sigma^+)}^+ u_{\text{cycl}(\sigma^-)}^-, \end{aligned}$$

где суммирование в последних двух строчках идет по всем состояниям α с k двухэлементными подмножествами. Заметим, что вклад состояния α не зависит от выбранного состояния. Поэтому результат суммирования по всем состояниям α с k двухэлементными множествами равен вкладу произвольного состояния α_0 , умноженному на количество таких состояний, то есть на $|I_{n^+,n^-,k}| = \dim V_{n^+,n^-,k}$:

$$\frac{1}{n!} \sum_{\alpha} \sum_{\sigma \in \text{Stab}(\alpha)} u_{\text{cycl}(\sigma^+)}^+ u_{\text{cycl}(\sigma^-)}^- = \frac{\dim V_{n^+,n^-,k}}{n!} \sum_{\sigma \in \text{Stab}(\alpha_0)} u_{\text{cycl}(\sigma^+)}^+ u_{\text{cycl}(\sigma^-)}^-.$$

Группа $\text{Stab}(\alpha_0) \subset S_{n^+} \times S_{n^-}$ имеет вид

$$S_{n^+-k} \times S_{n^- -k} \times S_k.$$

Здесь группы S_{n^+-k} и $S_{n^- -k}$ переставляют положительные и отрицательные одноэлементные подмножества состояния α_0 соответственно, S_k переставляет пары. Элементы внутри каждой пары не переставляются.

Таким образом

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \text{Stab}(\alpha_0)} u_{\text{cycl}(\sigma^+)}^+ u_{\text{cycl}(\sigma^-)}^- \\ &= \left(\sum_{\phi^+ \in S_{n^+ - k}} u_{\text{cycl}(\phi^+)}^+ \right) \left(\sum_{\phi^- \in S_{n^- - k}} u_{\text{cycl}(\phi^-)}^- \right) \left(\sum_{\psi \in S_k} u_{\text{cycl}(\psi)}^+ u_{\text{cycl}(\psi)}^- \right). \end{aligned}$$

Первые два множителя в правой части являются функциями Шура $\mathcal{S}_{n^+ - k}$ и $\mathcal{S}_{n^- - k}$ для одночастичных разбиений, умноженными на $(n^+ - k)!$ и $(n^- - k)!$ соответственно:

$$\begin{aligned} \sum_{\phi^+ \in S_{n^+ - k}} u_{\text{cycl}(\phi^+)}^+ &= (n^+ - k)! \mathcal{S}_{n^+ - k}(u^+), \\ \sum_{\phi^- \in S_{n^- - k}} u_{\text{cycl}(\phi^-)}^- &= (n^- - k)! \mathcal{S}_{n^- - k}(u^-). \end{aligned}$$

Если $\mu \vdash k$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$, то перестановка k пар в последнем множителе имеет циклический тип $(\mu_1^+, \dots, \mu_l^+, \mu_1^-, \dots, \mu_l^-)$, а значит

$$\sum_{\psi \in S_k} u_{\text{cycl}(\psi)}^+ u_{\text{cycl}(\psi)}^- = \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_l) \vdash k} |C_\mu| u_{\mu_1}^+ \dots u_{\mu_l}^+ u_{\mu_1}^- \dots u_{\mu_l}^- = k! \mathcal{S}_k(v) |_{v_t = u_t^+ u_t^-},$$

где $|C_\mu|$ — количество перестановок типа μ , $t = 1, 2, \dots$

Окончательно,

$$\begin{aligned} & X_{V_{n^+, n^-, k}} \\ &= \frac{\dim V_{n^+, n^-, k}}{n!} (n^+ - k)! \mathcal{S}_{n^+ - k}(u^+) (n^- - k)! k! \mathcal{S}_{n^- - k}(u^-) k! \mathcal{S}_k(q) |_{q_t = u_t^+ u_t^-}, \\ & \qquad \qquad \qquad t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Учитывая, что $\dim V_{n^+, n^-, k} = \frac{n!}{(n^+ - k)!(n^- - k)!k!} = |I_{n^+, n^-, k}|$, получаем утверждение теоремы. \square

Теорема 9. *Характер представления группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ в пространстве состояний $V_{n^+, n^-, k}$ равен $X_{n^+, n^-, k} = \sum_{\lambda \vdash k} \sum_{\theta, \gamma} \mathcal{S}_\theta(u^+) \mathcal{S}_\gamma(u^-)$, где θ и γ полу-*

чаются добавлением $n^+ - k$ и $n^- - k$ клеток соответственно к диаграмме Юнга разбиения λ так, чтобы каждый столбец полученной диаграммы содержал не более одной добавленной клетки.

