Зоногоны

А.УСТИНОВ

Что такое зоногон?

Определение 1. *Зоногон* – это выпуклый многоугольник с четным количеством сторон, которые можно разбить на пары равных и параллельных.

Примерами зоногонов являются параллелограмм и любой правильный многоугольник с четным числом сторон. Нетрудно увидеть, что зоногон всегда имеет центр симметрии (рис. 1). И действительно, это свойство является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выпуклый многоугольник был зоногоном.

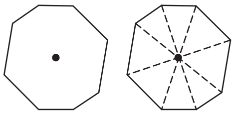

Рис. 1

Предложение 1. *Выпуклый многоугольник является зоногоном тогда и только тогда, когда имеет центр симметрии.*

Доказательство. Если выпуклый многоугольник имеет центр симметрии, то он является зоногоном по определению.

Докажем утверждение в другую сторону. Пусть AB и BC – две последовательные стороны данного зоногона (рис.2). Тогда найдутся равные и параллельные им стороны $A'B'$ и $B'C'$. Обозначим через O середину диагонали AA'. Тогда O – центр параллелограмма $ABA'B'$, а значит, и середина диагонали BB'. Повторяя это рассуждение, получаем, что O – середина диагонали CC' и т.д. Значит, O – центр симметрии данного многоугольника.

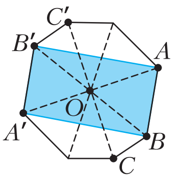

Рис. 2

Предложение 2. *Выпуклый многоугольник является зоногоном тогда и только тогда, когда его можно разбить на параллелограммы.*

Доказательство. Предположим, что имеется зоногон. Простейший способ построить нужное разбиение – это рассмотреть цепочку параллелограммов, соединяющую две противоположные стороны a_n, $\tilde{a}_n$ и идущую вдоль границы данного зоногона (рис. 3). Отбросив эту цепочку, мы получаем новый

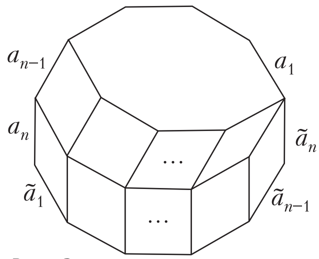

Рис. 3

зоногон, у которого число сторон уменьшилось на 2. Повторяя процедуру, мы в конце концов придем к параллелограмму.

Докажем утверждение в другую сторону. Предположим, что выпуклый многоугольник M разрезан на параллелограммы. Согласно предложению 1, достаточно доказать, что для любой стороны данного многоугольника найдется другая сторона, которая ей равна и параллельна. Рассмотрим произвольную сторону a многоугольника M, будем считать ее горизонтальной. Выделим в разбиении те параллелограммы, которые имеют стороны, параллельные a (рис.4). Нижние стороны этих параллелограммов превратим в векторы, направленные вправо, а из верхних сделаем векторы, направленные влево. С одной стороны, сумма всех этих векторов равна нулю. С другой стороны, все векторы,

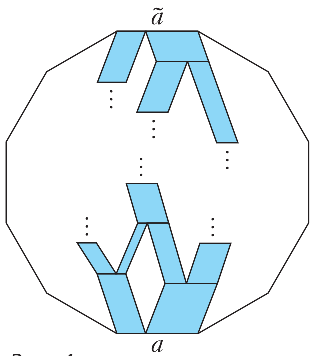

Рис. 4

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20240902

находящиеся внутри многоугольника, также сокращаются друг с другом. Следовательно, сумма векторов на границе многоугольника также равна нулю. Поскольку многоугольник выпуклый, эта сумма состоит из двух векторов, являющихся противоположными сторонами данного многоугольника. Так как их сумма равна нулю, то эти векторы, а значит, и соответствующие им стороны, имеют равную длину.

