Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. Е. Юдин, Модифицированный метод Гаусса–Ньютона для решения гладкой системы нелинейных уравнений, *Компьютерные исследования и моделирование*, 2021, том 13, выпуск 4, 697–723

DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-4-697-723

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 95.165.3.69
29 декабря 2024 г., 19:17:29

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2021 Т. 13 № 4 С. 697–723
DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-4-697-723

Ки&М

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 519.85

Модифицированный метод Гаусса–Ньютона для решения гладкой системы нелинейных уравнений

Н. Е. Юдин[1,2]

[1]Национальный исследовательский университет «Московский физико-технический институт», Россия, 141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9
[2]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2

E-mail: iudin.ne@phystech.edu

Получено 08.05.2021, после доработки — 24.06.2021.
Принято к публикации 30.06.2021.

В работе предлагается новая версия метода Гаусса–Ньютона для решения системы нелинейных уравнений, основанная на идеях использования верхней оценки нормы невязки системы уравнений и квадратичной регуляризации. Предложенная версия метода Гаусса–Ньютона на практике фактически задает целое параметризованное семейство методов решения систем нелинейных уравнений и задач восстановления регрессионной зависимости. Разработанное семейство методов Гаусса–Ньютона состоит целиком из итеративных методов, включающих в себя также специальные формы алгоритмов Левенберга–Марквардта, с обобщением на случаи применения в неевклидовых нормированных пространствах. В разработанных методах используется локальная модель, осуществляющая параметризованное проксимальное отображение и допускающая на практике применение неточного оракула в формате «черного ящика» с ограничением на точность вычисления и на сложность вычисления. Для разработанного семейства методов приведен анализ эффективности в терминах количества итераций алгоритма, точности и сложности представления локальной модели и вычисления оракула, параметров размерности решаемой задачи с выводом локальной и глобальной сходимости при использовании произвольного оракула. В работе представлены условия глобальной сублинейной сходимости для предложенного семейства методов решения системы нелинейных уравнений, состоящих из гладких по Липшицу функций. В рамках дополнительных естественных предположений о невырожденности системы нелинейных функций установлена локальная суперлинейная сходимость для рассмотренного семейства методов. При выполнении условия Поляка–Лоясиевича для системы нелинейных уравнений доказана локальная и глобальная линейная сходимость рассмотренных методов Гаусса–Ньютона. Помимо теоретического обоснования методов, в работе рассматриваются вопросы их практической реализации. В частности, в проведенных экспериментах для точного оракула приводятся схемы эффективного вычисления в зависимости от параметров размерности решаемой задачи. Предложенное семейство методов объединяет в себе несколько существующих и часто используемых на практике модификаций метода Гаусса–Ньютона, позволяя получить гибкий и удобный в использовании метод, реализуемый на практике с помощью стандартных техник выпуклой оптимизации и вычислительной линейной алгебры.

Ключевые слова: системы нелинейных уравнений, нелинейная регрессия, метод Гаусса–Ньютона, алгоритм Левенберга–Марквардта, методы доверительной области, невыпуклая оптимизация, неточное проксимальное отображение, неточный оракул, условие Поляка–Лоясиевича, оценка сложности

© 2021 Никита Евгеньевич Юдин
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2021 VOL. 13 NO. 4 P. 697–723
DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-4-697-723

Ки&М

NUMERICAL METHODS AND THE BASIS FOR THEIR APPLICATION

UDC: 519.85

Modified Gauss–Newton method for solving a smooth system of nonlinear equations

N. E. Yudin[1,2]

[1]National Research University «Moscow Institute of Physics and Technology»,
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, 141701, Russia
[2]Federal Research Center «Informatics and Control» of Russian Academy of Sciences,
44/2 Vavilova st., Moscow, 119333, Russia

E-mail: iudin.ne@phystech.edu

Received 08.05.2021, after completion — 24.06.2021.
Accepted for publication 30.06.2021.

In this paper, we introduce a new version of Gauss–Newton method for solving a system of nonlinear equations based on ideas of the residual upper bound for a system of nonlinear equations and a quadratic regularization term. The introduced Gauss–Newton method in practice virtually forms the whole parameterized family of the methods solving systems of nonlinear equations and regression problems. The developed family of Gauss–Newton methods completely consists of iterative methods with generalization for cases of non-euclidean normed spaces, including special forms of Levenberg–Marquardt algorithms. The developed methods use the local model based on a parameterized proximal mapping allowing us to use an inexact oracle of «black–box» form with restrictions for the computational precision and computational complexity. We perform an efficiency analysis including global and local convergence for the developed family of methods with an arbitrary oracle in terms of iteration complexity, precision and complexity of both local model and oracle, problem dimensionality. We present global sublinear convergence rates for methods of the proposed family for solving a system of nonlinear equations, consisting of Lipschitz smooth functions. We prove local superlinear convergence under extra natural non-degeneracy assumptions for system of nonlinear functions. We prove both local and global linear convergence for a system of nonlinear equations under Polyak–Lojasiewicz condition for proposed Gauss–Newton methods. Besides theoretical justifications of methods we also consider practical implementation issues. In particular, for conducted experiments we present effective computational schemes for the exact oracle regarding to the dimensionality of a problem. The proposed family of methods unites several existing and frequent in practice Gauss–Newton method modifications, allowing us to construct a flexible and convenient method implementable using standard convex optimization and computational linear algebra techniques.

Keywords: systems of nonlinear equations, nonlinear regression, Gauss–Newton method, Levenberg–Marquardt algorithm, trust rergion methods, nonconvex optimization, inexact proximal mapping, inexact oracle, Polyak–Lojasiewicz condition, complexity estimate

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 697–723 (Russian).

© 2021 Nikita E. Yudin
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Введение

Мотивация

Задача решения системы нелинейных уравнений является одной из наиболее фундаментальных в численных методах. В различных вариантах данная задача представлена в трудах и монографиях по численным методам и по численным методам в оптимизации [Самарский, Гулин, 1989; Nocedal, Wright, 2006; Nesterov, 2018; Гасников, 2020]. В общем виде *система нелинейных уравнений* задается через многозначное отображение $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$F(x) = \mathbf{0}_m, \quad \mathbf{0}_m = (0, \ldots, 0)^T. \tag{1}$$

В работе рассматривается следующая релаксация исходной задачи решения системы (не)линейных уравнений с помощью решения задачи безусловной минимизации (здесь и далее по умолчанию подразумевается, что $\|\ \|$ — стандартная евклидова норма в $\mathbb{R}^m$):

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \|F(x)\| \right\}. \tag{2}$$

Обычно введенную задачу минимизации решают через минимизацию $\frac{1}{2}\left(f_1(x)\right)^2$, дополнительно предположив достаточную гладкость получившейся функции или субдифференцируемость отображения f_1 [Gratton et al., 2007; Le et al., 2020; Botev et al., 2017; Cai et al., 2019; Ren, Goldfarb, 2019]. При таком подходе часто применяются *методы доверительной области* и *квазиньютоновские методы* для минимизации квадрата оптимизируемого функционала в (2) с применением различных стратегий [Le et al., 2020; Botev et al., 2017; Cai et al., 2019; Ren, Goldfarb, 2019; Thiele et al., 2020; Gargiani et al., 2020; Smietanski, 2020; Cartis, Roberts, 2019]. Однако подобные преобразования потенциально могут увеличить необходимое количество итераций для достижения требуемого ε-уровня значения функции f_1 из произвольного начального приближения $x_0 \in \mathbb{R}^n$ с помощью итерационного метода оптимизации. В частности, для линейного оператора F возведение в квадрат f_1 приводит к увеличению числа обусловленности задачи и к квадратичному росту количества необходимых итераций для достижения ε-оптимального решения задачи (2), что крайне ощутимо на практике при больших значениях mn. В качестве альтернативного подхода можно рассмотреть прямое решение задачи (2) с помощью *метода Гаусса–Ньютона*, заключающегося в сведении к решению последовательности вспомогательных задач оптимизации при условии гладкости функций F_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\begin{gathered} \min_{h\in\mathbb{R}^n} \left\{ \left\| F(x) + F'(x)h \right\| :\ x + h \in \mathrm{D}(x) \right\}, \\ F'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,\,j=1}^{m,\,n} \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ — матрица Якоби,} \end{gathered} \tag{3}$$

$\mathrm{D}(x)$ — соответствующая окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$. Среди полезных свойств такого сведения можно отметить отсутствие необходимости вычислять производные второго и более высоких порядков, а также возможность в естественных условиях невырожденности оптимизировать (2) с помощью последовательности задач (3) с локальной суперлинейной скоростью сходимости [Nocedal, Wright, 2006].

В данной работе предлагается другой подход к решению задачи (2). Он заключается в замене функции, измеряющей невязку системы уравнений (1), на евклидову норму, поделенную на квадратный корень количества уравнений m. Полученная невязка используется в построении

метода, решающего задачу (2) с помощью решения последовательности задач, в каждой из которых новое приближение решения (2) вычисляется как результат параметризованного проксимального отображения, в котором выполняется поиск точки минимума суммы верхней оценки линеаризованной по аналогии с (3) невязки на основе евклидовой нормы, поделенной на квадратный корень количества координат, и квадратичного проксимального слагаемого [Nesterov, 2007; Nesterov, 2021]. В рамках предложенного подхода при естественных для задач вида (2) и (3) предположениях установлено монотонное уменьшение значения функции f_1, а также локальная сублинейная и линейная сходимость [Nesterov, 2007]. В отличие от [Nesterov, 2007; Nesterov, 2021] в данной работе рассматриваются оба случая соотношения значений m и n: $m \leqslant n$ и $m > n$. Первый случай соответствует решению системы (не)линейных алгебраических уравнений, второй случай является задачей восстановления регрессии, решаемой методом наименьших квадратов. В данной работе представлен анализ локальной и глобальной сложности решения задачи (2) в рамках предложенного подхода, выведены условия локальной суперлинейной сходимости.

Условные обозначения

Введем обозначение конечномерного евклидова пространства с помощью буквы E (наравне с этим обозначением будут использованы обозначения с индексацией), для этого пространства зафиксируем стандартную евклидову норму $\|\ \|$. Обозначим евклидовы пространства E_1 с $\dim(E_1) = n$ и E_2 с $\dim(E_2) = m$. Определим сопряженное евклидово пространство E^* для пространства E как пространство линейных функций над E. Значение в точке $x \in E$ для функции $u \in E^*$ определяется скалярным произведением: $\langle u, x\rangle$. Для нормы $\|x\|$, $x \in E$, имеется классическое соотношение, связывающее с нормой $\|u\|$, $u \in E^*$:

$$\begin{cases} \|x\| = \max\limits_{u \in E^*} \{\langle u, x\rangle : \|u\| \leqslant 1\}; \\ \|u\| = \max\limits_{x \in E} \{\langle u, x\rangle : \|x\| \leqslant 1\}. \end{cases}$$

Из соотношения выше следует выполнение неравенства Коши–Буняковского–Шварца: $\langle u, x\rangle \leqslant \leqslant \|u\| \cdot \|x\|$.

Для гладкой по x функции $f : E_1 \to E_2$ обозначим вычисленную в точке $x \in E_1$ первую производную по x как $\nabla_x f(x)$ (в случае отсутствия неоднозначности при определении переменной дифференцирования индексация у ∇ опускается). Для $E_2 \equiv \mathbb{R}$ первую производную будем называть градиентом. Заметим, что $\nabla f(x) \in E_1^*$.

Далее, введенные обозначения позволяют определить сопряженный оператор $A^* : E_2^* \to E_1^*$ для оператора $A : E_1 \to E_2$:

$$\langle u, Ax\rangle = \langle A^* u, x\rangle, \quad u \in E_2^*, \quad x \in E_1.$$

Определим операторную норму для линейного оператора $A : E_1 \to E_2$ как максимальное сингулярное число матрицы оператора $\sigma_{\max}(A)$:

$$\|A\| = \sigma_{\max}(A) = \max_{x \in E_1} \{\|Ax\| : \|x\| \leqslant 1\} = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^*)} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)},$$

где $\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальное собственное значение оператора. Дополнительно обозначим с помощью $\|A\|_F$ фробениусову норму оператора A с матрицей $\left(a_{ij}\right)_{i,\,j=1}^{m,\,n}$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,\,j=1}^{m,\,n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(AA^*)} = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^*A)}.$$

Ясно, что $\|A\| \leqslant \|A\|_F$ по свойству следа оператора $\mathrm{Tr}(\cdot)$. Также введем минимальное сингулярное число матрицы данного оператора A:

$$\sigma_{\min}(A) = \min_{x \in E_1} \{\|Ax\| \colon \|x\| \leqslant 1\}.$$

Для многозначного отображения $F \colon E_1 \to E_2$ определим матрицу Якоби $F'(x)$ в точке $x \in E_1$ как матрицу линейного оператора из E_1 в E_2:

$$F'(x)h = \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} \left(F(x + th) - F(x) \right) \right) \in E_2, \quad h \in E_1.$$

Обозначим за $\overline{1, m}$ множество целых чисел от 1 до m включительно: $\{1, \ldots, m\}$. Положим также

$$f^* = \min_{x \in E_1} f(x),$$

определив минимальное возможное значение по аргументу x для функции f.