Доказательство. Формула Пьери даёт соотношение $\mathcal{S}_\lambda \mathcal{S}_m = \sum_{\theta} \mathcal{S}_\theta$, где θ получается добавлением m клеток к диаграмме Юнга разбиения λ так,

чтобы каждый столбец получившейся диаграммы содержал не более 1 добавленной клетки.

Дважды применяя формулу Пьери, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \vdash k} \sum_{\theta, \gamma} \mathcal{S}_\theta(u^+) \mathcal{S}_\gamma(u^-) &= \sum_{\lambda \vdash k} \left(\left(\sum_{\theta} \mathcal{S}_\theta(u^+) \right) * \left(\sum_{\gamma} \mathcal{S}_\gamma(u^-) \right) \right) \\ &= \sum_{\lambda \vdash k} \mathcal{S}_\lambda(u^+) \mathcal{S}_{n^+ - k}(u^+) \mathcal{S}_\lambda(u^-) \mathcal{S}_{n^- - k}(u^-) \\ &= \mathcal{S}_{n^+ - k}(u^+) \mathcal{S}_{n^- - k}(u^-) \sum_{\lambda \vdash k} \mathcal{S}_\lambda(u^+) \mathcal{S}_\lambda(u^-) \end{aligned}$$

Лемма 1. [13] *Справедливо равенство*

$$\sum_{e^{m \geq 1}} m \frac{u_m^+}{m} \frac{u_m^-}{m} = \sum_{\lambda} \mathcal{S}_\lambda(u^+) \mathcal{S}_\lambda(u^-)$$

Для фиксированного k получаем:

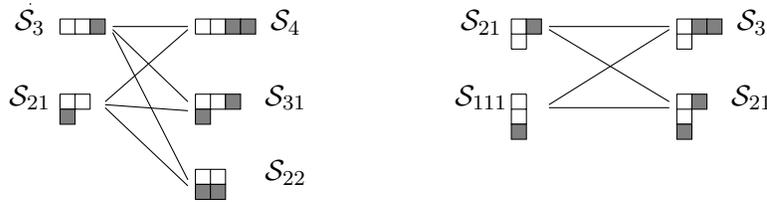
$$\sum_{\lambda \vdash k} \mathcal{S}_\lambda(u^+) \mathcal{S}_\lambda(u^-) = \mathcal{S}_k(v) \Big|_{v_t = u_t^+ u_t^-}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\lambda(u^+) \mathcal{S}_\lambda(u^-) \sum_{\lambda \vdash k} \mathcal{S}_{n^+ - k}(u^+) \mathcal{S}_{n^- - k}(u^-) \\ = \mathcal{S}_{n^+ - k}(u^+) \mathcal{S}_{n^- - k}(u^-) \mathcal{S}_k(v) \Big|_{v_t = u_t^+ u_t^-} = X_{n^+, n^-, k}, \end{aligned}$$

где $t = 1, 2, \dots$ □

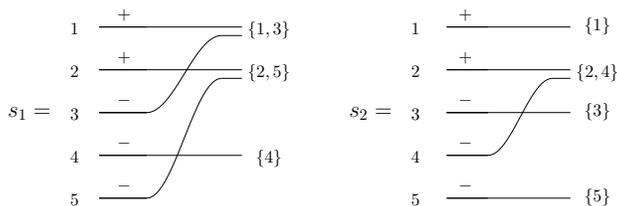
В качестве примера рассмотрим пространство состояний $V_{3,4,2}$. Имеем $k = 2, n^+ - k = 3 - 2 = 1, n^- - k = 4 - 2 = 2$. Существуют два разбиения $\lambda \vdash 2$: (2) и $(1, 1)$. Рассмотрим все возможные комбинации диаграмм Юнга, полученные добавлением 1 и 2 клеток соответственно к каждому из разбиений.