Замечание 1. Если в качестве зоногона выбрать правильный $2n$-угольник, то процедура, использованная в доказательстве предложения 2, приводит к разбиению на ромбы. Примеры таких разбиений показаны на рисунке 5.

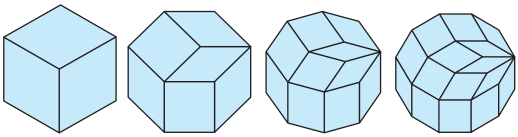

Рис. 5

Замечание 2. Пространственным аналогом зоногона является *зоноэдр* – выпуклый центрально симметричный многогранник, у которого все грани также центрально симметричны. На рисунке 6 изображен пример зоноэдра – усеченный октаэдр.

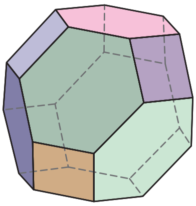

Рис. 6

Зоногоны и зоноэдры впервые появились в трудах российского кристаллографа Евграфа Степановича Федорова [1]. Там же впервые была изложена главная идея, которую мы будем многократно использовать в дальнейшем, – строить цепочки из параллелограммов, соприкасающихся параллельными сторонами.

Федоров называл зоногоны *парносторонниками*, а зоноэдры – *парногранниками*. Мы же будем придерживаться более современной терминологии. В книге [2] для зоногонов используется еще одно название – *параллельно-сторонние* $2n$-*угольники*.

Разбиение правильного шестиугольника на ромбы

Следующая задача предлагалась на осеннем Турнире городов 1989 года.[1]

[1] Автор задачи – В.Произволов, см. также задачу М1213 «Задачника «Кванта».

Задача 1. *Правильный шестиугольник со стороной n разбит на ромбы со стороной* 1 *и углами* 60° *и* 120°. *Ромбы разбиваются на три вида в зависимости от их ориентации (т. е. одинаковыми мы считаем те и только те ромбы, которые можно совместить параллельным переносом (рис. 7).*

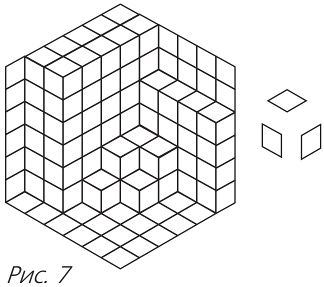

Рис. 7

Докажите, что в замощении присутствует равное число ромбов каждого вида.

Мы рассмотрим несколько решений этой задачи, каждое из которых по-своему интересно и полезно.

Первое решение задачи 1: выход в пространство.[2] Если раскрасить ромбы в три цвета в зависимости от их ориентации, то в замощении можно увидеть набор единичных кубиков, сложенных в коробку $n \times n \times n$. Каждый кубик расположен так, чтобы быть максимально близко к некоторому фиксированному углу коробки. Для нас это будет дальний нижний угол, в котором сходятся пол и две стенки, назовем их левой и правой. Ту поверхность, которую образуют свободные грани кубиков, будем называть *ортогональной поверхностью* (рис.8).

Будем обозначать стены пустой коробки буквами L (*левая*), R (*правая*) и H (*горизонтальная*) (рис.9). Ромбы в зависимости

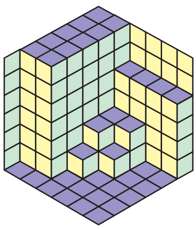

Рис. 8

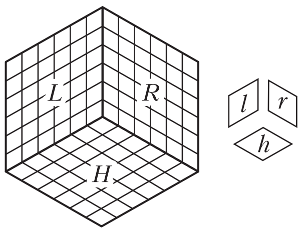

Рис. 9

[2] О других задачах, решаемых с помощью выхода в пространство, включая использование четвертого измерения, можно прочитать в статьях [3], [4], [5].

от ориентации также будем обозначать буквами l, r, h и называть *левыми*, *правыми*, *горизонтальными* (например, левый ромб ориентирован так же, как и левая стена).