Модифицированный метод Гаусса–Ньютона

Вернемся к задаче поиска решения $x^* \in E_1$ гладкой нелинейной системы уравнений:

$$F(x) = \mathbf{0}_m, \tag{4}$$

где $F \colon E_1 \to E_2$ — гладкое многозначное отображение с матрицей Якоби $F'(x)$, $x \in E_1$. Для оценки близости текущего приближения к решению системы уравнений (4) рассмотрим следующую функцию невязки для системы с набором функций $\widehat{F}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{m}} F(x)$:

$$\widehat{f}_1(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{m}} \|F(x)\| = \left\| \widehat{F}(x) \right\|.$$

Используя функцию невязки $\widehat{f}_1(x)$, можно решить задачу (4) через сведение к задаче оптимизации без ограничений:

$$\widehat{f}_1^* = \min_{x \in E_1} \left\{ \widehat{f}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \|F(x)\| = \frac{1}{\sqrt{m}} \left\| \left(F_1(x), \ldots, F_m(x) \right)^T \right\| \right\}. \tag{5}$$

Существование решения задачи (4) равносильно $\widehat{f}_1^* = \widehat{f}_1(x^*) = 0$. В работе рассматривается итеративная процедура решения задачи (5), основанная на минимизации *локальной модели* оптимизируемого функционала:

$$\varphi(x, y) \overset{\text{def}}{=} \left\| \widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y - x) \right\|, \quad (x, y) \in E_1^2, \quad \widehat{F}'(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} F'(x).$$

Для классического метода Гаусса–Ньютона на каждой итерации $k \in \mathbb{Z}_+$ очередное приближение решения (4) вычисляется поиском точки минимума выпуклой по y функции $\varphi(x, y)$:

$$x_{k+1} \in \operatorname*{Argmin}_{y \in E_1} \left\{ \varphi(x_k, y) \right\}.$$

Однако добавление регуляризации к классической схеме метода Гаусса–Ньютона позволяет установить свойства локальной и глобальной эффективности всего метода. В данной работе проводится анализ регуляризованного метода Гаусса–Ньютона с модифицированной локальной моделью оптимизируемого функционала, предложенного в [Nesterov, 2021]. Для этого введем изначальные предположения о решаемой задаче. Рассмотрим $\mathcal{F} \subseteq E_1$ — замкнутое выпуклое множество с непустым подмножеством внутренних точек.

Предположение 1. *Пусть многозначное отображение $\widehat{F}(x)$ является гладким на $\mathcal{F}$ с липшиц-непрерывной матрицей Якоби:*

$$\exists L_{\widehat{F}} > 0\colon \left\|\widehat{F}'(y) - \widehat{F}'(x)\right\|_F \leqslant L_{\widehat{F}}\|y - x\| \quad \forall (x,\, y) \in \mathcal{F}^2. \tag{6}$$

Из предположения 1 по свойству соотношения операторной нормы и нормы Фробениуса следует неравенство

$$\left\|\widehat{F}'(y) - \widehat{F}'(x)\right\| \leqslant L_{\widehat{F}}\|y - x\|, \quad \forall (x,\, y) \in \mathcal{F}^2.$$

Введем понятие множества уровня $\mathcal{L}(v)$ для функции $\widehat{f_1}$:

$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x\colon \widehat{f_1}(x) \leqslant v\right\},$$

предположив, что

$$\mathcal{L}(\widehat{f_1}(x_0)) \subseteq \mathcal{F},\ x_0 \in \mathcal{F},\ -\text{ начальное приближение решения,}$$

то есть для каждого начального приближения x_0 во всей работе размер $\mathcal{F}$ предполагается достаточно большим, чтобы вся последовательность $\left\{x_k\colon \widehat{f_1}(x_k) \leqslant \widehat{f_1}(x_{k-1})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ принадлежала $\mathcal{F}$.

Предположение 2. *Пусть для многозначного отображения выполнено условие Поляка–Лоясиевича* [Поляк, 1963]:

$$\exists \mu > 0, \quad \sigma_{\min}(\widehat{F}'(x)^*) \geqslant \sqrt{\mu} \quad \forall x \in \mathcal{F}. \tag{7}$$

Из предположения 2 неявно следует неравенство $\dim(E_1) \leqslant \dim(E_2)$. Само предположение 2 называется условием Поляка–Лоясиевича, так как из него следует неравенство Поляка–Лоясиевича для функции $\widehat{f_2}$:

$$\left\|\nabla \widehat{f_2}(x)\right\|^2 = \left\|2\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}(x)\right\|^2 \geqslant 4\mu\left\|\widehat{F}(x)\right\|^2 = 4\mu\widehat{f_2}(x), \quad x \in \mathcal{F};$$
$$\widehat{f_2}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\widehat{f_1}(x)\right)^2, \quad x \in E_1.$$

В работе [Nesterov, 2021] предложена следующая локальная регуляризованная модель (мажоранта) оптимизируемой функции $\widehat{f_1}(y)$:

$$\widehat{f_1}(y) \leqslant \frac{\widehat{f_1}(x)}{2} + \frac{(\varphi(x,\, y))^2}{2\widehat{f_1}(x)} + \frac{L}{2}\|y - x\|^2, \quad L \geqslant L_{\widehat{F}}, \quad (x,\, y) \in \mathcal{F}^2. \tag{8}$$

Однако сейчас рассматривается более общая форма данной модели, называемая *общей локальной моделью*, вывод которой представлен в лемме из [Nesterov, 2021]:

$$\widehat{f_1}(y) \leqslant \psi_{x,L,\tau}(y) = \frac{\tau}{2} + \frac{(\varphi(x,\, y))^2}{2\tau} + \frac{L}{2}\|y - x\|^2, \quad L \geqslant L_{\widehat{F}}, \quad \tau > 0, \quad (x,\, y) \in \mathcal{F}^2.$$

Общая локальная модель позволяет ввести правило точного обновления приближения решения x в итерационной схеме регуляризованного метода Гаусса–Ньютона:

$$T_{L,\tau}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{argmin}_{y\in E_1}\left\{\psi_{x,L,\tau}(y)\right\}.$$

Анализ схемы метода

Разработанная схема обновления x объединяет в себе ранее предложенные модификации метода Гаусса–Ньютона, различающиеся выбором гиперпараметра предобусловливания τ: $\tau = \varphi(x, y)$ [Nesterov, 2007] и $\tau = \widehat{f_1}(x)$ [Nesterov, 2021]. В отличие от случая с $\tau = \varphi(x, y)$ модель $\psi_{x,L,\widehat{f_1}(x)}(y)$ является гладкой по y и позволяет однозначно вычислять $T_{L,\widehat{f_1}(x)}(x)$ в силу сильной выпуклости по y. Предлагаемая в работе модификация метода Гаусса–Ньютона является дальнейшим развитием метода *нормализованных квадратов*, предложенного Юрием Нестеровым в своем препринте [Nesterov, 2021], и описана в схеме 1.

Алгоритм 1. Общий метод нормализованных квадратов с неточным проксимальным отображением

Input:

$$\begin{cases} x_0 \in E_1,\ \mathcal{L}(\widehat{f_1}(x_0)) \subseteq \mathcal{F} \text{ — начальное приближение, } x_{-1} = x_0; \\ \mathcal{E}(\cdot) \text{ — функция погрешности проксимального отображения;} \\ N \in \mathbb{N} \text{ — количество итераций метода;} \\ L \text{ — оценка локальной постоянной Липшица, } L \in (0, L_{\widehat{F}}],\ L_0 = L; \\ \mathcal{T}(\cdot) \text{ — функция, определяющая значение } \tau. \end{cases}$$

for $k = 0, 1, \ldots, N - 1$ **do**

1. Определить $\tau_k = \mathcal{T}(x_k, L_k, \varepsilon_k)$, $\varepsilon_k = \mathcal{E}(k, x_k, x_{k-1})$.
2. Вычислить такой $x_{k+1} \in E_1$, что $\psi_{x_k,L_k,\tau_k}(x_{k+1}) - \psi_{x_k,L_k,\tau_k}(T_{L_k,\tau_k}(x_k)) \leqslant \varepsilon_k$ и $\widehat{f_1}(x_k) - \psi_{x_k,L_k,\tau_k}(x_{k+1}) \geqslant 0$.
3. Если $\widehat{f_1}(x_{k+1}) > \psi_{x_k,L_k,\tau_k}(x_{k+1})$, то положить $L_k := \min\left\{2L_k, 2L_{\widehat{F}}\right\}$ и вернуться к пункту 1.
4. $L_{k+1} = \max\left\{\frac{L_k}{2}, L\right\}$.

end for

Output: x_N.

В предложенном алгоритме рассматривается так называемый неточный оракул, который на каждой внешней итерации k в качестве x_{k+1} возвращает не точку минимума локальной модели, а приближение значения $T_{L_k,\tau_k}(x_k)$ с погрешностью $\varepsilon_k \geqslant 0$. Алгоритм 1 обладает определенным уровнем общности, выраженным в возможности динамически менять τ_k и ε_k на каждой итерации, формально это описано с помощью отображений $\mathcal{E}(\cdot)$ и $\mathcal{T}(\cdot)$, которые не всегда от всех обозначенных аргументов существенно зависят, однако позволяют обозначить формально частичную произвольность в выборе τ_k и ε_k, уточняемую в тексте работы в менее строгой форме, но достаточной для понимания концепции метода. Кроме общности, в разработанном алгоритме содержится адаптивный подбор локальной постоянной Липшица, построенный по принципу бинарного поиска на отрезке $[L, 2L_{\widehat{F}}]$, причем на практике не обязательно знать верхнюю границу отрезка поиска L_k, так как для $L_k \geqslant L_{\widehat{F}}$ локальная модель $\psi_{x_k,L_k,\tau_k}(\cdot)$ всегда корректно определена на $\mathcal{F}$ и неравенство в пункте 3 алгоритма 1 выполнено с противоположным знаком. Стоит отметить, что в алгоритме 1 на практике желательно выбирать достаточно малое значение $\varepsilon_k \geqslant 0$, чтобы было гарантированное уменьшение (выполнялось $\widehat{f_1}(x_k) > \psi_{x_k,L_k,\tau_k}(x_{k+1})$) до достижения

области неоднозначности, существование которой обусловлено наличием неточности при вычислении x_{k+1} на k-й итерации, причем не для каждого способа выбора τ_k может быть выполнено гарантированное уменьшение, и в данной работе условия теорем определяют способы, позволяющие добиться обозначенного уменьшения. Например, в алгоритме 1 на практике это часто приводит к присвоению $x_{k+1} = x_k$, если на k-м шаге не удалось подобрать x_{k+1}, для которого верно $\widehat{f_1}(x_k) \geqslant \psi_{x_k, L_k, \tau_k}(x_{k+1})$ при $\tau_k = \widehat{f_1}(x_k)$. Также на практике вместо правила $\widehat{f_1}(x_k) \geqslant \psi_{x_k, L_k, \tau_k}(x_{k+1})$ для обеспечения корректности алгоритма метода оптимизации 1 могут применяться следующие процедуры:

- выбор достаточно малого $\varepsilon_k \geqslant 0$ для гарантии выполнения отношения $x_{k+1} \in \mathcal{F}$: $\mathcal{L}(\widehat{f_1}(x_k) + \varepsilon_k) \subseteq \mathcal{F}$;
- введение «процедуры коррекции», например, проекции на множество $\mathcal{F}$ для каждого только что вычисленного x_{k+1}.

Неточное вычисление x_{k+1} в данной работе обозначено в виде «черного ящика» и на практике может быть представлено другим итерационным методом, например методом градиентного спуска, минимизирующим функционал $\psi_{x_k, L_k, \tau_k}(\cdot)$ на k-м шаге метода Гаусса–Ньютона; контроль за точностью вычисления x_{k+1} представлен с помощью сравнения значения функции $\psi_{x_k, L_k, \tau_k}(x_k)$ с минимальным значением $\psi_{x_k, L_k, \tau_k}(T_{L_k, \tau_k}(x_k))$, хотя эквивалентно можно сравнивать норму градиента локальной модели $\psi_{x_k, L_k, \tau_k}(x_{k+1})$.

Прежде чем перейти к оценке сходимости последовательности $\left\{x_k\right\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, построенной по предложенной схеме, рассмотрим две величины, оценивающие близость текущего приближения x_k к стационароной точке:

- норма обобщенного проксимального градиента — $\left\| L_k \left(T_{L_k, \tau_k}(x_k) - x_k \right) \right\|$;
- приращение локальной модели — $\Delta_r(x_k) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{f_2}(x_k) - \min\limits_{y \in E_1} \left\{ \left(\varphi(x_k, y) \right)^2 : \|y - x_k\| \leqslant r \right\}$, $r > 0$.

Обе величины позволяют определить множества стационарных точек, причем нетрудно установить эквивалентность данных определений:

- $\left\{ x^* : x^* \in E_1,\ \| L \left(T_{L, \tau}(x^*) - x^* \right) \| = 0\ \forall L > 0,\ \forall \tau > 0 \right\}$;
- $\left\{ x^* : x^* \in E_1,\ \Delta_r(x^*) = 0\ \forall r > 0 \right\}$.

С помощью введенных величин близости к стационарной точке установлена глобальная сублинейная сходимость к окрестности стационарной точки для метода, реализованного по алгоритму 1.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* 1, $k \in \mathbb{N}$, $r > 0$. *Тогда для метода Гаусса–Ньютона, реализованного по алгоритму* 1 *с* $\tau_k = \widehat{f_1}(x_k)$, $\varepsilon_k = \varepsilon \geqslant 0$, *верны следующие оценки:*

$$\begin{cases} \dfrac{8 L_{\widehat{F}}^2}{L} \left(\varepsilon + \dfrac{\left(\widehat{f_1}(x_0) - \widehat{f_1}(x_k) \right)}{k} \right) \geqslant \min\limits_{i \in \overline{0, k-1}} \left\{ \left\| 2 L_{\widehat{F}} \left(T_{2 L_{\widehat{F}}, \widehat{f_1}(x_i)}(x_i) - x_i \right) \right\|^2 \right\}; \\ L_{\widehat{F}} \left(\varepsilon + \dfrac{\left(\widehat{f_1}(x_0) - \widehat{f_1}(x_k) \right)}{k} \right) \geqslant \min\limits_{i \in \overline{0, k-1}} \left\{ 2 \left(L_{\widehat{F}} r \right)^2 \varkappa \left(\dfrac{\Delta_r(x_i)}{4 \widehat{f_1}(x_i) L_{\widehat{F}} r^2} \right) \right\}; \end{cases}$$

где $\varkappa(t) = \frac{t^2}{2} \mathbb{1}_{\{t \in [0, 1]\}} + \left(t - \frac{1}{2} \right) \mathbb{1}_{\{t > 1\}}$.