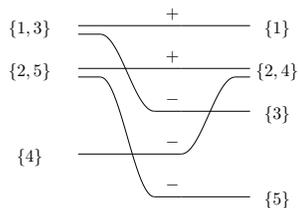
Просуммировав произведения многочленов Шура от соответствующих серий переменных, получаем

$$\begin{aligned} X_{3,4,2} = & \mathcal{S}_3(u^+) \mathcal{S}_4(u^-) + \mathcal{S}_3(u^+) \mathcal{S}_{31}(u^-) + \mathcal{S}_3(u^+) \mathcal{S}_{22}(u^-) \\ & + \mathcal{S}_{21}(u^+) \mathcal{S}_4(u^-) + \mathcal{S}_{21}(u^+) \mathcal{S}_{31}(u^-) + \mathcal{S}_{21}(u^+) \mathcal{S}_{22}(u^-) \\ & + \mathcal{S}_{21}(u^+) \mathcal{S}_3(u^-) + \mathcal{S}_{21}(u^+) \mathcal{S}_{21}(u^-) \\ & + \mathcal{S}_{111}(u^+) \mathcal{S}_3(u^-) + \mathcal{S}_{111} v \mathcal{S}_{21}(u^-). \end{aligned}$$

3.2. Алгебра переходов. Пусть s_1, s_2 — состояния на множестве $N_n = [1, \dots, n]$ с разбиением $N_n = N_n^+ \sqcup N_n^-$. *Переход* это пара состояний (s_1, s_2) . Мы изображаем переход графически в виде набора из n отрезков кривых, занумерованных числами от 1 до n и помеченных знаками “+” и “-” в зависимости от принадлежности номера отрезка i к множеству N^+ или N^- соответственно. Так, например, для $N_n^+ = [1, 2]$, $N_n^- = [3, 4, 5]$ и



переход (s_1, s_2) имеет вид:



Левые концы отрезков склеены в соответствии с состоянием s_1 , а правые — в соответствии с состоянием s_2 .

Обозначим через T_{n^+, n^-} *пространство переходов*, т.е. пространство формальных линейных комбинаций переходов на множестве $N_n = N_n^+ \sqcup N_n^-$. Это пространство изоморфно $V_{n^+, n^-}^{\otimes 2}$, и его размерность равна $(\dim V_{n^+, n^-})^2 = |I_{n^+, n^-}|^2$.

Зададим умножение на элементах базиса в пространстве T_{n^+,n^-} правилом

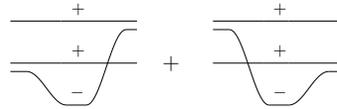
$$(s_l, s_r) * (s'_l, s'_r) = \begin{cases} (s_l, s'_r), & \text{если } s_r = s'_l, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и продолжим на всё пространство по линейности.

Графически произведение элементов пространства T_{n^+,n^-} изображается как результат конкатенации двух последовательных переходов, если такая конкатенация возможна. Пространство T_{n^+,n^-} с умножением $*$ превращается в некоммутативную алгебру.

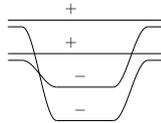
Единицей в алгебре T_{n^+,n^-} является сумма $e_{n^+,n^-} = \sum_{s \in I_{n^+,n^-}} (s, s)$. Легко видеть, что $e_{n^+,n^-} * t = t = t * e_{n^+,n^-}$ для всякого $t \in T_{n^+,n^-}$.