Глядя на эту конструкцию сверху, мы видим верхние грани кубиков и часть пола, которая кубиками не покрыта. Всей этой поверхности площади n^2 соответствует n^2 ромбов, ориентация которых совпадает с ориентацией пола. Глядя, например, справа, мы увидим правые грани кубиков и часть левой стены L, которую они не закрывают. Этим поверхностям будут соответствовать ромбы вида l, ориентация которых совпадает с ориентацией левой стенки. Аналогичной будет и ситуация с правой стенкой R и правыми ромбами вида r.

Казалось бы, что на этом решение можно и закончить. Но, строго говоря, здесь нужно еще проверить, что произвольному замощению ромбами действительно соответствует реальная конструкция из кубиков, а не какая-нибудь невозможная фигура. Например, если пытаться строить замощение не правильного, а какого-нибудь случайного шестиугольника с целыми сторонами и углами 60° и 120°, то, как правило, будут получаться изображения невозможных объектов (рис. 10).

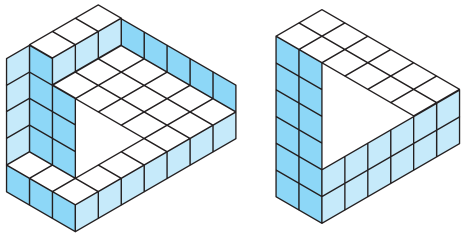

Рис. 10

Докажем корректность выхода в трехмерное пространство.

Предложение 3. *Произвольное замощение правильного шестиугольника ромбами можно представить как проекцию некоторой ортогональной поверхности.*

Доказательство. Для того чтобы построить требуемую конструкцию из кубиков, присвоим всем вершинам ромбов пространственные координаты (x, y, z), где x, y, z – целые числа в пределах от 0 до n. Верхней вершине шестиугольника присвоим координаты $(0,0,n)$. Затем будем последовательно переходить к соседним вершинам так, как будто мы двигаемся по ортогональной поверхности (рис.11): шаг по вертикальному отрезку вниз уменьшает на 1 координату z, шаг влево вниз увеличивает на 1 координату x, а шаг вправо вниз увеличивает на 1 координату y. Естественно, мы считаем, что движение в противоположном направлении приводит к противоположному результату. Если эта процедура не приведет к противоречию, то по пространственным координатам вершин мы построим трехмерную поверхность и соответствующее ей расположение кубиков.

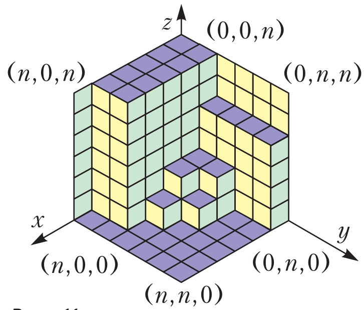

Рис. 11

Противоречие может получиться, если, дойдя по разным путям до одной и той же точки, мы должны будем присвоить ей разные координаты. Это равносильно тому, что существует некоторый цикл, пройдя по которому, мы получим в исходной точке другие координаты. Цикл можно последовательно стянуть в точку, уменьшая на каждом шаге его внутренность на один ромб. Правила расстановки координат гарантируют, что на каждом шаге такого процесса значения координат в оставшихся вершинах цикла меняться не будут. Когда цикл стянется в точку, мы получим противоречие с предположением, что координаты расставлены некорректно.

На рисунке 12 для конкретного цикла изображены три шага процесса стягивания. На третьем шаге цикл превратился в объединение двух циклов. Так как каждый

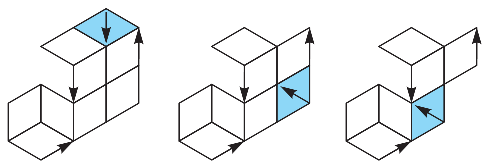

Рис. 12

из них стал короче, то для них утверждение можно считать доказанным. Значит, оно будет справедливым и для их объединения.