В теореме 1 утверждается аддитивность вклада в оценку сходимости двух факторов: погрешность вычисления проксимального отображения и количество итераций метода, из-за этого для достижения минимальной нормы проксимального градиента на уровне $\varepsilon > 0$ необходимо часть от ε^2 покрыть с помощью достаточно малого $\varepsilon \geqslant 0$, а оставшуюся часть — с помощью достаточно большого количества итераций.

Также полученные оценки указывают на ускорение метода при сужении отрезка поиска постоянной Липшица на каждой итерации вокруг истинного значения $L_{\widehat{F}}$. При выборе адаптивной стратегии вычисления x_{k+1} с постепенно уменьшающейся погрешностью ε_k до нулевого предельного значения возможно приближение к стационарной точке с любой наперед заданной точностью (следствие 1.1); более того, при фиксированном x_0 все получаемые стационарные точки x^* принадлежат связному множеству (следствие 1.2), хотя не все из них являются решениями системы (4), даже возможен случай, в котором ни одна из полученных стационарных точек не будет решением системы уравнений (4). Для наличия решений системы уравнений необходима совместность системы, в следующем утверждении содержатся условия локальной сходимости алгоритма 1 при наличии разрешимости (4).

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 1*, пусть для метода Гаусса–Ньютона с алгоритмом* 1 *существует* $x^* \in \mathcal{L}(\widehat{f}_1(x_0))$*,* $\widehat{F}(x^*) = \mathbf{0}_m$ *— решение с* $\sigma_{\min}\left(\widehat{F}'(x^*)\right) \geqslant \varsigma > 0$*. Дополнительно предположим ограниченность нормы матрицы Якоби: существует* $M_{\widehat{F}} > 0$*, для которого выполнено* $\left\|\widehat{F}'(x)\right\| \leqslant M_{\widehat{F}}$ *при всех* $x \in \mathcal{F}$*. Тогда в алгоритме* 1 *с*

$$\varepsilon_k = 0,\ \tau_k = \widehat{f}_1(x_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

в области

$$\|x_k - x^*\| \leqslant \min\left\{\frac{2\varsigma}{5L_{\widehat{F}}},\ \frac{1}{12L_{\widehat{F}}}\left(\left(3M_{\widehat{F}} + 5\varsigma\right) - \sqrt{\left(3M_{\widehat{F}} + 5\varsigma\right)^2 - 24\varsigma^2}\right)\right\}$$

выполнена оценка

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leqslant \frac{\frac{3L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|^2}{2} + \|x_k - x^*\|\sqrt{\tau_k L_k + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|x_k - x^*\|^2}{4}}}{\varsigma - L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|} < \|x_k - x^*\|.$$

Согласно теореме 2 в условиях невырожденности достаточно близкое нахождение к оптимуму позволяет решить задачу (5) с суперлинейной скоростью. Условия невырожденности в теореме 2 позволяют локально быстро решить задачу оптимизации, однако они неявно требуют выполнения соотношения $\dim(E_1) \leqslant \dim(E_2)$, то есть требуется при выполнении совместности системы наличие количества уравнений, не уступающего количеству параметров (следствие 2.1).

Для задач с $\dim(E_1) > \dim(E_2)$ гарантия наличия $\varsigma > 0$ уже пропадает, хотя остается возможность совместности системы уравнений, и если предположить невырожденность системы в виде условия из предположения 2, то имеет место локальная линейная сходимость к решению системы (4) согласно изложенному ниже утверждению.

Теорема 3. *Допустим выполнение предположений* 1 *и* 2 *для метода Гаусса–Ньютона с алгоритмом реализации* 1*, в котором* $\tau_k = \widehat{f}_1(x_k)$*. Тогда в алгоритме* 1 *для последовательности* $\left\{x_k\right\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ *выполняются следующие соотношения*:

$$\widehat{f}_1(x_{k+1}) \leqslant \varepsilon_k + \begin{cases} \dfrac{\widehat{f}_1(x_k)}{2} + \dfrac{L_{\widehat{F}}}{\mu}\widehat{f}_2(x_k) \leqslant \dfrac{3}{4}\widehat{f}_1(x_k),\ \textit{если } \widehat{f}_1(x_k) \leqslant \dfrac{\mu}{4L_{\widehat{F}}}; \\ \widehat{f}_1(x_k) - \dfrac{\mu}{16L_{\widehat{F}}},\ \textit{если иначе}. \end{cases}$$

Если при генерации последовательности $\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *была зафиксирована* $L_k = L_{\widehat{F}}$, *то данные соотношения выражаются по-другому:*

$$\widehat{f}_1(x_{k+1}) \leqslant \varepsilon_k + \begin{cases} \dfrac{\widehat{f}_1(x_k)}{2} + \dfrac{L_{\widehat{F}}}{2\mu}\widehat{f}_2(x_k) \leqslant \dfrac{3}{4}\widehat{f}_1(x_k), \text{ если } \widehat{f}_1(x_k) \leqslant \dfrac{\mu}{2L_{\widehat{F}}}; \\ \widehat{f}_1(x_k) - \dfrac{\mu}{8L_{\widehat{F}}}, \text{ если иначе.} \end{cases}$$

Теорема 3 утверждает глобальную сублинейную сходимость к точке оптимума с локальной линейной сходимостью на старших итерациях при малых значениях оптимизируемого функционала. Данное утверждение фиксирует главную особенность метода Гаусса–Ньютона — наличие локальной линейной сходимости в условии Поляка–Лоясиевича с коэффициентом линейной сходимости, не зависящим от значения $\sqrt{\mu} > 0$, отделяющего минимальное сингулярное число матрицы $\widehat{F}'(x)^*$ от нуля. Если сравнить модификацию с $\tau_k = \widehat{f}_1(x_k)$ и модификацию с $\tau_k = \varphi(x_k, y)$, то можно сделать вывод о том, что упрощение поиска x_{k+1} на каждой итерации в худшем случае замедлило скорость локальной линейной сходимости метода ($\frac{3}{4}$ при $\tau_k = \widehat{f}_1(x_k)$ против $\frac{1}{2}$ при $\tau_k = \varphi(x_k, y)$, [Nesterov, 2007, Theorem 4.4]), однако возможность явно выразить x_{k+1} при $\tau_k = \widehat{f}_1(x_k)$ позволяет вывести глобальную линейную сходимость [Nesterov, 2021]. И, как в случае теоремы 1, подбор монотонно убывающей последовательности $\left\{\varepsilon_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ с нулевым пределом позволяет вычислить решение задачи (5) с любой наперед заданной точностью (следствие 3.1).

В отличие от условий теоремы 3 использование информации о явном выражении $T_{L_k,\tau_k}(x_k)$ позволяет получить глобальную линейную сходимость для произвольного начального приближения $x_0 \in E_1$, $\mathcal{L}(\widehat{f}_1(x_0)) \subseteq \mathcal{F}$. Согласно следствию 1.1 $T_{L_k,\tau_k}(x_k)$ имеет следующее представление:

$$T_{L_k,\tau_k}(x_k) = x_k - \left(\widehat{F}'(x_k)^*\widehat{F}'(x_k) + \tau_k L_k I_n\right)^{-1}\widehat{F}'(x_k)^*\widehat{F}(x_k). \tag{9}$$

Эксперименты

В работе проведена серия экспериментов для демонстрации производительности алгоритма 1 в терминах количества итераций при использовании точного оракула $x_{k+1} = T_{L_k,\tau_k}(x_k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Код для воспроизведения экспериментов доступен по ссылке https://github.com/neyudin/ModifiedGNMethodEquations с реализацией на языке программирования Python 3.8. В качестве тестовых задач для экспериментов рассмотрены три задачи безусловной оптимизации функции f в формате поиска стационарной точки, то есть в каждой рассмотренной задаче требуется решить следующую гладкую нелинейную систему уравнений:

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla f(x) = \mathbf{0}_m.$$

Во всех трех случаях функция f является невыпуклой с глобальным минимумом f^*, равным 0. Данные функции $f(x)$, $x \stackrel{\text{def}}{=} (x^1, \ldots, x^n)^T$, $x \in E_1$ обозначены ниже:

- Функция Нестерова–Скокова [Гасников, 2020]:

$$f_{NS}(x) = \frac{1}{4}\left(x^1 - 1\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(x^{i+1} - 2\left(x^i\right)^2 + 1\right)^2.$$

- Hat-функция: $f_H(x) = (\|x\|^2 - 1)^2$.

- PL-функция: $f_{PL}(x) = \|x\|^2 + 3\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2(x^i)$.

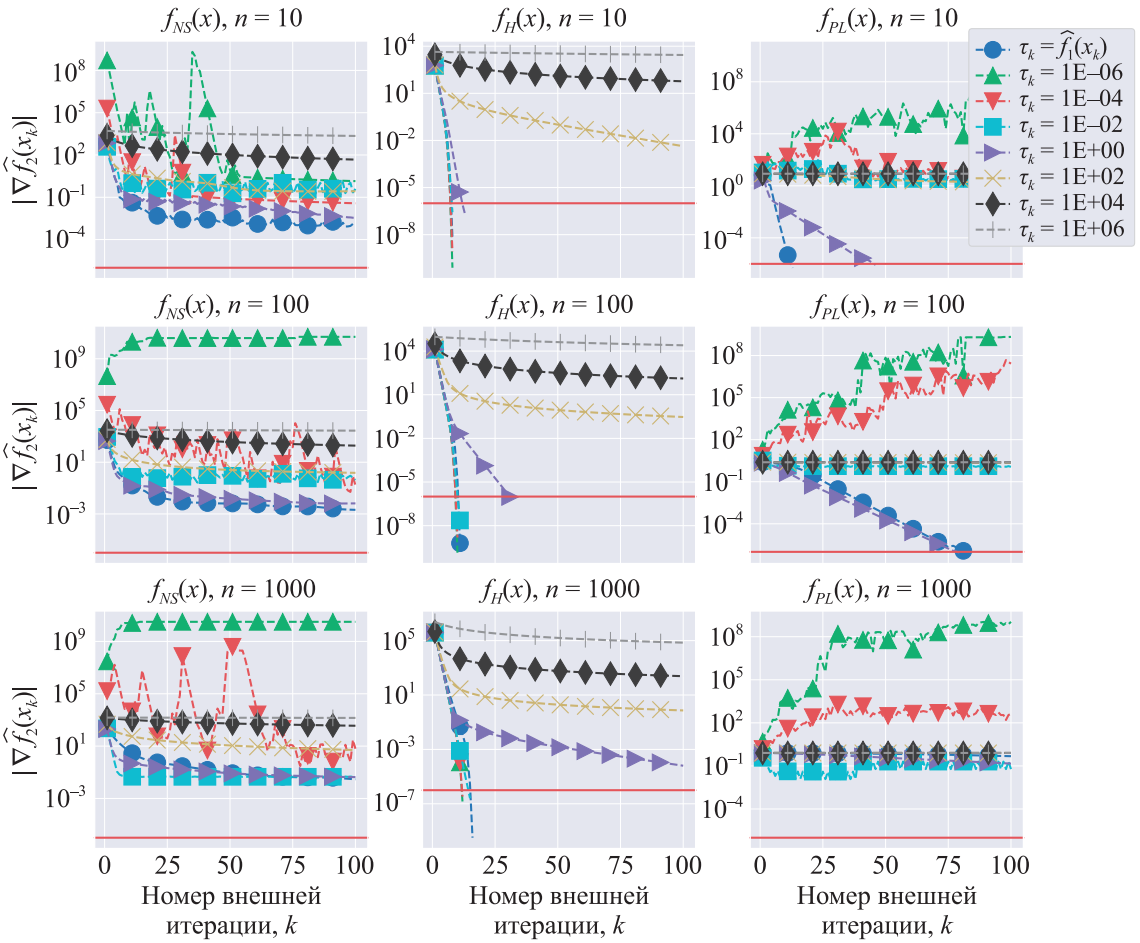

Рис. 1. Норма градиента оптимизируемой по алгоритму 1 функции $\widehat{f}_2(x) = \frac{1}{n}\|\nabla f(x)\|^2$. Графики сгруппированы на прямоугольной сетке, каждый столбец отвечает за свою функцию f: f_{NS}, f_H, f_{PL}; каждая строка отвечает за количество переменных в функции. τ_k — величина предобусловливания, гиперпараметр мажоранты в методе Гаусса–Ньютона. Горизонтальная линия — допустимое значение нормы градиента вблизи искомой стационарной точки

Нетрудно заметить, что в условиях эксперимента мы имеем $n = m$. В экспериментах варьировалась размерность задачи n, принимающая значения из множества {10, 100, 1000}. Также проведено сравнение стратегии выбора $\tau_k = \widehat{f}_1(x_k)$ с константными стратегиями $\tau_k = c$, величина c принимает значения из множества $\{10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2}, 1, 10^2, 10^4, 10^6\}$. Количественно сходимость алгоритма 1 оценивается по норме градиента функции $\widehat{f}_2$ и по величине функции $\widehat{f}_1$. Результаты экспериментов изображены на рис. 1 и 2.