Типом перехода назовём класс эквивалентности переходов относительно действия группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ перестановками множеств N^+ и N^- . Алгебра типов переходов $A_{n^+,n^-} = T_{n^+,n^-}^{S_{n^+} \times S_{n^-}}$ это подалгебра в T_{n^+,n^-} , состоящая из элементов, инвариантных относительно действия группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$. В качестве базиса алгебры A_{n^+,n^-} возьмём суммы элементов орбит действия группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ на базисе пространства T_{n^+,n^-} перестановками множеств N_n^+ и N_n^- . Например, для $n^+ = 2$ и $n^- = 1$ этот базис содержит следующий элемент:



Пусть r, s — два состояния на множестве N_n . Назовём переход (r, s) *связным*, если множество N_n нельзя разбить на два непустых подмножества, инвариантных относительно обеих инволюций r и s .

Назовём связный переход (r, s) *замкнутым*, если соответствующие разбиения r и s содержат только двухэлементные подмножества. Например, следующий связный переход замкнутый:



Для связных незамкнутых переходов определим знак перехода. Если связный незамкнутый переход (r, s) содержит четное число элементов, то он имеет положительный или отрицательный знак в зависимости от того, являются ли оба его конца единичными элементами в состоянии r или s соответственно. Например, левая диаграмма имеет положительный знак, а правая — отрицательный:



Если связный незамкнутый переход (r, s) содержит нечетное число элементов $n = n^+ + n^-$, то состояния r и s содержат по одному одноэлементному подмножеству. Знаки этих одноэлементных подмножеств совпадают. Действительно, одноэлементные подмножества имеют положительный знак, если $n^+ > n^-$, и отрицательный, если $n^+ < n^-$. Знак перехода (r, s) совпадает со знаком любого из одноэлементных подмножеств состояний r и s . Так, следующие диаграммы имеют положительный знак:



Заметим, что свойства связности, замкнутости и знак перехода сохраняются при действии группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$.

В выбранном нами базисе пространства A_{n^+, n^-} каждый элемент является набором связных типов переходов. Сопоставим каждому связному типу перехода одну из букв $\{p_k^+, p_k^-, q_l\}$ в соответствии со следующим правилом. Связному замкнутому переходу длины $2l$ поставим в соответствие переменную q_l . Связному незамкнутому положительному переходу длины k поставим в соответствие переменную p_k^+ , отрицательному — переменную p_k^- . Индексы переменных p_k^\pm совпадают с мощностью множества определения перехода, индексы переменных q_l вдвое меньше этой мощности. Вот базисы алгебр A_{n^+, n^-} , $n^+ + n^- = 2$, кодированные таким образом:

$$\begin{aligned} A_{1,1} &: \{p_1^+ p_1^-, q_1, p_2^+, p_2^-\} \\ A_{2,0} &: \{(p_1^+)^2\} \\ A_{0,2} &: \{(p_1^-)^2\} \end{aligned}$$

Степень $n = n^+ + n^-$ мономов в A_{n^+, n^-} равна сумме степеней переменных в мономе. При этом степени переменных определяются равенствами $\deg(q_l) = 2l$, $\deg(p_k^\pm) = k$. Так, $\deg((p_1^+)^5 (p_3^-)^7 q_2^6) = 1 \cdot 5 + 2(2 \cdot 6) + 3 \cdot 7 = 50$ и $p_1^5 q_2^6 (p_3^-)^7 \in A_{50}$.

Умножение в алгебре A_{n^+, n^-} индуцировано умножением в T_{n^+, n^-} . Например, таблица умножения в алгебре $A_{2,1}$ имеет следующий вид:

*	$(p_1^+)^2 p_1^-$	$p_1^+ p_2^+$	$p_1^+ p_2^-$	$p_1^+ q_1$	p_3^+
$(p_1^+)^2 p_1^-$	$(p_1^+)^2 p_1^-$	$p_1^+ p_2^+$	0	0	0
$p_1^+ p_2^+$	0	0	$2(p_1^+)^2 p_1^-$	$p_1^+ p_2^+$	$p_1^+ p_2^+$
$p_1^+ p_2^-$	$p_1^+ p_2^-$	$p_1^+ q_1 + p_3^+$	0	0	0
$p_1^+ q_1$	0	0	$p_1^+ p_2^-$	$p_1^+ q_1$	p_3^+
p_3^+	0	0	$p_1^+ p_2^-$	p_3^+	$p_1^+ q_1$

Единица $e_{n^+, n^-} \in A_{n^+, n^-}$ представляется в виде $\sum_{\substack{k+l=n^+, \\ t+l=n^-}} (p_1^+)^k (p_1^-)^t q_1^l$.