Цепочки де Брёйна

Определение 2. Разбиение зоногона на параллелограммы будем называть *регулярным*, если параллелограммы в нем примыкают друг к другу целыми сторонами.

Другими словами, в регулярном разбиении любые два соседних параллелограмма разбиения (т.е. такие, которые имеют общий отрезок границы) должны иметь общую сторону. Например, разбиения, изображенные на рисунках 5 и 7 – регулярные, а разбиение на рисунке 4 – нет, поскольку там есть параллелограммы, сторона которых является частью сторон двух других параллелограммов.

Если разбиение нерегулярно, то можно произвести дополнительные разрезания, которые превратят его в регулярное (см. штриховые линии на рисунке 13).

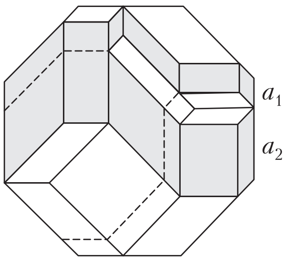

Рис. 13

При этом понадобится лишь конечное число дополнительных разрезов, поскольку количество проблемных ситуаций, когда к одной стороне примыкает несколько других сторон, с каждым разом будет уменьшаться.

При доказательстве предложения 2 мы рассматривали семейства параллелограммов, соединенных сторонами. Эта конструкция естественным образом приводит к понятию *зоны*, благодаря которому зоногоны и получили свое название.

Определение 3. Если П – некоторый параллелограмм разбиения и a – его сторона, то объединение всех параллелограммов, в которые можно попасть, начиная с П и двигаясь через стороны, параллельные a, называется *зоной* и обозначается $Z(a)$.

В регулярном разбиении каждая зона представляет собой последовательность параллелограммов, соединенных общими сторонами, и называется *цепочкой де Брёйна*.

На рисунке 13 видно, как при переходе к регулярному разбиению зона $Z(a)$ распадается в объединение двух цепочек (зон) $Z(a_1)$ и $Z(a_2)$.

Де Брёйн использовал такие цепочки параллелограммов в качестве инструмента для изучения квазикристаллов ([6], [7]). О квазикристаллах и мозаиках Пенроуза журнал «Квант» рассказывал в статье [8]. На рисунке 14[3] можно видеть цепочки де Брёйна на мозаике Пенроуза.

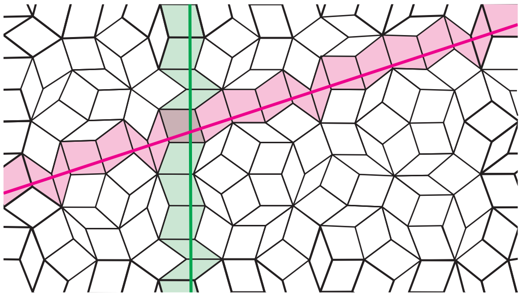
Рис. 14

Теорема 1 (свойства цепочек де Брёйна).

1°. *Две цепочки, соединяющие одну и ту же пару параллельных сторон, не пересекаются.*

2°. *Две цепочки, соединяющие разные пары параллельных сторон, пересекаются ровно по одному параллелограмму.*

3°. *Пусть цепочка де Брёйна соединяет стороны зоногона, находящиеся на расстоянии h друг от друга, и состоит из параллелограммов с общим основанием a. Тогда суммарная площадь всех параллелограммов цепочки равна ah.*

Доказательство. 1°. Каждый параллелограмм в цепочке выбранного направления однозначно определяет всю цепочку. Поэтому, если две цепочки, соединяющие пару параллельных сторон, имеют общий параллелограмм, то они совпадают.

2°. Если предположить, что две выбранные цепочки имеют по крайней мере два общих параллелограмма, то из соображений непрерывности следует, что цепочки пересекутся еще раз. Действительно, нарисуем

[3] Рисунок взят из книги [9].