В экспериментах использована модифицированная версия алгоритма 1 с добавлением критерия останова по норме градиента и по значению τ в виде предиката

$$\left(\tau_k < \varepsilon\right) \text{ или } \left(\left\|\nabla \widehat{f}_2(x_k)\right\| < \varepsilon\right),$$

где $\varepsilon = 10^{-6}$. Каждый запуск алгоритма 1 длился не больше $N = 100$ внешних итераций. Каждый рисунок состоит из девяти сгруппированных на сетке участков, каждый столбец на сетке отвечает за свою функцию f: первый — функция Нестерова–Скокова, второй — функция Hat, третий — функция PL, нумерация слева направо; при этом каждая строка на сетке отвечает за свое значение n: первая — 10, вторая — 100, третья — 1000, нумерация сверху вниз. Отдельно на каждом

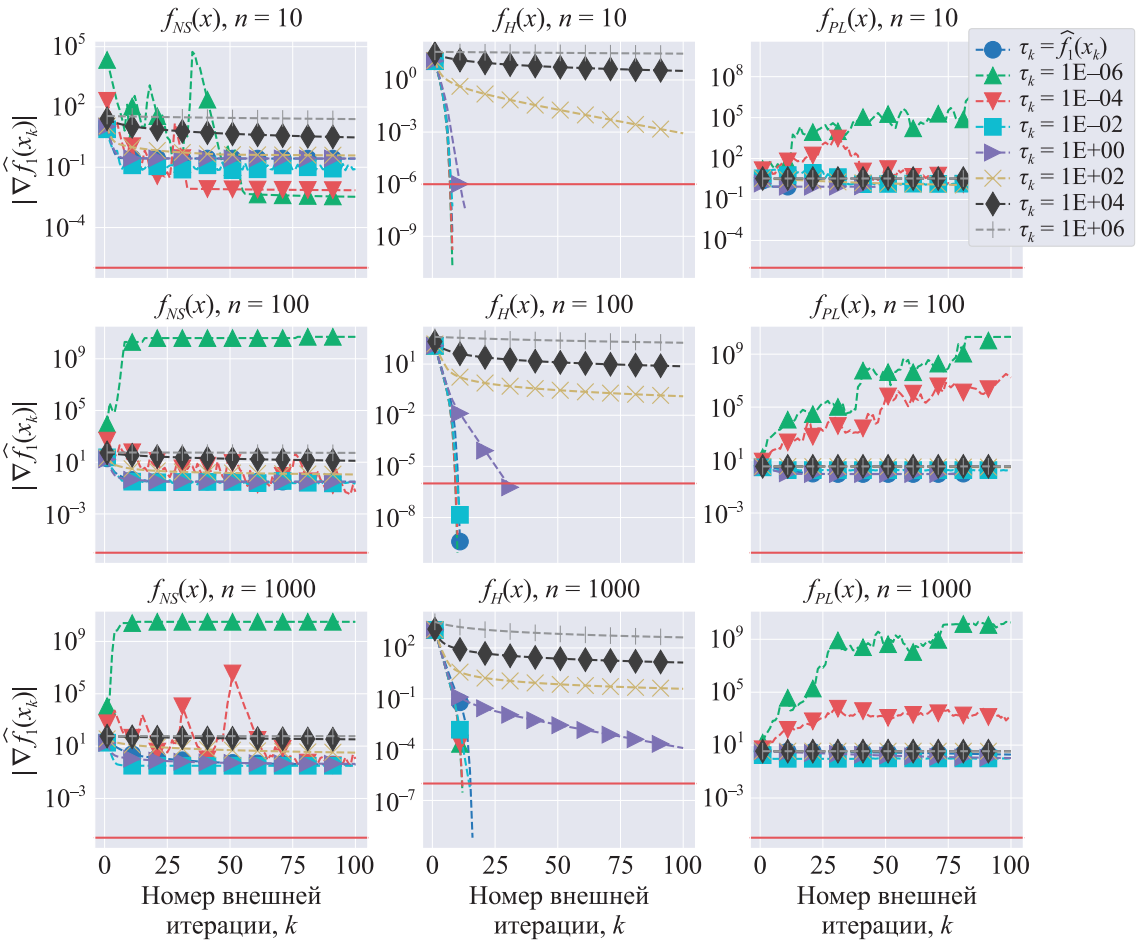

Рис. 2. Значение оптимизируемой по алгоритму 1 функции $\widehat{f}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x)\|$. Графики сгруппированы на прямоугольной сетке, каждый столбец отвечает за свою функцию f: f_{NS}, f_H, f_{PL}; каждая строка отвечает за количество переменных в функции. τ_k — величина предобусловливания, гиперпараметр мажоранты в методе Гаусса–Ньютона. Горизонтальная линия — допустимое значение функции вблизи искомой стационарной точки

участке проведена снизу горизонтальная линия $\varepsilon = 10^{-6}$, обозначающая уровень предварительного останова. На каждом участке рисунка графики представлены в виде усреднений по пяти запускам алгоритма 1, каждый запуск при совпадении по остальным гиперпараметрам отличается начальным приближением x_0, полученным сэмплированием из стандартного многомерного нормального распределения. Рис. 1 отображает результаты экспериментов относительно нормы градиента функции $\widehat{f}_2$, рис. 2 представляет результаты экспериментов относительно значения функции $\widehat{f}_1$.

Результаты экспериментов демонстрируют отсутствие гарантии сходимости при использовании константной стратегии для значения τ_k в общем случае, при этом адаптивная стратегия $\tau_k = \widehat{f}_1(x_k)$ во всех случаях демонстрирует сходимость к стационарной точке. Среди рассмотренных примеров функций f_{NS} представляется наиболее сложной в оптимизации во многом из-за флуктуаций значения, достигаемых с помощью суперпозиций полиномов Чебышёва первого рода $P_2(x^i) = 2\left(x^i\right)^2 - 1$. Для функции f_H на рисунках заметна глобальная линейная сходимость с участками суперлинейной сходимости в случае $\tau_k = \widehat{f}_1(x_k)$. Функция f_{PL} демонстрирует линей-

ную скорость сходимости, особенно на рис. 1, при этом с увеличением n происходит замедление скорости сходимости, как и в случае функции f_H.

Заключение

Разработанная для евклидовых норм стратегия вычисления приближения решения (9) по форме напоминает обновление параметров в алгоритме Левенберга–Марквардта [Levenberg, 1944; Marquardt, 1963; More, 1978]. Однако в отличие от алгоритма Левенберга–Марквардта изложенный метод Гаусса–Ньютона автоматически обобщается на случай неевклидовых произвольных норм [Nesterov, 2018], и в этих условиях метод все так же однозначно интерпретируется, позволяя устанавливать глобальные и локальные свойства процесса построения $\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ и строить вычислительно эффективные схемы оптимизации.

Список литературы (References)

Гасников А. В. Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска // e-print, 2020. — URL: https://arxiv.org/pdf/1711.00394.pdf
Gasnikov A. V. Sovremennye chislennye metody optimizatsii. Metod universal'nogo gradientnogo spuska [Universal gradient descent] // e-print, 2020. — URL: https://arxiv.org/pdf/1711.00394.pdf (in Russian).

Поляк Б. Т. Градиентные методы минимизации функционалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Т. 3, № 4. — С. 643–653.
Polyak B. T. Gradientnye metody minimizacii funkcionalov [Gradient methods for minimizing functionals] // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1963. — Vol. 3, No. 4. — P. 643–653 (in Russian).

Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1989.
Samarskii A. A., Gulin A. V. Chislennye metody [Numerical Methods]. — Moscow: Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1989 (in Russian).

Botev A., Ritter H., Barber D. Practical Gauss–Newton optimisation for deep learning // International Conference on Machine Learning. — PMLR, 2017. — P. 557–565.

Cai T., Gao R., Hou J., Chen S., Wang D., He D., Zhang Z., Wang L. Gram–Gauss–Newton Method: Learning Overparameterized Neural Networks for Regression Problems // arXiv preprint arXiv:1905.11675. — 2019.

Cartis C., Roberts L. A derivative-free Gauss–Newton method // Mathematical Programming Computation. — 2019. — Vol. 11, No. 4. — P. 631–674.

Gargiani M., Zanelli A., Diehl M., Hutter F. On the Promise of the Stochastic Generalized Gauss–Newton Method for Training DNNs // arXiv preprint arXiv:2006.02409. — 2020.

Gratton S., Lawless A. S., Nichols N. K. Approximate Gauss–Newton methods for nonlinear least squares problems // SIAM Journal on Optimization. — 2007. — Vol. 18, No. 1. — P. 106–132.

Le H., Zach C., Rosten E., Woodford O. J. Progressive Batching for Efficient Non-linear Least Squares // Proceedings of the Asian Conference on Computer Vision. — 2020.

Levenberg K. A method for the solution of certain non–linear problems in least squares // Quarterly of applied mathematics. — 1944. — Vol. 2, No. 2. — P. 164–168.

Marquardt D. W. An algorithm for least–squares estimation of nonlinear parameters // Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics. — 1963. — Vol. 11, No. 2. — P. 431–441.

More J. J. The Levenberg–Marquardt algorithm: implementation and theory // Numerical analysis. — Springer, Berlin, Heidelberg, 1978. — P. 105–116.

Nesterov Yu. Flexible Modification of Gauss–Newton Method // CORE Discussion Papers. — 2021.

Nesterov Yu. Lectures on convex optimization. Vol. 137. — Berlin, Germany: Springer, 2018.

Nesterov Yu. Modified Gauss–Newton scheme with worst case guarantees for global performance // Optimisation methods and software. — 2007. — Vol. 22, No. 3. — P. 469–483.

Nocedal J., Wright S. Numerical optimization. — Springer Science & Business Media, 2006.

Ren Y., Goldfarb D. Efficient subsampled gauss-newton and natural gradient methods for training neural networks // arXiv preprint arXiv:1906.02353. — 2019.

Smietanski M. J. On a Nonsmooth Gauss–Newton Algorithms for Solving Nonlinear Complementarity Problems // Algorithms. — 2020. — Vol. 13, No. 8. — P. 190.

Thiele C., Araya-Polo M., Hohl D. Deep Neural Network Learning with Second-Order Optimizers — a Practical Study with a Stochastic Quasi-Gauss-Newton Method // arXiv preprint arXiv:2004.03040. — 2020.

Приложение

Вспомогательные утверждения

В лемме [Nesterov, 2021] выводится формула локальной модели для оптимизируемого функционала в задаче (5).

Лемма [Nesterov, 2021]. *Пусть* $(x, y) \in \mathcal{F}^2$, $L \geqslant L_{\widehat{F}}$, $\tau > 0$ *и выполнено предположение* 1. *Тогда* $\widehat{f}_1(y) \leqslant \psi_{x,L,\tau}(y)$.

Доказательство. Выведем неравенство для $\left\|\widehat{F}(y) - \widehat{F}(x) - \widehat{F}'(x)(y-x)\right\|$:

$$\left\|\widehat{F}(y) - \widehat{F}(x) - \widehat{F}'(x)(y-x)\right\| = \left\{\widehat{F}(y) = \widehat{F}(x) + \int\limits_0^1 \widehat{F}'(x + t(y-x))(y-x)dt\right\} =$$

$$= \left\|\int\limits_0^1 \left(\widehat{F}'(x + t(y-x)) - \widehat{F}'(x)\right)(y-x)dt\right\| \leqslant \left\{\|\cdot\| \text{ — выпукла, неравенство Йенсена}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \left\|\left(\widehat{F}'(x + t(y-x)) - \widehat{F}'(x)\right)(y-x)\right\| dt \leqslant \int\limits_0^1 \left\|\widehat{F}'(x + t(y-x)) - \widehat{F}'(x)\right\| \|y-x\|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \{\text{предположение 1}\} \leqslant \int\limits_0^1 L_{\widehat{F}}\|y-x\|^2 t\, dt = \frac{L_{\widehat{F}}}{2}\|y-x\|^2. \quad (10)$$

Рассмотрим вспомогательное неравенство:

$$\left(\sqrt{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left\|\widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y-x)\right\|\right)^2 = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2\tau}\left\|\widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y-x)\right\|^2 -$$

$$- \left\|\widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y-x)\right\| \geqslant 0 \Rightarrow \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2\tau}\left\|\widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y-x)\right\|^2 \geqslant \left\|\widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y-x)\right\|. \quad (11)$$

Тогда для $\widehat{f_1}$ выполнено

$$\widehat{f_1}(y) = \left\|\widehat{F}(y)\right\| = \left\|\widehat{F}(y) - \widehat{F}(x) - \widehat{F}'(x)(y-x) + \widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y-x)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\widehat{F}(y) - \widehat{F}(x) - \widehat{F}'(x)(y-x)\right\| + \left\|\widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y-x)\right\| \leqslant \{\text{неравенство из (10)}\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L_{\widehat{F}}}{2}\|y-x\|^2 + \left\|\widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y-x)\right\| \leqslant \{\text{неравенство из (11)}\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\tau}{2} + \frac{L_{\widehat{F}}}{2}\|y-x\|^2 + \frac{1}{2\tau}\left\|\widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y-x)\right\|^2 = \psi_{x,L_{\widehat{F}},\tau}(y) \leqslant \psi_{x,L,\tau}(y). \ \square$$

Следующая лемма задает общую формулу для измерения убывания значения оптимизируемого функционала в (5) при минимизации локальной модели. Величина убывания оценивается с помощью нормы проксимального градиента, в следствиях указаны основные свойства введенного проксимального отображения.