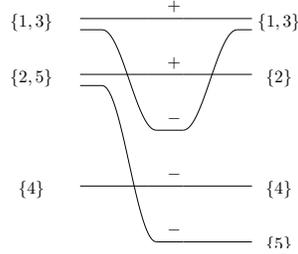
Теорема 10. Алгебра A_{n^+, n^-} полупроста для всех $n^+ = 1, 2, \dots$, $n^- = 1, 2, \dots$ и допускает разложение в прямую сумму

$$A_{n^+, n^-} = \bigoplus_{\substack{\lambda^+ \vdash n^+ \\ \lambda^- \vdash n^-}} \text{End}(\mathbb{C}^{c_{\lambda^+, \lambda^-}})$$

алгебр эндоморфизмов изотипических подпространств $\mathbb{C}^{c_{\lambda^+, \lambda^-}}$ неприводимых представлений $\lambda^+ \otimes \lambda^-$ в представлении ρ_{n^+, n^-} .

Следствие 3. Количество различных типов переходов для множества $N_n = N_n^+ \sqcup N_n^-$ равно $\dim A_{n^+, n^-} = \sum_{\substack{\lambda^+ \vdash n^+ \\ \lambda^- \vdash n^-}} c_{\lambda^+, \lambda^-}^2$.

3.3. Вещественные числа Гурвица и действие оператора cut-and-join как умножение на класс транспозиции в алгебре типов переходов. Переход называется *транспозицией*, если начальное и конечное состояния различаются двумя элементами, объединёнными в пару в одном из состояний и образующими два одноэлементных подмножества в другом:



Теорема 11 ([7]). Оператор умножения слева на класс транспозиции

$$\sum_{\substack{k+l=n^+-1 \\ t+l=n^- -1}} (p_2^+ + p_2^-) (p_1^+)^k (p_1^-)^t q_1^l$$

действует в алгебре A_{n^+, n^-} как дифференциальный оператор W^+ на многочленах степени $n = n^+ + n^-$ от переменных p_k^+, p_k^-, q_1 .

Пусть $\mu = (\kappa^+, \kappa^-, \lambda)$ — тройка разбиений, $|\mu| = |\kappa^+| + |\kappa^-| + 2|\lambda|$, $n^+ = |\kappa^+| + |\lambda|$, $n^- = |\kappa^-| + |\lambda|$. Каждая такая тройка описывает тип перехода на множестве $N_{|\mu|} = N_{|\mu|}^+ \sqcup N_{|\mu|}^-$. Обозначим через C_μ сумму всех переходов типа μ ; $C_\mu \in A_{n^+, n^-}$. Классы C_μ образуют базис в векторном пространстве A_{n^+, n^-} . Введём на A_{n^+, n^-} скалярное произведение, положив

$$(C_\mu, C_\nu) = \delta_{\mu, \nu} n^+! n^-! \frac{1}{|C_\mu|}. \quad (\star)$$

Теорема 12 ([7]). *Оператор W^+ на векторном пространстве A_{n^+, n^-} самосопряжён относительно скалярного произведения (\star) .*

Следствие 4 ([7]). *В векторном пространстве A_{n^+, n^-} у оператора W^+ есть собственный базис.*

Пусть $A_{n^+, n^-, k} \subset A_{n^+, n^-}$ — подпространство в пространстве типов переходов (s_1, s_2) , таких, что $s_1 \in V_{n^+, n^-, k}$. Мономы в разложении начального условия

$$e^{p_1^+ + p_1^- + q_1} = 1 + (p_1^+ + p_1^-) + \left(q_1 + p_1^+ p_1^- + \frac{(p_1^+)^2}{2} + \frac{(p_1^-)^2}{2} \right) + \dots$$

попарно ортогональны. При этом моном $(p_1^+)^i (p_1^-)^j q_1^k$ лежит в пространстве $A_{i+k, j+k, k}$.