параллелограмм $ABCD$, стороны которого являются продолжениями сторон общих параллелограммов двух цепочек (рис.15). Тогда зеленая цепочка параллелограммов соединяет стороны AB и CD, а красная – стороны BC и AD. Значит, они должны иметь общий параллелограмм внутри $ABCD$. Получается, что между двумя общими параллелограммами должен оказаться еще один общий параллелограмм той же ориентации. Значит, таких параллелограммов бесконечно много, что невозможно.

3°. Утверждение следует из того, что все параллелограммы имеют равные основания, а их суммарная высота равна расстоянию между соединяемыми сторонами данного зоногона.

Второе решение задачи 1: цепочки де Брёйна. Пусть $ABCDEF$ – данный шестиугольник и n – длина его сторон. Поскольку шестиугольник разбивается на $6n^2$ правильных треугольников со стороной 1, общее число ромбов в разбиении должно быть $3n^2$, и достаточно проверить, что разбиение состоит из n^2 ромбов каждой ориентации.

Будем рассматривать ромбы фиксированной ориентации, например, такие, стороны которых параллельны отрезкам AB и CD. По каждому такому ромбу можно построить цепочку де Брёйна, т.е. последовательность ромбов, которая начинается на стороне AB, заканчивается на стороне ED и в которой каждые два соседних ромба имеют общую сторону, параллельную AB (рис.16). Всего получится n таких цепочек (по числу единичных отрезков на сторонах AB и CD). По построению никакие две из этих цепочек не будут иметь общих ромбов. Точно так же можно построить n цепочек, начинающихся на стороне AF, заканчивающихся на стороне CD, в каждой из которых соседние ромбы имеют общую сторону, параллельную AF.

Из теоремы 1 следует, что любые две цепочки разных направлений пересекаются ровно по одному параллелограмму (рис. 17). Таким образом, число ромбов выбранной ориентации равно числу пар цепочек, в которых первая цепочка соединяет стороны AB и ED, а вторая – стороны AF и CD. Значит, таких ромбов n^2.

Замечание 3. При решении этой задачи можно было не использовать в полной мере теорему 1. Цепочки де Брёйна разных направлений, очевидно, пересекаются. Имеется n^2 пар цепочек, в которых первая цепочка соединяет стороны AB и ED, а вторая – стороны AF и CD. Значит, таких ромбов n^2. Поэтому в замощении будет не менее n^2 ромбов выбранной ориентации. По тем же соображением будет не менее n^2 ромбов каждого вида. Так как общее число ромбов равно $3n^2$, то число ромбов каждого направления должно быть в точности равно n^2.

Проведенное рассуждение не только решает задачу, но и дает еще одно доказательство того факта, что цепочки де Брёйна разных направлений пересекаются ровно по одному ромбу.

Замечание 4. Мы двумя разными способами доказали, что две цепочки разных направлений пересекаются ровно один раз. Отсутствие второго пересечения можно