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $x \in \mathcal{F}$, $T_{L,\tau}(x) \in \mathcal{F}$, $\tau > 0$, $L \geqslant L_{\widehat{F}}$. *Тогда выполняется соотношение*

$$\frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} - \widehat{f_1}(T_{L,\tau}(x)) \geqslant \frac{L}{2}\left\|T_{L,\tau}(x) - x\right\|^2.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(t) = \min_{y \in E_1}\left\{\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2\tau}\left\|\widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y-x)\right\|^2 + \frac{1}{2t}\|y-x\|^2\right\}.$$

Находящаяся под min локальная модель $\psi_{x,t^{-1},\tau}(y)$ выпукла по (τ, y, t) на выпуклом множестве

$$\left\{(y, \tau, t, \alpha) \in E_1 \times \mathbb{R}^3_+ : \|y-x\|^2 \leqslant \alpha t\right\}.$$

То есть у функции $h(t)$ выпуклый надграфик, так как он получен с помощью проектирования выпуклого множества, что влечет выпуклость $h(t)$ (см. [Nesterov, 2018, Theorem 3.1.7]). Для выпуклой функции верно следующее представление:

$$h(0) \geqslant h(t) + h'(t)(0-t) = h(t) - h'(t)t;$$
$$h'(t) = \Bigg\langle \underbrace{\frac{1}{\tau}\widehat{F}'(x)^*\left(\widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)\left(T_{t^{-1},\tau}(x) - x\right)\right) + \frac{1}{t}\left(T_{t^{-1},\tau}(x) - x\right)}_{=\nabla_y \psi_{x,t^{-1},\tau}(y) = \mathbf{0}_n \text{ из-за взятия минимума по } y}, \ \frac{\partial T_{t^{-1},\tau}(x)}{\partial t}\Bigg\rangle -$$
$$- \frac{1}{2t^2}\left\|T_{t^{-1},\tau}(x) - x\right\|^2 = -\frac{1}{2t^2}\left\|T_{t^{-1},\tau}(x) - x\right\|^2.$$

По свойству проксимального отображения

$$\lim_{t \to 0} \operatorname*{argmin}_{y \in E_1}\left\{\psi_{x,t^{-1},\tau}(y)\right\} = x \Rightarrow h(0) = \frac{\tau}{2} + \frac{\left\|\widehat{F}(x)\right\|^2}{2\tau} = \frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau}.$$

Значит,

$$\frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} \geqslant \psi_{x,t^{-1},\tau}(T_{t^{-1},\tau}(x)) + \frac{1}{2t}\left\|T_{t^{-1},\tau}(x) - x\right\|^2 \geqslant \{\text{лемма из [Nesterov, 2021]}\} \geqslant \widehat{f_1}(T_{t^{-1},\tau}(x)) +$$
$$+ \frac{1}{2t}\left\|T_{t^{-1},\tau}(x) - x\right\|^2 \Rightarrow \left\{t^{-1} = L\right\} \Rightarrow \frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} - \widehat{f_1}(T_{L,\tau}(x)) \geqslant \frac{L}{2}\left\|T_{L,\tau}(x) - x\right\|^2. \ \square$$

Следствие 1.1. $T_{L,\tau}(x) = \operatorname{argmin}\limits_{y\in E_1}\left\{\psi_{x,L,\tau}(y)\right\}$ *имеет явное выражение при* $L > 0$:

$$T_{L,\tau}(x) = x - \left(\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}'(x) + \tau L I_n\right)^{-1}\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}(x).$$

Поэтому $\lim\limits_{L\to+\infty} T_{L,\tau}(x) = x$ *и*

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} - \widehat{f_1}(x) &\geqslant \frac{1}{2}\lim_{L\to+\infty}\left(L\left\|T_{L,\tau}(x) - x\right\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{L\to+\infty}\left(L\left\|\left(\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}'(x) + \tau L I_n\right)^{-1}\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}(x)\right\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{L\to+\infty}\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}'(x) + \tau\sqrt{L} I_n\right)^{-1}\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}(x)\right\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Однако величина $\left\|L\left(T_{L,\tau}(x) - x\right)\right\|$ *сходится к норме градиента* $\psi_{x,L,\tau}(y)$ *по* y *в точке* $y = x$ *при* $L \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{L\to+\infty}\left\|L\left(T_{L,\tau}(x) - x\right)\right\| &= \lim_{L\to+\infty}\left\|L\left(\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}'(x) + \tau L I_n\right)^{-1}\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}(x)\right\| = \\ &= \lim_{L\to+\infty}\left\|\left(\frac{1}{L}\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}'(x) + \tau I_n\right)^{-1}\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}(x)\right\| = \left\|\frac{1}{\tau}\widehat{F}'(x)^*\widehat{F}(x)\right\|.\end{aligned}$$

Сама функция $\left\|T_{L,\tau}(x) - x\right\|^2$ *является монотонно убывающей по* L *и по* τ.

Следствие 1.2. *При выборе* $\tau = \widehat{f_1}(x) > 0$ *из полученной оценки следует, что если* $x \in \mathcal{L}(\widehat{f_1}(x)) \subseteq \mathcal{F}$, *то и* $T_{L,\widehat{f_1}(x)}(x) \in \mathcal{L}(\widehat{f_1}(x))$:

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} - \widehat{f_1}(T_{L,\tau}(x)) \geqslant \frac{L}{2}\left\|T_{L,\tau}(x) - x\right\|^2 \Rightarrow \left\{\tau = \widehat{f_1}(x)\right\} \Rightarrow \widehat{f_1}(x) - \widehat{f_1}(T_{L,\widehat{f_1}(x)}(x)) \geqslant \\ \geqslant \frac{L}{2}\left\|T_{L,\widehat{f_1}(x)}(x) - x\right\|^2 \geqslant 0 \Rightarrow \widehat{f_1}(x) \geqslant \widehat{f_1}(T_{L,\widehat{f_1}(x)}(x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow T_{L,\widehat{f_1}(x)}(x) \in \mathcal{L}(\widehat{f_1}(T_{L,\widehat{f_1}(x)}(x))) \subseteq \mathcal{L}(\widehat{f_1}(x)).\end{aligned}$$

В лемме ниже оценивается убывание оптимизируемого функционала $\widehat{f_1}$ при решении задачи (5) уже с помощью приращения локальной модели $\Delta_r(x)$, вводится полезная для дальнейшего анализа вспомогательная функция $\varkappa(\cdot)$.

Лемма 2. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $x \in \mathcal{F}$, $T_{L,\tau}(x) \in \mathcal{F}$, $\tau > 0$, $L \geqslant L_{\widehat{F}}$. *Тогда для любого* $r > 0$ *выполняется соотношение*

$$\frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} - \widehat{f_1}(T_{L,\tau}(x)) \geqslant Lr^2\varkappa\left(\frac{\Delta_r(x)}{2\tau L r^2}\right),$$

где

$$\begin{cases}\Delta_r(x) \overset{\text{def}}{=} \widehat{f_2}(x) - \min\limits_{y\in E_1}\left\{(\varphi(x,\,y))^2 : \|y - x\| \leqslant r\right\}; \\ \varkappa(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases}\dfrac{t^2}{2},\ t \in [0,\,1]; \\ t - \dfrac{1}{2},\ t > 1.\end{cases}\end{cases}$$

Доказательство. Введем $h_r = \underset{h\in E_1}{\operatorname{argmin}} \left\{(\varphi(x, x+h))^2 : \|h\| \leqslant r\right\}$. Распишем локальную модель в точке $T_{L,\tau}(x)$:

$$\widehat{f_1}(T_{L,\tau}(x)) \leqslant \{\text{лемма из [Nesterov, 2021]}\} \leqslant \psi_{x,L,\tau}(T_{L,\tau}(x)) \leqslant$$
$$\leqslant \min_{t\in[0,\,1]} \left\{\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2\tau}\left\|\widehat{F}(x) + t\widehat{F'}(x)h_r\right\|^2 + \frac{L}{2}(tr)^2\right\} = \frac{\tau}{2} +$$
$$+ \min_{t\in[0,\,1]} \left\{\frac{1}{2\tau}\left\|(1-t)\widehat{F}(x) + t\left(\widehat{F}(x) + \widehat{F'}(x)h_r\right)\right\|^2 + \frac{L}{2}(tr)^2\right\} \leqslant \left\{\|\cdot\|^2 \text{ выпукла}\right\} \leqslant \frac{\tau}{2} +$$
$$+ \min_{t\in[0,\,1]} \left\{\frac{(1-t)}{2\tau}\widehat{f_2}(x) + \frac{t}{2\tau}\left(\varphi(x, x+h_r)\right)^2 + \frac{L}{2}(tr)^2\right\} = \frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} +$$
$$+ \min_{t\in[0,\,1]} \left\{\frac{-t}{2\tau}\Delta_r(x) + \frac{L}{2}(tr)^2\right\} \Rightarrow \frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} - \widehat{f_1}(T_{L,\tau}(x)) \geqslant Lr^2 \max_{t\in[0,\,1]} \left\{\frac{\Delta_r(x)}{2\tau Lr^2}t - \frac{1}{2}t^2\right\}.$$

Выражение в правой части получившегося неравенства представляет собой полином второй степени с отрицательным коэффициентом у старшей степени и с корнями $t \in \left\{0,\ \frac{\Delta_r(x)}{\tau Lr^2}\right\}$, что означает для выражения точки условного максимума t^* необходимость рассмотреть два случая: $\frac{\Delta_r(x)}{2r^2\tau L} \leqslant 1$ и $\frac{\Delta_r(x)}{2r^2\tau L} > 1$. В первом случае $t^* = \frac{\Delta_r(x)}{2\tau Lr^2}$, во втором $t^* = 1$. Полученная оценка имеет следующее представление:

$$\frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} - \widehat{f_1}(T_{L,\tau}(x)) \geqslant Lr^2 \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Delta_r(x)}{2\tau Lr^2}\right)^2 & \text{при } t^* = \dfrac{\Delta_r(x)}{2\tau Lr^2}; \\ \dfrac{\Delta_r(x)}{2\tau Lr^2} - \dfrac{1}{2} & \text{при } t^* = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Введем функцию $\varkappa(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2},\ t \in [0,\ 1]; \\ t - \dfrac{1}{2},\ t > 1. \end{cases}$ Перепишем с ее помощью оценку (12):

$$\frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} - \widehat{f_1}(T_{L,\tau}(x)) \geqslant Lr^2\varkappa\left(\frac{\Delta_r(x)}{2\tau Lr^2}\right).$$

В этой оценке $\widehat{f_2}(x) \geqslant \Delta_\infty(x) \geqslant \Delta_r(x) \geqslant \Delta_0(x) = 0$ и $\varkappa(t) \geqslant 0$ по построению. □

Следствие 2.1. *Для достаточно больших значений Lr^2, таких, что $\frac{\Delta_r(x)}{2\tau Lr^2} \leqslant 1$, выведенная оценка упрощается*:

$$\frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} - \widehat{f_1}(T_{L,\tau}(x)) \geqslant \frac{(\Delta_r(x))^2}{8\tau^2 Lr^2}.$$

При достаточно малых значениях r, для которых $\frac{\Delta_r(x)}{2\tau Lr^2} \geqslant 1$, верно другое неравенство:

$$\frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f_2}(x)}{2\tau} - \widehat{f_1}(T_{L,\tau}(x)) \geqslant \frac{\Delta_r(x)}{2\tau} - \frac{Lr^2}{2}.$$

В полученных оценках функция $Lr^2\varkappa\left(\frac{\Delta_r(x)}{2\tau Lr^2}\right)$ является монотонно убывающей по L и по τ.

Следствие 2.2. *При выборе* $\tau = \widehat{f}_1(x) > 0$ *из полученной оценки следует, что если* $x \in \mathcal{L}(\widehat{f}_1(x)) \subseteq \mathcal{F}$, *то и* $T_{L,\widehat{f}_1(x)}(x) \in \mathcal{L}(\widehat{f}_1(x))$:

$$\frac{\tau}{2} + \frac{\widehat{f}_2(x)}{2\tau} - \widehat{f}_1(T_{L,\tau}(x)) \geqslant Lr^2\varkappa\left(\frac{\Delta_r(x)}{2\tau Lr^2}\right) \Rightarrow \left\{\tau = \widehat{f}_1(x)\right\} \Rightarrow \widehat{f}_1(x) - \widehat{f}_1(T_{L,\widehat{f}_1(x)}(x)) \geqslant$$

$$\geqslant Lr^2\varkappa\left(\frac{\Delta_r(x)}{2\widehat{f}_1(x)Lr^2}\right) \geqslant 0 \Rightarrow \widehat{f}_1(x) \geqslant \widehat{f}_1(T_{L,\widehat{f}_1(x)}(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{L,\widehat{f}_1(x)}(x) \in \mathcal{L}(\widehat{f}_1(T_{L,\widehat{f}_1(x)}(x))) \subseteq \mathcal{L}(\widehat{f}_1(x)).$$

В лемме 3 вводится верхняя оценка уже самой локальной модели, не только функции $\widehat{f}_1$, данная оценка понадобится для установки в теореме 2 локальной суперлинейной сходимости метода Гаусса–Ньютона, описанного алгоритмом 1.