Как и в случае §2, вычисление собственного базиса оператора W^+ трудоёмко. Выбирая подходящий базис, мы представляем W^+ в блочном виде. Поскольку оператор W^+ является оператором умножения на элемент алгебры A_{n^+, n^-} , справедлива следующая теорема.

Теорема 13. *Действие оператора W^+ на пространстве многочленов степени $n = n^+ + n^-$ раскладывается в прямую сумму его действия на подпространствах изотипических представлений группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$.*

Таким образом, для фиксированных n^+ и n^- вычисление однородной составляющей производящей функции $e^{p_1^+ + p_1^- + q_1}$ можно выполнить, действуя в соответствии со следующим алгоритмом:

- (1) найти разложение действия группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$ на пространстве состояний V_{n^+, n^-} на неприводимые;
- (2) для каждой из подалгебр $A_{n^+, n^-, k} \subset A_{n^+, n^-}$ алгебры переходов найти ее разложение в прямую сумму алгебр эндоморфизмов изотипических подпространств неприводимых представлений группы $S_{n^+} \times S_{n^-}$;
- (3) разложить действие оператора транспозиции W^+ в прямую сумму действий умножениями в каждой из алгебр эндоморфизмов изотипических подпространств;

- (4) разложить начальные условия по изотипическим подпространствам;
 (5) воспользовавшись знанием характеристического многочлена ограничения оператора транспозиции на изотипическое подпространство, выписать рациональную производящую функцию для вещественных чисел Гурвица, определяемых соответствующим изотипическим подпространством.

В качестве примера мы приводим результаты применения оператора W^+ к составляющим начального условия, отвечающим изотипическим подпространствам $A_{2,4}$.

Многочлены Шура $X_{2,4,k}$ представлений $\rho_{2,4,k}$ группы $S_2 \times S_4$ в пространствах $V_{2,4,k}$ имеют вид

$$X_{2,4,0} = \mathcal{S}_2(u^+) \mathcal{S}_4(u^-)$$

$$X_{2,4,1} = \mathcal{S}_2(u^+) \mathcal{S}_4(u^-) + \mathcal{S}_2(u^+) \mathcal{S}_{31}(u^-) + \mathcal{S}_{11}(u^+) \mathcal{S}_4(u^-) + \mathcal{S}_{11}(u^+) \mathcal{S}_{31}(u^-)$$

$$X_{2,4,2} = \mathcal{S}_2(u^+) \mathcal{S}_4(u^-) + \mathcal{S}_2(u^+) \mathcal{S}_{22}(u^-) + \mathcal{S}_2(u^+) \mathcal{S}_{31}(u^-) + \mathcal{S}_{11}(u^+) \mathcal{S}_{31}(u^-) + \mathcal{S}_{11}(u^+) \mathcal{S}_{211}(u^-),$$

Подпр-во	Представление, отвечающее изотипич. подпр-ву	Результаты вычислений
$A_{2,4,0}$	$\mathcal{S}_2(u^+) \mathcal{S}_4(u^-)$	<p>Подходящий базис: $e_1 = (p_1^-)^4 (p_1^+)^2$ $e_2 = 8(p_1^-)^3 (p_1^+ p_2^+)$ $e_3 = 8(p_1^-)^4 (p_1^+)^2 + 24(p_1^-)^2 (p_2^+)^2$</p> <p>Блок матрицы: $M_{\mathcal{S}_2(u^+) \mathcal{S}_4(u^-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$</p> <p>Производящая функция: $\sum_{n=0}^{\infty} W_{2,4,0}^n e_1 u^n = \frac{1}{1-14u^2} ((1-14u^2)e_1 + ue_2 + u^2 e_3)$</p>
$A_{2,4,1}$	$\mathcal{S}_2(u^+) \mathcal{S}_4(u^-)$	<p>Подходящий базис: $e_1 = q_1 (p_1^-)^3 p_1^+ + 3(p_1^-)^2 p_3^- p_1^+$ $e_2 = 4(p_1^-)^3 p_2^- p_1^+ + 3q_1 (p_1^-)^2 p_2^+ + 6p_1^- p_3^- p_2^+ + 3(p_1^-)^2 p_4^+$ $e_3 = 7q_1 (p_1^-)^3 p_1^+ + 21(p_1^-)^2 p_3^- p_1^+ + 21(p_1^-)^2 p_2^- p_2^+ + 7(p_1^-)^3 p_3^+$</p> <p>Блок матрицы: $M_{\mathcal{S}_2(u^+) \mathcal{S}_4(u^-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$</p> <p>Производящая функция: $\sum_{n=0}^{\infty} W_{2,4,1}^n e_1 u^n = \frac{1}{1-14u^2} ((1-14u^2)e_1 + ue_2 + u^2 e_3)$</p>