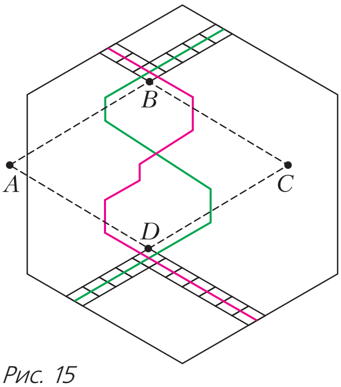

Рис. 15

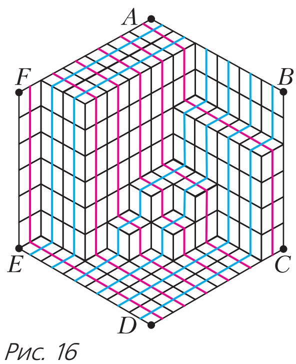

Рис. 16

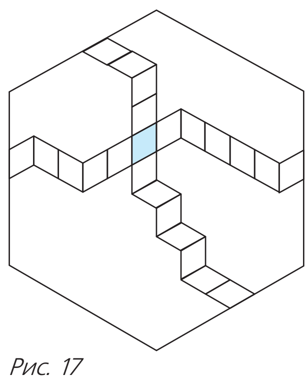
Рис. 17

обосновать, используя трехмерную интерпретацию разбиения на ромбы. При таком подходе каждая цепочка де Брёйна превратится в цепочку квадратов на ортогональной поверхности. При этом всем точкам будут присвоены пространственные координаты.

Рассмотрим красные и синие линии на рисунке 16. Точки на красной линии имеют координаты (x_0, y, z), где x_0 фиксировано, y непрерывно и монотонно меняется от 0 до n, а z – от n до 0 (при движении от отрезка AF к отрезку CD). Точки на синей линии имеют координаты (x, y_0, z), где y_0 фиксировано, x непрерывно и монотонно меняется от 0 до n, а z – от n до 0 (при движении от отрезка AB к отрезку DE). Из соображений непрерывности следует, что красная и синяя линии пересекутся при $x = x_0$, $y = y_0$, причем точка пересечения будет лежать в центре некоторой горизонтальной грани. Когда линии дойдут до границы этой грани, уже будут выполняться неравенства $x > x_0$, $y > y_0$ (рис.18).

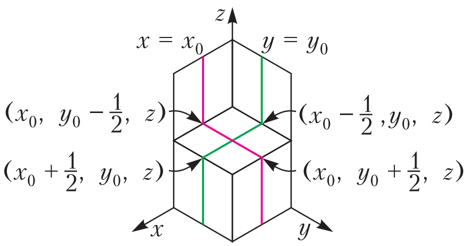

Рис. 18

Поскольку при движении по каждой из линий координаты меняются монотонно, повторное пересечение невозможно.

Красные и синие линии на рисунке 16 по своим свойствам напоминают обычные прямые: ломаные одного направления не пересекаются, а ломаные разных направлений пересекаются ровно в одной точке. Это наблюдение естественным образом приводит к понятию псевдопрямой.

Определение 4. *Псевдопрямой* называется бесконечная ломаная без самопересечений с конечным количеством точек излома в $\mathbb{R}^2$, концы которой «уходят на бесконечность» в противоположных направлениях.

Конфигурацией псевдопрямых называется такое конечное множество псевдопрямых на плоскости, что

1) любые две псевдопрямые или не имеют общих точек (в таком случае они называются *параллельными*), или имеют ровно одну общую точку, в которой пересекаются;

2) отношение параллельности транзитивно (т.е. если псевдопрямая пересекает одну из двух параллельных псевдопрямых, то она пересекает и вторую).

К конфигурации псевдопрямых на рисунке 16 можно дополнительно добавить еще одно семейство линий. Они будут соответствовать цепочкам де Брёйна, соединяющим стороны BC и EF шестиугольника $ABCDEF$. Тогда получится конфигурация псевдопрямых, изображенная на рисунке 19. Линии одного цвета здесь

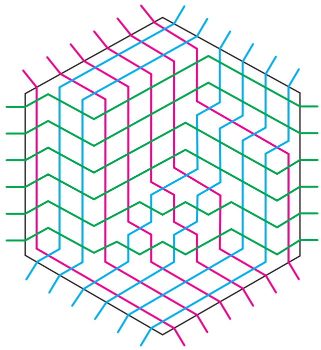

Рис. 19

«параллельны», две линии разных цветов пересекаются в одной точке, что соответствует свойствам 1°, 2° цепочек де Брёйна из теоремы 1.

Флипы

Различные разбиения зоногона на параллелограммы можно получать друг из друга, если использовать такую операцию как *флип*. Флип переставляет местами параллелограммы, образующие шестиугольник (поворачивает внутренность шестиугольника на 180°, рис.20).