Лемма 3. *Пусть* $x \in \mathcal{F}$, $T_{L,\tau}(x) \in \mathcal{F}$, $L > 0$, $\tau > 0$. *Тогда*

$$\psi_{x,L,\tau}(T_{L,\tau}(x)) \leqslant \min_{y\in\mathcal{F}}\left\{\frac{\tau}{2} + \frac{L\|y-x\|^2}{2} + \frac{\widehat{f}_2(y)}{2\tau} + \frac{\widehat{f}_1(y)L_{\widehat{F}}\|y-x\|^2}{2\tau} + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|y-x\|^4}{8\tau}\right\}.$$

Доказательство. По определению $\psi_{x,L,\tau}(\cdot)$

$$\psi_{x,L,\tau}(T_{L,\tau}(x)) = \min_{y\in\mathcal{F}}\left\{\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2\tau}\left\|\widehat{F}(x) + \widehat{F}'(x)(y-x)\right\|^2 + \frac{L}{2}\|y-x\|^2\right\} = \frac{\tau}{2} +$$

$$+ \min_{y\in\mathcal{F}}\left\{\frac{1}{2\tau}\left(\left\|\widehat{F}(y) - \left(\widehat{F}(y) - \widehat{F}(x) - \widehat{F}'(x)(y-x)\right)\right\|\right)^2 + \frac{L}{2}\|y-x\|^2\right\} \leqslant \frac{\tau}{2} +$$

$$+ \min_{y\in\mathcal{F}}\left\{\frac{1}{2\tau}\left(\widehat{f}_1(y) + \left\|\widehat{F}(y) - \widehat{F}(x) - \widehat{F}'(x)(y-x)\right\|\right)^2 + \frac{L}{2}\|y-x\|^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \{\text{неравенство (10)}\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau}{2} + \min_{y\in\mathcal{F}}\left\{\frac{1}{2\tau}\left(\widehat{f}_1(y) + \frac{L_{\widehat{F}}}{2}\|y-x\|^2\right)^2 + \frac{L}{2}\|y-x\|^2\right\} \leqslant \frac{\tau}{2} +$$

$$+ \min_{y\in\mathcal{F}}\left\{\frac{L\|y-x\|^2}{2} + \frac{\widehat{f}_2(y)}{2\tau} + \frac{\widehat{f}_1(y)L_{\widehat{F}}\|y-x\|^2}{2\tau} + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|y-x\|^4}{8\tau}\right\}. \square$$

Следствие 3.1. *Пусть* $x^* \in \mathcal{F}$ *— решение задачи* (4): $\widehat{F}(x^*) = \mathbf{0}_m$, $\mathcal{L}(\widehat{f}_1(x)) \subseteq \mathcal{F}$. *Тогда*

$$\psi_{x,L,\tau}(T_{L,\tau}(x)) \leqslant \min_{y\in\mathcal{F}}\left\{\frac{\tau}{2} + \frac{L\|y-x\|^2}{2} + \frac{\widehat{f}_2(y)}{2\tau} + \frac{\widehat{f}_1(y)L_{\widehat{F}}\|y-x\|^2}{2\tau} + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|y-x\|^4}{8\tau}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau}{2} + \frac{L\|y-x\|^2}{2} + \frac{\widehat{f}_2(y)}{2\tau} + \frac{\widehat{f}_1(y)L_{\widehat{F}}\|y-x\|^2}{2\tau} + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|y-x\|^4}{8\tau} = \{y = x^*\} =$$

$$= \frac{\tau}{2} + \frac{L\|x-x^*\|^2}{2} + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|x-x^*\|^4}{8\tau}.$$

Основные утверждения

В теореме 1 выведена сходимость к стационарной точке в терминах нормы проксимального градиента и приращения локальной модели.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* 1, $k \in \mathbb{N}$, $r > 0$. *Тогда для метода Гаусса–Ньютона, реализованного по алгоритму* 1 *с* $\tau_k = \widehat{f}_1(x_k)$, $\varepsilon_k = \varepsilon \geqslant 0$, *верны следующие оценки*:

$$\begin{cases} \dfrac{8L_{\widehat{F}}^2}{L}\left(\varepsilon + \dfrac{\left(\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_k)\right)}{k}\right) \geqslant \min\limits_{i\in\overline{0,k-1}}\left\{\left\|2L_{\widehat{F}}\left(T_{2L_{\widehat{F}},\widehat{f}_1(x_i)}(x_i) - x_i\right)\right\|^2\right\}; \\ L_{\widehat{F}}\left(\varepsilon + \dfrac{\left(\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_k)\right)}{k}\right) \geqslant \min\limits_{i\in\overline{0,k-1}}\left\{2\left(L_{\widehat{F}}r\right)^2 \varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_i)}{4\widehat{f}_1(x_i)L_{\widehat{F}}r^2}\right)\right\}; \end{cases}$$

где $\varkappa(t) = \frac{t^2}{2}\mathbb{1}_{\{t\in[0,1]\}} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\mathbb{1}_{\{t>1\}}$.

Доказательство. Согласно леммам 1, 2 и следствиям 1.2, 2.2 для $\tau = \widehat{f}_1(x_k)$, $L = L_k$, $x = x_k$ имеем следующее:

$$\begin{cases} \widehat{f}_1(x_k) - \psi_{x_k,L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(T_{L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_k)) \geqslant \dfrac{L_k}{2}\left\|T_{L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_k) - x_k\right\|^2; \\ \widehat{f}_1(x_k) - \psi_{x_k,L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(T_{L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_k)) \geqslant L_k r^2 \varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_k)}{2\widehat{f}_1(x_k)L_k r^2}\right). \end{cases}$$

Добавим и вычтем $\psi_{x_k,L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_{k+1})$:

$$\begin{cases} \widehat{f}_1(x_k) + \left(\psi_{x_k,L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_{k+1}) - \psi_{x_k,L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(T_{L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_k))\right) - \psi_{x_k,L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_{k+1}) \geqslant \dfrac{L_k}{2}\left\|T_{L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_k) - x_k\right\|^2; \\ \widehat{f}_1(x_k) + \left(\psi_{x_k,L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_{k+1}) - \psi_{x_k,L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(T_{L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_k))\right) - \psi_{x_k,L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_{k+1}) \geqslant L_k r^2 \varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_k)}{2\widehat{f}_1(x_k)L_k r^2}\right). \end{cases}$$

Используем условия $\psi_{x_k,L_k,\tau_k}(x_{k+1}) - \psi_{x_k,L_k,\tau_k}(T_{L_k,\tau_k}(x_k)) \leqslant \varepsilon_k = \varepsilon$ и $-\psi_{x_k,L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_{k+1}) \leqslant -\widehat{f}_1(x_{k+1})$:

$$\begin{cases} \widehat{f}_1(x_k) + \varepsilon - \widehat{f}_1(x_{k+1}) \geqslant \dfrac{L_k}{2}\left\|T_{L_k,\widehat{f}_1(x_k)}(x_k) - x_k\right\|^2; \\ \widehat{f}_1(x_k) + \varepsilon - \widehat{f}_1(x_{k+1}) \geqslant L_k r^2 \varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_k)}{2\widehat{f}_1(x_k)L_k r^2}\right). \end{cases}$$

Усредним обе части неравенств по первым k итерациям:

$$\begin{cases} \varepsilon + \dfrac{\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_k)}{k} \geqslant \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\dfrac{L_i}{2}\left\|T_{L_i,\widehat{f}_1(x_i)}(x_i) - x_i\right\|^2; \\ \varepsilon + \dfrac{\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_k)}{k} \geqslant \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} L_i r^2 \varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_i)}{2\widehat{f}_1(x_i)L_i r^2}\right). \end{cases} \tag{13}$$

Воспользуемся тем, что в алгоритме 1 $L_k \geqslant L$, функции $\left\|T_{L_i,\widehat{f}_1(x_i)}(x_i) - x_i\right\|^2$ и $L_i r^2 \varkappa\left(\frac{\Delta_r(x_i)}{2\widehat{f}_1(x_i)L_i r^2}\right)$ монотонно убывают по L_i (следствия 1.1 и 2.1):

$$\begin{cases} \varepsilon + \dfrac{\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_k)}{k} \geqslant \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \dfrac{L_i}{2}\left\|T_{L_i,\widehat{f}_1(x_i)}(x_i) - x_i\right\|^2 \geqslant \\ \quad \geqslant \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \dfrac{L}{2}\left\|T_{2L_{\widehat{F}},\widehat{f}_1(x_i)}(x_i) - x_i\right\|^2 \geqslant \min\limits_{i\in\overline{0,k-1}}\left\{\dfrac{L}{2}\left\|T_{2L_{\widehat{F}},\widehat{f}_1(x_i)}(x_i) - x_i\right\|^2\right\}; \\ \varepsilon + \dfrac{\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_k)}{k} \geqslant \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} L_i r^2 \varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_i)}{2\widehat{f}_1(x_i)L_i r^2}\right) \geqslant \\ \quad \geqslant \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} 2L_{\widehat{F}} r^2 \varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_i)}{4\widehat{f}_1(x_i)L_{\widehat{F}} r^2}\right) \geqslant \min\limits_{i\in\overline{0,k-1}}\left\{2L_{\widehat{F}} r^2 \varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_i)}{4\widehat{f}_1(x_i)L_{\widehat{F}} r^2}\right)\right\}. \end{cases}$$

Приведем домножением на константы правые части к формату *обобщенных проксимальных градиентов*:

$$\begin{cases} \dfrac{8L_{\widehat{F}}^2}{L}\left(\varepsilon + \dfrac{\left(\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_k)\right)}{k}\right) \geqslant \min\limits_{i\in\overline{0,k-1}}\left\{\left\|2L_{\widehat{F}}\left(T_{2L_{\widehat{F}},\widehat{f}_1(x_i)}(x_i) - x_i\right)\right\|^2\right\}; \\ L_{\widehat{F}}\left(\varepsilon + \dfrac{\left(\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_k)\right)}{k}\right) \geqslant \min\limits_{i\in\overline{0,k-1}}\left\{2\left(L_{\widehat{F}} r\right)^2 \varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_i)}{4\widehat{f}_1(x_i)L_{\widehat{F}} r^2}\right)\right\}. \end{cases}$$

□

Следствие 1.1. *В случае такой адаптивной стратегии подбора точности вычисления* x_{k+1}, *как* $\varepsilon_0 = \varepsilon\widehat{f}_1(x_0)$, $\varepsilon_k = \varepsilon\left(\widehat{f}_1(x_{k-1}) - \widehat{f}_1(x_k)\right)$, $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \geqslant 0$, *возможно получить приближение решения задачи* (4) *с любой наперед заданной точностью при условии неограниченного количества итераций. Для доказательства этого факта рассмотрим* (13) *и применим обозначенное правило вычисления* ε_k:

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon\left(2\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_{k-1})\right)}{k} + \dfrac{\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_k)}{k} \geqslant \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \dfrac{L_i}{2}\left\|T_{L_i,\widehat{f}_1(x_i)}(x_i) - x_i\right\|^2; \\ \dfrac{\varepsilon\left(2\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_{k-1})\right)}{k} + \dfrac{\widehat{f}_1(x_0) - \widehat{f}_1(x_k)}{k} \geqslant \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} L_i r^2 \varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_i)}{2\widehat{f}_1(x_i)L_i r^2}\right). \end{cases}$$

Применяя весь дальнейший ход доказательства теоремы, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{8L_{\widehat{F}}^2}{kL}\left((1+2\varepsilon)\widehat{f}_1(x_0) - \varepsilon\widehat{f}_1(x_{k-1}) - \widehat{f}_1(x_k)\right) \geqslant \min\limits_{i\in\overline{0,k-1}}\left\{\left\|2L_{\widehat{F}}\left(T_{2L_{\widehat{F}},\widehat{f}_1(x_i)}(x_i) - x_i\right)\right\|^2\right\}; \\ \dfrac{L_{\widehat{F}}}{k}\left((1+2\varepsilon)\widehat{f}_1(x_0) - \varepsilon\widehat{f}_1(x_{k-1}) - \widehat{f}_1(x_k)\right) \geqslant \min\limits_{i\in\overline{0,k-1}}\left\{2\left(L_{\widehat{F}} r\right)^2 \varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_i)}{4\widehat{f}_1(x_i)L_{\widehat{F}} r^2}\right)\right\}. \end{cases}$$

Следствие 1.2. *Из оценок в предыдущем следствии заменим нулевую итерацию на* k*-ю, а* k*-ю итерацию сдвинем на* $(N+1) \in \mathbb{N}$ *итерацию вперед, получим оценку на хвост суммы*

неравенств, $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{cases} \dfrac{8L_{\widehat{F}}^2}{(N+1)L}\left(\varepsilon\left(\widehat{f}_1(x_{k-1}) - \widehat{f}_1(x_{k+N})\right) + \widehat{f}_1(x_k) - \widehat{f}_1(x_{k+N+1})\right) \geqslant \min\limits_{i\in\overline{k,\,k+N}}\left\{\left\|2L_{\widehat{F}}\left(T_{2L_{\widehat{F}},\widehat{f}_1(x_i)}(x_i) - x_i\right)\right\|^2\right\}; \\ \dfrac{L_{\widehat{F}}}{N+1}\left(\varepsilon\left(\widehat{f}_1(x_{k-1}) - \widehat{f}_1(x_{k+N})\right) + \widehat{f}_1(x_k) - \widehat{f}_1(x_{k+N+1})\right) \geqslant \min\limits_{i\in\overline{k,\,k+N}}\left\{2\left(L_{\widehat{F}}r\right)^2\varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_i)}{4\widehat{f}_1(x_i)L_{\widehat{F}}r^2}\right)\right\}. \end{cases}$$

Разворачивая заново цепочку доказательства теоремы для начальной итерации $k > 0$ *и финальной итерации* $k + N$*, получаем следующую оценку на суммы неравенств в* (13)*:*

$$\begin{cases} \widehat{f}_1(x_k) - \widehat{f}_1(x_{k+N+1}) + \varepsilon\left(\widehat{f}_1(x_{k-1}) - \widehat{f}_1(x_{k+N})\right) \geqslant \dfrac{L}{2}\displaystyle\sum_{i=k}^{k+N}\left\|T_{2L_{\widehat{F}},\widehat{f}_1(x_i)}(x_i) - x_i\right\|^2 \geqslant \\ \qquad\qquad \geqslant \dfrac{L}{2}\left\|T_{2L_{\widehat{F}},\widehat{f}_1(x_k)}(x_k) - x_k\right\|^2; \\ \widehat{f}_1(x_k) - \widehat{f}_1(x_{k+N+1}) + \varepsilon\left(\widehat{f}_1(x_{k-1}) - \widehat{f}_1(x_{k+N})\right) \geqslant \displaystyle\sum_{i=k}^{k+N} 2L_{\widehat{F}}r^2\varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_i)}{4\widehat{f}_1(x_i)L_{\widehat{F}}r^2}\right) \geqslant \\ \qquad\qquad \geqslant 2L_{\widehat{F}}r^2\varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_k)}{4\widehat{f}_1(x_k)L_{\widehat{F}}r^2}\right). \end{cases}$$

В пределе при устремлении $N \to +\infty$ *получаем следующее:*

$$\begin{cases} \widehat{f}_1(x_k) - \widehat{f}_1^* + \varepsilon\left(\widehat{f}_1(x_{k-1}) - \widehat{f}_1^*\right) \geqslant \dfrac{L}{2}\left\|T_{2L_{\widehat{F}},\widehat{f}_1(x_k)}(x_k) - x_k\right\|^2; \\ \widehat{f}_1(x_k) - \widehat{f}_1^* + \varepsilon\left(\widehat{f}_1(x_{k-1}) - \widehat{f}_1^*\right) \geqslant 2L_{\widehat{F}}r^2\varkappa\left(\dfrac{\Delta_r(x_k)}{4\widehat{f}_1(x_k)L_{\widehat{F}}r^2}\right). \end{cases} \tag{14}$$

Неравенства в (14) *при условии* $\lim\limits_{k\to+\infty}\varepsilon_k = \lim\limits_{k\to+\infty}\varepsilon\left(\widehat{f}_1(x_{k-1}) - \widehat{f}_1(x_k)\right) = 0$ *означают*

$$\lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} T_{2L_{\widehat{F}},\widehat{f}_1(x_k)}(x_k) = x^*$$

и

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty}\left\|x_{k+1} - x_k\right\| = 0; \\ \lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\Delta_r(x_k)}{\widehat{f}_1(x_k)} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Пределы в (15) *получены как следствие рассмотрения предельных значений неравенств в* (14) *при* $k \to +\infty$*, они наглядно демонстрируют ограниченность вариации последовательности* $\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *и связность множества стационарных точек* $\left\{x^* : x^* \in E_1,\ \Delta_r(x^*) = 0\right\}$ *для данной последовательности.*

В теореме 2 устанавливается локальная суперлинейная сходимость и определяются условия размерности задачи (5), при которых обычно возможна суперлинейная сходимость метода Гаусса–Ньютона с алгоритмом 1.