A _{2,4,1}	$\mathcal{S}_2(u^+)\mathcal{S}_{31}(u^-),$ $\mathcal{S}_{11}(u^+)\mathcal{S}_{31}(u^-)$	<p>Проекция e_1 начального условия на прямую сумму двух двумерных изотипических подпространств, образующих ядро оператора $(W^+)^2 - 2I$, имеет вид $e_1 = q_1(p_1^-)^3 p_1^+ - (p_1^-)^2 p_3^- p_1^+ - (p_1^-)^2 p_2^- p_2^+ + (p_1^-)^3 p_3^+$. Под действием оператора W^+ она переходит в вектор $e_2 = 2q_1(p_1^-)^2 p_2^+ - 4p_1^- p_3^- p_2^+ + 2(p_1^-)^2 p_4^+$.</p> <p>Блок матрицы: $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$ </p> <p>Производящая функция: $\sum_{n=0}^{\infty} W_{2,4,1}^n e_1 u^n = \frac{1}{1-2u} (e_1 + u e_2)$ </p> <p>Подходящий базис: $e_1 = -q_1(p_1^-)^3 p_1^+ + (p_1^-)^2 p_3^- p_1^+ - (p_1^-)^2 p_2^- p_2^+ + (p_1^-)^3 p_3^+$ $e_2 = -4q_1(p_1^-)^2 p_2^+ + 4(p_1^-)^2 p_4^+$ </p> <p>Блок матрицы: $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$ </p> <p>Производящая функция: $\sum_{n=0}^{\infty} W_{2,4,1}^n e_1 u^n = \frac{1}{1-4u} (e_1 + u e_2)$ </p>
A _{2,4,1}	$\mathcal{S}_{11}(u^+)\mathcal{S}_4(u^-)$	<p>В качестве базисного вектора можно взять собственный вектор: $e_1 = -(p_1^-)^3 p_2^- p_1^+ + q_1(p_1^-)^2 p_2^+ + 2p_1^- p_3^- p_2^+ + (p_1^-)^2 p_4^+$ </p> <p>Блок матрицы: $M_{\mathcal{S}_{11}(u^+)\mathcal{S}_4(u^-)} = (0),$ </p>
A _{2,4,2}	$\mathcal{S}_2(u^+)\mathcal{S}_4(u^-)$	<p>Подходящий базис: $e_1 = 4q_1^2(p_1^-)^2 + q_2(p_1^-)^2 - 3q_1 p_1^- p_3^- + 5(p_3^-)^2 + 3p_1^- p_5^-$ $e_2 = 5q_1(p_1^-)^2 p_2^- + 10p_1^- p_2^- p_3^- + 5(p_1^-)^2 p_4^-$ $e_3 = 5q_1^2(p_1^-)^2 + 5q_2(p_1^-)^2 + 20(p_1^-)^2(p_2^-)^2 + 20q_1 p_1^- p_3^- + 10(p_3^-)^2 + 20p_1^- p_5^-$ </p> <p>Блок матрицы: $M_{\mathcal{S}_2(u^+)\mathcal{S}_4(u^-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ </p> <p>Производящая функция: $\sum_{n=0}^{\infty} W_{2,4,2}^n e_1 u^n = \frac{1}{1-14u^2} ((1-14u^2)e_1 + u e_2 + u^2 e_3)$ </p>