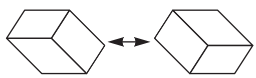

Рис. 20

В следующей задаче[4] флипы применяются для перестройки разбиений правильного шестиугольника на ромбы (т. е. тех разбиений, которые рассматривались в задаче 1).

[4] Задача М709 из «Задачника «Кванта», автор – А. Смирнов.

Задача 2. Ромбическое разбиение. *Правильный шестиугольник со стороной n разбит на ромбы со стороной 1 и острым углом 60°. Замощение внутри любого правильного шестиугольника со стороной 1 можно менять, как показано на рисунке 21. Докажите, что*

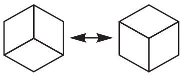

Рис. 21

а) из любого расположения плиток такими операциями можно получить любое другое;

б) это можно сделать не более чем за n^3 операций;

в) из расположения плиток на рисунке 22 нельзя получить расположение на рисунке 23 менее чем за n^3 операций.

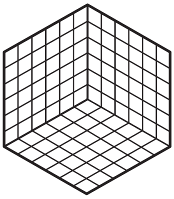

Рис. 22

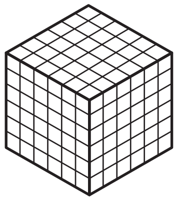

Рис. 23

Первое решение задачи 2: выход в пространство. При решении задачи 1 мы доказали, что произвольное разбиение правильного шестиугольника на ромбы можно понимать как изображение поверхности набора кубиков, сложенных в коробку $n \times n \times n$. Как и раньше, рисунок 22 мы будем понимать как пустую коробку, а рисунок 23 – как заполненную. Флипу соответствует добавление одного кубика в свободное «гнездо» или изъятие одного кубика, на котором не лежат другие. Тогда получается, что для перехода от конфигурации рисунка 22 к конфигурации рисунка 23 нужно уложить в коробку n^3 кубиков, и за меньшее число ходов этого сделать нельзя (число ходов может быть больше, если некоторые из них будут бесполезными, например, так будет, если вынимать уже добавленные кубики).

Пусть имеется два разбиения на ромбы, которым соответствуют пространственные конфигурации из кубиков Q_1 и Q_2. Тогда от Q_1 к Q_2 можно перейти двумя разными способами. Можно сначала вынуть все кубики из Q_1, а потом собрать Q_2, а можно – сначала достроить Q_1 до полной коробки, а потом так вынуть кубики, чтобы получилась Q_2. Если сделать эти два действия последовательно, то всего будет вынуто n^3 кубиков и добавлено n^3 кубиков, т.е. всего будет сделано $2n^3$ операций. Значит, хотя бы одно из этих действий требует не более n^3 операций.

Второе решение задачи 2: сведение к канонической конфигурации. Обозначим ромбы в зависимости от ориентации буквами l, r и h, как мы это делали в первом решении задачи 1 (см. рис. 9).

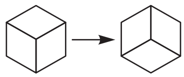

Рис. 24

Будем изменять замощения ромбами, используя флипы только одного типа (флипы «вниз», рис. 24).

В пространственной конструкции такому флипу соответствует вытаскивание одного кубика. На плоскости в результате применения одного такого флипа «горизонтальный» ромб опускается, «левый» ромб сдвигается вправо, а «правый» – влево. Так как ромбы каждого вида движутся только в одну сторону, то, начиная с произвольного замощения, мы придем к такому замощению, в котором дальнейшие флипы будут уже невозможны. Утверждается, что единственным таким замощением может быть то, которое соответствует пустой коробке (см. рис. 22). Назовем его *каноническим*.