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 1*, пусть для метода Гаусса–Ньютона с алгоритмом* 1 *существует* $x^* \in \mathcal{L}(\widehat{f_1}(x_0))$*,* $\widehat{F}(x^*) = \mathbf{0}_m$ *— решение с* $\sigma_{\min}\left(\widehat{F}'(x^*)\right) \geqslant \varsigma > 0$*. Дополнительно предположим ограниченность нормы матрицы Якоби*: *существует* $M_{\widehat{F}} > 0$*, для которого выполнено* $\left\|\widehat{F}'(x)\right\| \leqslant M_{\widehat{F}}$ *при всех* $x \in \mathcal{F}$*. Тогда в алгоритме* 1 *с*

$$\varepsilon_k = 0, \quad \tau_k = \widehat{f_1}(x_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

в области

$$\|x_k - x^*\| \leqslant \min\left\{\frac{2\varsigma}{5L_{\widehat{F}}},\ \frac{1}{12L_{\widehat{F}}}\left(\left(3M_{\widehat{F}} + 5\varsigma\right) - \sqrt{\left(3M_{\widehat{F}} + 5\varsigma\right)^2 - 24\varsigma^2}\right)\right\}$$

выполнена оценка

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leqslant \frac{\frac{3L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|^2}{2} + \|x_k - x^*\|\sqrt{\tau_k L_k + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|x_k - x^*\|^2}{4}}}{\varsigma - L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|} < \|x_k - x^*\|.$$

Доказательство. Согласно лемме 3 (и следствию 3.1) $\psi_{x_k, L_k, \tau_k}(T_{L_k, \tau_k}(x_k))$ имеет оценку сверху:

$$\psi_{x_k, L_k, \tau_k}(T_{L_k, \tau_k}(x_k)) \leqslant \frac{\tau_k}{2} + \frac{L_k\|x_k - x^*\|^2}{2} + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|x_k - x^*\|^4}{8\tau_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\text{прибавим } \psi_{x_k, L_k, \tau_k}(x_{k+1}) - \psi_{x_k, L_k, \tau_k}(T_{L_k, \tau_k}(x_k)) \leqslant \varepsilon_k\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_{x_k, L_k, \tau_k}(x_{k+1}) \leqslant \frac{\tau_k}{2} + \frac{L_k\|x_k - x^*\|^2}{2} + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|x_k - x^*\|^4}{8\tau_k} + \varepsilon_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_{x_k, L_k, \tau_k}(x_{k+1}) = \frac{\tau_k}{2} + \frac{\left(\varphi(x_k,\ x_{k+1})\right)^2}{2\tau_k} + \frac{L_k}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau_k}{2} + \frac{L_k\|x_k - x^*\|^2}{2} + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|x_k - x^*\|^4}{8\tau_k} + \varepsilon_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\varphi(x_k,\ x_{k+1})\right)^2}{2\tau_k} \leqslant \frac{L_k\|x_k - x^*\|^2}{2} + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|x_k - x^*\|^4}{8\tau_k} + \varepsilon_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\tau_k L_k\|x_k - x^*\|^2 + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|x_k - x^*\|^4}{4}} + 2\tau_k\varepsilon_k \geqslant$$

$$\geqslant \varphi(x_k,\ x_{k+1}) \Rightarrow \sqrt{\|x_k - x^*\|^2\left(\tau_k L_k + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|x_k - x^*\|^2}{4}\right)} + 2\tau_k\varepsilon_k \geqslant$$

$$\geqslant \left\|\widehat{F}(x_k) + \widehat{F}'(x_k)(x_{k+1} - x_k)\right\|.$$

Перепишем $\varphi(x_k,\ x_{k+1})$ по-другому:

$$\left\|\widehat{F}(x_k) + \widehat{F}'(x_k)(x_{k+1} - x_k)\right\| =$$

$$= \left\|\underbrace{\widehat{F}'(x^*)\left(x_{k+1} - x^*\right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} A} + \underbrace{\left(\widehat{F}(x_k) - \widehat{F}(x^*) - \widehat{F}'(x^*)(x_k - x^*)\right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} B} + \underbrace{\left(\widehat{F}'(x_k) - \widehat{F}'(x^*)\right)(x_{k+1} - x_k)}_{\stackrel{\text{def}}{=} C}\right\|.$$

По неравенству треугольника для нормы $\|\cdot\|$

$$\|A\| = \|A + B + C - B - C\| \leqslant \|A + B + C\| + \| - B\| + \| - C\| \Rightarrow \|A + B + C\| \geqslant \|A\| - \|B\| - \|C\|;$$
$$\|A\| \geqslant \{\text{из определения минимального сингулярного числа}\} \geqslant \varsigma\|x_{k+1} - x^*\|;$$
$$\|B\| \leqslant \{\text{неравенство (10)}\} \leqslant \frac{L_{\widehat{F}}}{2}\|x_k - x^*\|^2;$$
$$\|C\| \leqslant \{\text{субмультипликативность нормы}\} \leqslant \left\|\widehat{F}'(x_k) - \widehat{F}'(x^*)\right\| \cdot \left\|x_{k+1} - x_k\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \{\text{предположение 1}\} \leqslant L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\| \cdot \|x_{k+1} - x^* + x^* - x_k\| \leqslant$$
$$\leqslant L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|^2 + L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|\|x_{k+1} - x^*\|.$$

Собрав вместе неравенства, получаем оценку снизу на $\varphi(x_k,\, x_{k+1})$:

$$\varphi(x_k,\, x_{k+1}) \geqslant \left(\varsigma - L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|\right)\|x_{k+1} - x^*\| - \frac{3L_{\widehat{F}}}{2}\|x_k - x^*\|^2.$$

Свяжем нижнюю и верхнюю оценку на $\varphi(x_k,\, x_{k+1})$ в единое неравенство:

$$\sqrt{\|x_k - x^*\|^2\left(\tau_k L_k + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|x_k - x^*\|^2}{4}\right) + 2\tau_k\varepsilon_k} \geqslant$$
$$\geqslant \left(\varsigma - L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|\right)\|x_{k+1} - x^*\| - \frac{3L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|^2}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\|x_k - x^*\|^2\left(\tau_k L_k + \frac{L_{\widehat{F}}^2\|x_k - x^*\|^2}{4}\right) + 2\tau_k\varepsilon_k} + \frac{3L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|^2}{2}}{\varsigma - L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|} \geqslant \|x_{k+1} - x^*\|.$$

Докажем оставшуюся часть теоремы. Для начала выведем оценку сверху у значения функции $\widehat{f}_1(x_k)$ с помощью локальной модели $\psi_{x^*, L_{\widehat{F}}, \varphi(x^*, x_k)}(x_k)$:

$$\widehat{f}_1(x_k) \leqslant \{\text{лемма из [Nesterov, 2021]}\} \leqslant \left\|\underbrace{\widehat{F}(x^*)}_{=0} + \widehat{F}'(x^*)(x_k - x^*)\right\| + \frac{L_{\widehat{F}}}{2}\left\|x_k - x^*\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\left\|\widehat{F}'(x^*)(x_k - x^*)\right\|}_{\leqslant M_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|} + \frac{L_{\widehat{F}}}{2}\|x_k - x^*\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\| + \frac{L_{\widehat{F}}}{2}\|x_k - x^*\|^2 < \left\{\begin{array}{c}\text{верхняя граница области}\\ \text{суперлинейной сходимости: } \|x_k - x^*\| < \dfrac{\varsigma}{L_{\widehat{F}}}\end{array}\right\} <$$
$$< \left(M_{\widehat{F}} + \frac{\varsigma}{2}\right)\|x_k - x^*\| \leqslant \left\{\varsigma \leqslant \sigma_{\min}(\widehat{F}'(x^*)) \leqslant \sigma_{\max}(\widehat{F}'(x^*)) \leqslant M_{\widehat{F}}\right\} \leqslant \frac{3M_{\widehat{F}}}{2}\|x_k - x^*\|. \tag{16}$$

Подставим значения τ_k и ε_k в оценку сходимости, положив $t_k = \|x_k - x^*\|$:

$$t_{k+1} \leqslant \frac{\frac{3L_{\widehat{F}}t_k^2}{2} + t_k\sqrt{\widehat{f}_1(x_k)L_k + \frac{L_{\widehat{F}}^2 t_k^2}{4}}}{\varsigma - L_{\widehat{F}}\|x_k - x^*\|} < \left\{L_k \leqslant 2L_{\widehat{F}},\ \text{оценка (16)}\right\} <$$

$$< t_k \underbrace{\left(\frac{\frac{3L_{\widehat{F}}t_k}{2} + \sqrt{3M_{\widehat{F}}L_{\widehat{F}}t_k + \frac{L_{\widehat{F}}^2 t_k^2}{4}}}{\varsigma - L_{\widehat{F}}t_k}\right)}_{\in[0,\,1]\ -\ \text{необходимое условие}} \leqslant t_k.$$

Выведем границы допустимых значений t_k из ограничения на дробь выше:

$$0 \leqslant \frac{3L_{\widehat{F}}t_k}{2} + \sqrt{3M_{\widehat{F}}L_{\widehat{F}}t_k + \frac{L_{\widehat{F}}^2 t_k^2}{4}} \leqslant \varsigma - L_{\widehat{F}}t_k \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{3M_{\widehat{F}}L_{\widehat{F}}t_k + \frac{L_{\widehat{F}}^2 t_k^2}{4}} \leqslant \varsigma - \frac{5L_{\widehat{F}}t_k}{2} \Rightarrow t_k \leqslant \frac{2\varsigma}{5L_{\widehat{F}}},$$

получено первое ограничение. Для вывода оставшихся ограничений возведем в квадрат неравенство выше:

$$3M_{\widehat{F}}L_{\widehat{F}}t_k + \frac{L_{\widehat{F}}^2 t_k^2}{4} \leqslant \left(\varsigma - \frac{5L_{\widehat{F}}t}{2}\right)^2 \Rightarrow -6L_{\widehat{F}}^2 t_k^2 + \left(3M_{\widehat{F}}L_{\widehat{F}} + 5L_{\widehat{F}}\varsigma\right)t_k - \varsigma^2 \leqslant 0.$$

Из квадратного уравнения выводится необходимый отрезок значений $t_k \geqslant 0$, согласованный с полученным выше первым ограничением:

$$0 \leqslant t_k \leqslant \frac{1}{12L_{\widehat{F}}}\left(\left(3M_{\widehat{F}} + 5\varsigma\right) - \sqrt{\left(3M_{\widehat{F}} + 5\varsigma\right)^2 - 24\varsigma^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|x_k - x^*\right\| \leqslant \min\left\{\frac{2\varsigma}{5L_{\widehat{F}}},\ \frac{1}{12L_{\widehat{F}}}\left(\left(3M_{\widehat{F}} + 5\varsigma\right) - \sqrt{\left(3M_{\widehat{F}} + 5\varsigma\right)^2 - 24\varsigma^2}\right)\right\}.$$

Таким образом, получена нижняя оценка на радиус сходимости, при котором будет суперлинейная сходимость с обозначенным выбором ε_k, τ_k, $k \in \mathbb{Z}_+$. □

Следствие 2.1. *Условия теоремы неявно задают ограничения на размерность задачи*:

- *невырожденность системы уравнений* (4) *в точке минимума* $\sigma_{\min}\left(\widehat{F}'(x^*)\right) \geqslant \varsigma > 0$ *означает* $\dim(E_2) \geqslant \dim(E_1)$;
- *совместность системы* (4) $\widehat{F}(x^*) = \mathbf{0}_m$ *обычно выполняется в системах при доминировании количества параметров над количеством условий*: $\dim(E_2) \leqslant \dim(E_1)$.

Таким образом, локальная суперлинейная сходимость в условии теоремы обычно возможна на системах с $\dim(E_1) = \dim(E_2)$.

В теореме 3 выводятся оценки сходимости для метода нормализованных квадратов с выбором $\tau_k = \widehat{f}_1(x_k)$, в оценках содержится явное разделение на область сублинейной сходимости и область линейной сходимости.

