ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 24. Выпуск 4.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-63-77

Комбинаторные сложностные характеристики слов Штурма

В. О. Кирова, И. В Годунов

Кирова Валерия Орлановна — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: kirova_vo@mail.ru
Годунов Игорь Валентинович — Российский государственный социальный университет (г. Москва).
e-mail: godunov.biz@gmail.com

Аннотация

В статье рассматриваются комбинаторные сложностные характеристики бесконечных слов, а именно комбинаторная сложность и ее модификации. Прежде всего, представлен обзор имеющихся результатов для класса слов с наименьшей комбинаторной сложностью - слов Штурма. Особое внимание уделено арифметической сложности бесконечных слов, начало изучение которой положила Теорема Ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях. Арифметическая сложность является в некотором смысле модификацией комбинаторной сложности. Представлен обзор текущих результатов и точных значений арифметической сложности для слов Штурма. В статье представлена полиномиальная Теорема Ван дер Вардена, дающая начало изучению более обобщенной модификации функции комбинаторной сложности - полиномиальной сложности бесконечных слов. В завершение, мы представляем ряд открытых проблем для дальнейшего исследования.

Ключевые слова: Слова Штурма, комбинаторная сложность, арифметическая сложность, полиномиальная сложность.

Библиография: 38 названий.

Для цитирования:
В. О. Кирова, И. В. Годунов. Комбинаторные сложностные характеристики слов Штурма // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 4, с. 63–77.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 24. No. 4.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-4-63-77

On the complexity functions of Sturmian words

V. O. Kirova, I. V Godunov

Kirova Valeria Orlanovna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: Kirova_vo@mail.ru
Godunov Igor Valentinovich — Russian State Social University (Moscow).
e-mail: godunov.biz@gmail.com

Abstract

The key issue of the paper is combinatorial complexity functions of infinite words, especially factor complexity and its modifications. First of all, we present an overview of the available results for the class of words with the minimal factor complexity - Sturmian words. Special attention is paid to the arithmetical complexity of infinite words, the study of which was initiated by Van der Waarden Theorem on one-color arithmetic progressions. Arithmetical complexity is presented in a sense a modification of factor complexity. An overview of current results and exact values of arithmetic complexity for Sturmian words is presented. We present polynomial Van der Waerden Theorem, which gives rise to the study of a more generalized modification of the factor complexity function - the polynomial complexity of infinite words. In conclusion, we present open problems for further research.

Keywords: Sturmian word, factor complexity, arithmetical complexity, polynomial complexity.

Bibliography: 38 titles.

For citation:
V. O. Kirova, I. V. Godunov, 2023, “On the complexity functions of Sturmian words” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 63–77.

Посвящается 60-летию профессора Канеля — Белова А. Я.

1. Введение

Изучение комбинаторики слов началось в 1906 году с работ норвежского математика Акселя Туэ [38, 39], и продолжено Морсом и Хедлундом [21] в 1940 году. В своей работе [38] Туэ поставил вопрос о существовании бесконечного слова над конечным алфавитом, в котором нет слов, состоящих из двух последовательных вхождений одинаковых подслов. Такие слова называются *квадратами.* Например, это было бы слово *ababab*, в котором есть три последовательных вхождения квадрата *ab*. Очевидно, что если алфавит состоит из двух символов, то не существует бесконечных слов без квадратов. Однако Туэ построил пример такого слова над 3-буквенным алфавитом. Полученные результаты легли в основу нового направления исследований - теории избегаемости.

Пусть Σ_q– алфавит мощности q. Слово вида $w = \cdots w_{-2}w_{-1}w_0w_1w_2\cdots$, где все $w_i \in \Sigma_q$, называется *бесконечным в обе стороны.* Слово называется *бесконечным вправо*, если имеет вид $w = w_0\ w_1w_2\cdots$. Количество символов n в конечном слове $w = w_0\cdots w_n$ называется *длиной слова* w и обозначается через $|w|$. Число вхождений символа a в слово w обозначается через $|w|_a$. Ключевую роль в изучении комбинаторных характеристик бесконечных слов имеют *подслова* (в англоязычной литературе принято употреблять понятие *фактор*) слова w – конечные слова $w_kw_{k+1}\cdots w_{k+n-1}$ длины n.

Пример 1. *Рассмотрим бесконечное вправо слово* $w = 0011100100111\cdots$ *над бинарным алфавитом* $\Sigma_2 = \{0,1\}$. *Конечное слово* $u = 001$ *является его подсловом длины* $|u| = 3$. *Существуют как минимум три его вхождения в слово* w*:* $u = w_{[0,2]}$, $u = w_{[5,7]}$ *и* $u = w_{[8,10]}$. *Нули входят в слово u два раза, а единица один, и обозначается* $|u|_0 = 2$ *и* $|u|_1 = 1$ *соответственно.*

Слово w называется *периодическим*, если существует $T \in \mathbb{N}$ такое что для всех i верно равенство : $w_i = w_i + T$. Слово называется *со временем периодическим* если существуют T, $i_0 \in N$ для которых верно $\forall i \geq i_0 : w_i = w_i + T$. Бесконечное вправо слово w называется *со временем t-периодическим*, если равенства $w_i = w_{i+t}$ выполняются, начиная с некоторого N_0, то есть при $i > N_0$.

Нетрудно видеть, что всего существует q^t бесконечных t-периодических слов над конечным алфавитом Σ_q - независимо от того, о каких слова идет речь: бесконечных вправо или в обе стороны.