Предположим, что это не так. Тогда найдется такой «горизонтальный» ромб h, что один из примыкающих к нему снизу ромбов имеет другую ориентацию, например, «правый» ромб r (рис. 25). Так как флипы невозможны, то к паре h и r справа примыкает аналогичная пара, со-

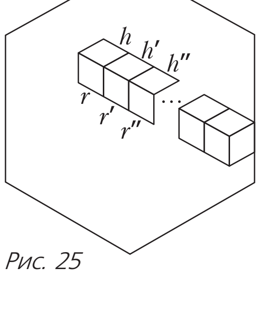

Рис. 25

стоящая из горизонтального и правого ромбов h' и r'. Продолжая рассуждать так же, мы получим бесконечную последовательность пар (h,r), (h',r'), (h'',r''), …, что невозможно.

Значит, если флипы невозможны, то под каждым горизонтальным ромбом могут находиться только горизонтальные, справа от правого ромба – только правые, а слева от левого – только левые. Следовательно, замощение является каноническим.

Из того, что произвольное замощение с помощью конечной последовательности флипов мы можем превратить в каноническому, следует, что любое замощение мы можем превратить и в любое другое.

Третье решение задачи 1: флипы. В решении задачи 2 мы доказали, что с помощью флипов любое замощение шестиугольника можно превратить в каноническое, в котором по n^2 ромбов каждого вида. Так как флипы переставляют ромбы, не меняя их ориентации, то в любом другом разбиении также будет n^2 ромбов каждого вида.

Литература

1. *Е.С.Федоров.* Начала учения о фигурах. – М.: Издательство Академии наук СССР, 1953. См. также первое издание книги: *Е.С.Федоров.* Начала учения о фигурах. – Типографія Императорской Академіи Наук, 1885.
2. *У.Болл, Г.Коксетер.* Математические эссе и развлечения. – М.: Мир, 1986.
3. *И.Шарыгин.* Выход в пространство. – «Квант», 1975, №5.
4. *В.Протасов.* Выход в пространство-2. – «Квант», 2017, № 12.
5. *В.Дубровский, И.Шарыгин.* Геометрический стереоскоп. – «Квант», 1993, № 1.
6. *N.G.de Bruijn.* Algebraic theory of Penrose's nonperiodic tilings of the plane I, II. – Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Indagations Mathematical, vol. 43,1981, № 1, p. 39–52, p. 53–66.
7. *N.G.de Bruijn.* Dualization of multigrids. – Journal de Physique Colloques, vol. 47, 1986, №3, p. 9-18.
8. *В.Корепин.* Узоры Пенроуза и квазикристаллы. – «Квант», 1987, № 6.
9. *F.D'Andrea.* A guide to Penrose tilings. – Springer, 2023.

(Продолжение следует)

(Начало см. на с. 2)

Наглядное объяснение? Наверное, только по форме. По сути, более глубокое знакомство с математической стороной решения все равно приведет к принципиально вероятностным квантовым характеристикам поведения электронов, где всякая наглядность исчезнет.

Почему физики-теоретики не удовлетворились одной квантовой теорией электропроводности, а создавали разные ее варианты? Дело в том, что квантовой теорией никак не удавалось объяснить явление сверхпроводимости. Открыто это явление было еще в 1911 году. Но его практическое использование до сих пор сдерживается возможностью применения только при сверхнизких температурах, требующих для их поддерживания жидкого гелия. А это очень недешево! Перед расходами не останавливаются, когда речь идет о крупных научных проектах (БАК, ИТЭР и др.). Но в «человеческой» области сверхпроводимость пока используется только в медицинской томографической диагностике (МРТ и т.п.).

Явление сверхпроводимости настолько интересно и в перспективе сулит человечеству такие замечательные практические применения, что вот уже больше пятидесяти лет его изучают во многих научных лабораториях. Десять физиков стали Нобелевскими лауреатами за исследования в области сверхпроводимости – три экспериментатора и семь теоретиков. Однако, несмотря на некоторые достижения, до сих пор не создано такой квантовой теории этого явления, которая позволила бы совершить скачок в его практическом применении.