Теорема 3. *Допустим выполнение предположений* 1 *и* 2 *для метода Гаусса–Ньютона с алгоритмом реализации* 1, *в которой* $\tau_k = \widehat{f_1}(x_k)$. *Тогда в алгоритме* 1 *для последовательности* $\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *выполняются следующие соотношения*:

$$\widehat{f_1}(x_{k+1}) \leqslant \varepsilon_k + \begin{cases} \dfrac{\widehat{f_1}(x_k)}{2} + \dfrac{L_{\widehat{F}}}{\mu}\widehat{f_2}(x_k) \leqslant \dfrac{3}{4}\widehat{f_1}(x_k), \text{ если } \widehat{f_1}(x_k) \leqslant \dfrac{\mu}{4L_{\widehat{F}}}; \\ \widehat{f_1}(x_k) - \dfrac{\mu}{16L_{\widehat{F}}}, \text{ если иначе.} \end{cases}$$

Если при генерации последовательности $\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *была зафиксирована* $L_k = L_{\widehat{F}}$, *то данные соотношения выражаются по-другому*:

$$\widehat{f_1}(x_{k+1}) \leqslant \varepsilon_k + \begin{cases} \dfrac{\widehat{f_1}(x_k)}{2} + \dfrac{L_{\widehat{F}}}{2\mu}\widehat{f_2}(x_k) \leqslant \dfrac{3}{4}\widehat{f_1}(x_k), \text{ если } \widehat{f_1}(x_k) \leqslant \dfrac{\mu}{2L_{\widehat{F}}}; \\ \widehat{f_1}(x_k) - \dfrac{\mu}{8L_{\widehat{F}}}, \text{ если иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений $\widehat{F}(x) + \widehat{F'}(x)h = 0$, $x \in \mathcal{F}$. В условиях данной теоремы существует $h \in E_1$: $\widehat{F}(x) + \widehat{F'}(x)h = 0$, $x \in \mathcal{F}$, в силу выполнения условия Поляка–Лоясиевича, при этом

$$h = -\widehat{F'}(x)^*\left(\widehat{F'}(x)\widehat{F'}(x)^*\right)^{-1}\widehat{F}(x).$$

Тогда, согласно предположению 2,

$$\|h\| = \left\|\widehat{F'}(x)^*\left(\widehat{F'}(x)\widehat{F'}(x)^*\right)^{-1}\widehat{F}(x)\right\| = \sqrt{\left\langle\left(\widehat{F'}(x)\widehat{F'}(x)^*\right)^{-1}\widehat{F}(x),\ \widehat{F}(x)\right\rangle} \leqslant \frac{\left\|\widehat{F}(x)\right\|}{\sqrt{\mu}} = \frac{\widehat{f_1}(x)}{\sqrt{\mu}}. \tag{17}$$

По определению локальной модели для x_{k+1}, $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} \widehat{f_1}(x_{k+1}) &\leqslant \psi_{x_k,L_k,\widehat{f_1}(x_k)}(x_{k+1}) = \psi_{x_k,L_k,\widehat{f_1}(x_k)}(T_{L_k,\widehat{f_1}(x_k)}(x_k)) + \Big(\psi_{x_k,L_k,\widehat{f_1}(x_k)}(x_{k+1}) - \\ &\quad - \psi_{x_k,L_k,\widehat{f_1}(x_k)}(T_{L_k,\widehat{f_1}(x_k)}(x_k))\Big) \leqslant \varepsilon_k + \psi_{x_k,L_k,\widehat{f_1}(x_k)}(T_{L_k,\widehat{f_1}(x_k)}(x_k)) = \varepsilon_k + \\ &\quad + \min_{y\in E_1}\left\{\frac{\widehat{f_1}(x_k)}{2} + \frac{\left(\varphi(x_k,\ x_k+y)\right)^2}{2\widehat{f_1}(x_k)} + \frac{L_k}{2}\|y\|^2\right\} \leqslant \\ &\leqslant \left\{\text{вместо } y \text{ подставим } th_k = -t\widehat{F'}(x_k)^*\left(\widehat{F'}(x_k)\widehat{F'}(x_k)^*\right)^{-1}\widehat{F}(x_k),\ t\in[0,\ 1]\right\} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon_k + \frac{\widehat{f_1}(x_k)}{2} + \min_{t\in[0,\ 1]}\left\{\frac{1}{2\widehat{f_1}(x_k)}\left\|\widehat{F}(x_k) + t\widehat{F'}(x_k)h_k\right\|^2 + \frac{t^2L_k}{2}\|h_k\|^2\right\} \leqslant \\ &\leqslant \{\text{неравенство (17)}\} \leqslant \varepsilon_k + \frac{\widehat{f_1}(x_k)}{2} + \min_{t\in[0,\ 1]}\left\{\frac{\left\|(1-t)\widehat{F}(x_k)\right\|^2}{2\widehat{f_1}(x_k)} + \frac{t^2L_k}{2\mu}\widehat{f_2}(x_k)\right\} \leqslant \\ &\leqslant \left\{\|\cdot\|^2 \text{ — выпуклая}\right\} \leqslant \varepsilon_k + \frac{\widehat{f_1}(x_k)}{2} + \min_{t\in[0,\ 1]}\left\{\frac{1-t}{2}\widehat{f_1}(x_k) + \frac{t^2L_k}{2\mu}\widehat{f_2}(x_k)\right\} = \\ &= \varepsilon_k + \widehat{f_1}(x_k) + \frac{\widehat{f_2}(x_k)L_k}{\mu}\min_{t\in[0,\ 1]}\left\{\frac{-t\mu}{2\widehat{f_1}(x_k)L_k} + \frac{t^2}{2}\right\} = \end{aligned}$$

$$= \varepsilon_k + \widehat{f}_1(x_k) - \frac{\widehat{f}_2(x_k)L_k}{\mu} \max_{t\in[0,\,1]} \left\{ \frac{t\mu}{2\widehat{f}_1(x_k)L_k} - \frac{t^2}{2} \right\} = \{(12), \text{лемма } 2\} =$$

$$= \varepsilon_k + \widehat{f}_1(x_k) - \frac{\widehat{f}_2(x_k)L_k}{\mu} \varkappa\left(\frac{\mu}{2\widehat{f}_1(x_k)L_k} \right) \leqslant \left\{ \text{монотонное убывание по } L_k \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_k + \widehat{f}_1(x_k) - \frac{2\widehat{f}_2(x_k)L_{\widehat{F}}}{\mu} \varkappa\left(\frac{\mu}{4\widehat{f}_1(x_k)L_{\widehat{F}}} \right).$$

Явно запишем получившееся неравенство в зависимости от $\varkappa(\cdot)$, учитывая монотонное убывание $\frac{\widehat{f}_2(x_k)L_k}{\mu} \varkappa\left(\frac{\mu}{2\widehat{f}_1(x_k)L_k} \right)$ по L_k (следствие 2.1):

$$\widehat{f}_1(x_{k+1}) \leqslant \varepsilon_k + \begin{cases} \widehat{f}_1(x_k) - \dfrac{\mu}{16L_{\widehat{F}}}, \text{ если } \widehat{f}_1(x_k) \geqslant \dfrac{\mu}{4L_{\widehat{F}}}; \\ \dfrac{\widehat{f}_1(x_k)}{2} + \dfrac{\widehat{f}_2(x_k)L_{\widehat{F}}}{\mu} \leqslant \dfrac{3}{4}\widehat{f}_1(x_k), \text{ если } \widehat{f}_1(x_k) \leqslant \dfrac{\mu}{4L_{\widehat{F}}}. \end{cases}$$

Для ограничения на $\widehat{f}_1(x_{k+1})$ при $L_k \equiv L_{\widehat{F}}$ представление в зависимости от $\varkappa(\cdot)$ задается иначе:

$$\widehat{f}_1(x_{k+1}) \leqslant \varepsilon_k + \widehat{f}_1(x_k) - \frac{\widehat{f}_2(x_k)L_{\widehat{F}}}{\mu} \varkappa\left(\frac{\mu}{2\widehat{f}_1(x_k)L_{\widehat{F}}} \right).$$

В явном виде это означает следующее:

$$\widehat{f}_1(x_{k+1}) \leqslant \varepsilon_k + \begin{cases} \widehat{f}_1(x_k) - \dfrac{\mu}{8L_{\widehat{F}}}, \text{ если } \widehat{f}_1(x_k) \geqslant \dfrac{\mu}{2L_{\widehat{F}}}; \\ \dfrac{\widehat{f}_1(x_k)}{2} + \dfrac{\widehat{f}_2(x_k)L_{\widehat{F}}}{2\mu} \leqslant \dfrac{3}{4}\widehat{f}_1(x_k), \text{ если } \widehat{f}_1(x_k) \leqslant \dfrac{\mu}{2L_{\widehat{F}}}. \end{cases} \qquad \square$$

Следствие 3.1. *Адаптивный подбор $\varepsilon_k \geqslant 0$ позволяет точно решить задачу* (5)*. Для этого введем определяющую погрешности последовательность величин $\left\{\delta_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$: $\frac{3}{4}\delta_k > \delta_{k+1} > 0$, $\delta_{-1} = \frac{8}{3}\delta_0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \delta_k = 0$. Дополнительно определим*:

$$\begin{cases} 1.\ \widehat{f}_1(x_{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\mu}{4L_{\widehat{F}}},\ d = 16,\ \textit{для } L_k \in [L,\, L_{\widehat{F}}]; \\ 2.\ \widehat{f}_1(x_{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\mu}{2L_{\widehat{F}}},\ d = 8,\ \textit{для } L_k \equiv L_{\widehat{F}}. \end{cases}$$

Обозначим через $N \in \mathbb{Z}_+ \cup \{-1\}$ минимальный номер итерации, на которой выполнена одна из двух цепочек неравенств (*положим $N = -1$ в случае отсутствия такой итерации*):

$$\begin{cases} 1.\ \widehat{f}_1(x_N) \geqslant \dfrac{\mu}{4L_{\widehat{F}}} \geqslant \widehat{f}_1(x_{N+1}) \textit{ для } L_k \in [L,\, L_{\widehat{F}}]; \\ 2.\ \widehat{f}_1(x_N) \geqslant \dfrac{\mu}{2L_{\widehat{F}}} \geqslant \widehat{f}_1(x_{N+1}) \textit{ для } L_k \equiv L_{\widehat{F}}. \end{cases}$$

Следующая стратегия выбора ε_k *позволяет получить сколь угодно точное приближение решения* (4):

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \delta_0 \colon \delta_0 < \dfrac{\mu}{dL_{\widehat{F}}} \text{ при } k = 0; \\ \delta_{k-1} - \delta_k, \text{ если } 0 < k \leqslant N+1; \\ \dfrac{3}{4}\delta_{k-1} - \delta_k, \text{ если } k > N+1. \end{cases}$$

То есть с увеличением номера итерации погрешность поиска x_{k+1} *убывает*:

$$\begin{cases} \widehat{f}_1(x_k) \leqslant 2\delta_0 - \delta_{k-1} + \widehat{f}_1(x_0) - \dfrac{k\mu}{dL_{\widehat{F}}}, \text{ если } 0 < k \leqslant N+1; \\ \widehat{f}_1(x_k) \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-N-1} \widehat{f}_1(x_{N+1}) + \delta_N \left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-N-1} - \delta_{k-1}, \text{ если } k > N+1. \end{cases}$$

Данные оценки выведены с помощью сложения соответствующих неравенств друг с другом из условия теоремы для $k \in \overline{0, N+1}$ *и раскрытия рекуррентной зависимости для* $k > N+1$, *к полученным выражениям применены значения* ε_k.

Следствие 3.2. *В случае постоянной погрешности* $\varepsilon_k = \varepsilon > 0$ *для достижения уровня функции* $\widehat{f}_1(x_k) \leqslant \varepsilon$ *количество необходимых в худшем случае итераций и максимальное значение погрешности зависят от стратегии поиска* L_k. *Для* $L_k \in [L, 2L_{\widehat{F}}]$ *условия следующие*:

- *если* $\varepsilon \geqslant \frac{\mu}{4L_{\widehat{F}}}$, *то* $k \geqslant \left\lceil \left(\frac{\mu}{16L_{\widehat{F}}} - \varepsilon\right)^{-1} \left(\widehat{f}_1(x_0) - \varepsilon\right) \mathbb{1}_{\left\{\widehat{f}_1(x_0) > \varepsilon\right\}} \right\rceil$, $\varepsilon < \frac{\mu}{16L_{\widehat{F}}}$;
- *если* $\varepsilon < \frac{\mu}{4L_{\widehat{F}}}$, *то* $k \geqslant \left\lceil \left(\frac{\mu}{16L_{\widehat{F}}} - \varepsilon\right)^{-1} \left(\widehat{f}_1(x_0) - \frac{\mu}{4L_{\widehat{F}}}\right) \mathbb{1}_{\left\{\widehat{f}_1(x_0) > \frac{\mu}{4L_{\widehat{F}}}\right\}} + \log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{\mu}{4r\varepsilon L_{\widehat{F}}}\right) \right\rceil$, $\varepsilon \leqslant \frac{(1-r)\varepsilon}{4}$, $r \in (0,\ 1)$.

Для точно известного значения $L_k = L_{\widehat{F}}$ *количество необходимых итераций меньше и допустимая погрешность больше*:

- *если* $\varepsilon \geqslant \frac{\mu}{2L_{\widehat{F}}}$, *то* $k \geqslant \left\lceil \left(\frac{\mu}{8L_{\widehat{F}}} - \varepsilon\right)^{-1} \left(\widehat{f}_1(x_0) - \varepsilon\right) \mathbb{1}_{\left\{\widehat{f}_1(x_0) > \varepsilon\right\}} \right\rceil$, $\varepsilon < \frac{\mu}{8L_{\widehat{F}}}$;
- *если* $\varepsilon < \frac{\mu}{2L_{\widehat{F}}}$, *то* $k \geqslant \left\lceil \left(\frac{\mu}{8L_{\widehat{F}}} - \varepsilon\right)^{-1} \left(\widehat{f}_1(x_0) - \frac{\mu}{2L_{\widehat{F}}}\right) \mathbb{1}_{\left\{\widehat{f}_1(x_0) > \frac{\mu}{2L_{\widehat{F}}}\right\}} + \log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{\mu}{2r\varepsilon L_{\widehat{F}}}\right) \right\rceil$, $\varepsilon \leqslant \frac{(1-r)\varepsilon}{4}$, $r \in (0,\ 1)$.