$A_{2,4,2}$	$\mathcal{S}_2(u^+)\mathcal{S}_{22}(u^-),$ $\mathcal{S}_{11}(u^+)\mathcal{S}_{211}(u^-)$	В качестве базисных векторов можно взять собственные векторы. Однако блоки матриц нулевые: $M_{\mathcal{S}_2(u^+)\mathcal{S}_{22}(u^-)} = (0),$ $M_{\mathcal{S}_{11}(u^+)\mathcal{S}_{211}(u^-)} = (0),$ как и соответствующая производящая функция.
$A_{2,4,2}$	$\mathcal{S}_2(u^+)\mathcal{S}_{31}(u^-),$ $\mathcal{S}_{11}(u^+)\mathcal{S}_{31}(u^-)$	Подходящий базис первого двумерного подпространства: $e_1 = -q_1^2(p_1^-)^2 - q_2(p_1^-)^2 + 2(p_3^-)^2$ $e_2 = -2q_1(p_1^-)^2 p_2^- + 4p_1^- p_2^- p_3^- - 2(p_1^-)^2 p_4^-$ Блок матрицы: $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$ Производящая функция: $\sum_{n=0}^{\infty} W_{2,4,2}^n e_1 u^n = \frac{1}{1-2u} (e_1 + ue_2)$ Подходящий базис второго двумерного подпространства: $e_1 = -q_1^2(p_1^-)^2 + q_2(p_1^-)^2 - 2q_1 p_1^- p_3^- + 2p_1^- p_5^-$ $e_2 = -2q_1(p_1^-)^2 p_2^- + 4p_1^- p_2^- p_3^- - 2(p_1^-)^2 p_4^-$ Блок матрицы: $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$ Производящая функция: $\sum_{n=0}^{\infty} W_{2,4,2}^n e_1 u^n = \frac{1}{1-4u} (e_1 + ue_2)$

Список литературы

- [1] Ekedahl T., Lando S., Shapiro M., Vainshtein A., *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves*, Invent. Math. **146** (2001), no. 2, 297–327.
- [2] Goulden I. P., Jackson D. M., *Transitive factorisations into transpositions and holomorphic mappings on the sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 1, 51–60.
- [3] Hurwitz A., *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, Math. Ann. **41** (1892), no. 3, 403–442.
- [4] Itenberg I., Zvonkine D., *Hurwitz numbers for real polynomials*, Comment. Math. Helv. **93** (2018), no. 3, 441–474. MR3854898
- [5] Inglis N. F. J., Richardson R. W., Saxl J., *An explicit model for the complex representations of S_n* , Arch. Math. (Basel) **54** (1990), no. 3, 258–259.
- [6] Казарян М. Е., Ландо С. К., *Комбинаторные решения интегрируемых иерархий*, Успехи мат. наук **70** (2015), №3, 77–106.
- [7] Kazarian M., Lando S., *On framed simple purely real Hurwitz numbers*, arXiv preprint arXiv:1809.04340, 2018.
- [8] Kodiyalam V., Verma D.-N., *A natural representation model for symmetric groups*, arXiv preprint math/0402216, 2004.

- [9] Lando S. K., Zvonkin A. K., *Graphs on surfaces and their applications*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 141, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [10] Ландо С. К., *Введение в дискретную математику*, МЦНМО, М., 2012.
- [11] Натанзон С. М., *Дисковые одинарные числа Гурвица*, Функци. анал. и его прил. **44** (2010), №1, 44–58.
- [12] Okounkov A., *Toda equations for Hurwitz numbers*, Math. Res. Lett. **7** (2000), no. 4, 447–453.
- [13] Stanley R. P., *Enumerative combinatorics*. Vol. 1, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 49, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

Национальный
исследовательский университет
Высшая школа экономики
E-mail: evgeny12@mail.ru

Поступило 25 ноября 2022 г.