В 1940 году в работе [21] Морс и Хедлунд ставят вопрос о множестве подслов заданной длины бесконечного слова и вводят следующее понятие, являющееся ключевым в комбинаторике слов. *Комбинаторной сложностью* (или *факторной* сложностью) слова w называется количество подслов длины n и обозначается $p_w(n)$.

Следующие две леммы являются классическими результатами комбинаторики на словах и упоминаются практически в каждой монографии на эту тему.

Лемма 1. *Бесконечное в обе стороны (вправо) слово w является периодическим (со временем периодическим) тогда и только тогда, когда его комбинаторная сложность $p_w(n)$ ограничена сверху константой, и, начиная с некоторого момента, равна этой константе.*

Лемма 2. *Если слово w не является со временем периодическим, то для любого n для его комбинаторной сложности $p_w(n)$ верно неравенство $p_w(n) \geq n+1$.*

Для бесконечного слова w результат, полученный М. Ковеном и Г. Хедлундом, гласит, что если $p_w(n) \leq n$, то слово w является со временем периодическим. В частности, ими была доказана следующая Теорема.

Теорема 1 (Coven, Hedlund). *Пусть w - слово над алфавитом мощности q. Следующие условия эквивалентны:*

- $p_w(n) < n + q - 1$ *для любого* n,
- $p_w(n) = p_w(n+1)$ *для любого* n,
- *функция* $p_w(n)$ *ограничена,*
- *слово* w *со временем периодично.*

Слова, для которых при всех n верно равенство $p_w(n) = n+1$, то есть непериодические слова с наименьшей комбинаторной сложностью, образуют класс так называемых *слов Штурма*. Подробнее о них рассказывается в следующем разделе. Раздел 3 посвящен арифметической сложности слов Штурма, начало изучение которой положила Теорема Ван дер Вардена об одноцветных арифметических прогрессиях. Арифметическая сложность являеся в некотором смысле модификацией комбинаторной сложности. В разделе 4 представлена полиномиальная Теорема Ван дер Вардена, дающая начало изучению более обобщенной модификации функции комбинаторной сложности - полиномиальной сложности бесконечных слов.

2. Слова Штурма

Слова Штурма имеют долгую историю. Они относятся к классу бесконечных слов и хорошо изучены. Первые изложения были представлены Бернулли, Кристоэлем и Марковым в книге А. Венкова [40]. Термин *слово Штурма* впервые был введен в Хедлундом и Морсом работе [23] при развитии символической динамики [21], [22]. Большое количество работ посвящено свойствам этих последовательностей ([34], [18], [35]). В работах Раузи [29],[30], [31], Браун [8], Ито и Ясутоми [24] рассматривали комбинаторные свойства слов Штурма. Связь с итерационными морфизмами были рассмотрены в работаех Сиболда [33] и Мигноси [26]. Слова Штурма присутствуют в таких областях как эргодическая теория [28], компьютерная графика [9] и кристаллография.

Слова Штурма имеют несколько эквивалентных определений [5] , включая определение комбинаторной сложности. Прежде всего, бесконечное вправо слово $w = w_0w_1w_2\cdots$ над бинарным алфавитом $\{0,1\}$ называется словом Штурма, если его комбинаторная сложность $p_w(n)$ равна $n+1$ для всех значений n.

Помимо приведенного выше определения, существует несколько эквивалентных определений слов Штурма [5].

Бесконечное вправо слово называется словом Штурма, если оно является непериодически *уравновешенным* словом, т.е. для каждого значения n число единиц в подсловах слова w длины n принимает не более двух значений - в действительности, ровно два соседних значения. Это определение может быть записано следующим равенством: пусть u и v – два подслова слова w одинаковой длины. Пусть $|u|_1$ и $|v|_1$ – количество единиц в подсловах u и v соответственно. Тогда

$$||u|_1 - |v|_1| \leq 1.$$

Слова Штурма - это в точности *механические* слова с иррациональным наклоном, т.е. бесконечное вправо или в обе стороны слово, каждый символ которого задан одним из двух равенств:

$$w_i = \lfloor \alpha(i+1)+\beta \rfloor \; - \; \lfloor \alpha i + \beta \rfloor \,,$$

или

$$w_i = \lceil \alpha(i+1)+\beta \rceil - \lceil \alpha i + \beta \rceil$$

где $\alpha \in (0,1)$ - это *иррациональный наклон* слова Штурма, и $\beta \in [0,1)$. Мы можем говорить о *нижних* и *верхних* словах Штурма если в определении выбрана нижняя или верхняя целая часть. Оба варианта совпадают в случае, когда $\alpha i + \beta$ не является целым. Определения будут эквивалентны только в случае бесконечных вправо слов, так как не всякое бесконечное в обе стороны слово со сложностью $n+1$ будет словом Штурма.

Приведенное выше определение можно эквивалентным образом переписать с помощью вращения единичной окружности - двоичного кодирования траектории точки на окружности длины 1. Этот круг реализуется как интервал $[0,1]$, идентифицирующий 0 и 1, то есть принимающий дробные части $x \mapsto x mod 1$, и каждый символ записывается по правилу:

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\alpha i + \beta\} \in [1-\alpha, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

для всех $i \geq 0$.

В терминах окружности это звучит так: начните с точки $x_0 = \beta$ на окружности и поворачивайте дугу длиной α в каждый дискретный момент времени $x_{k+1} = (\alpha + x_k) mod 1$, затем закодируйте результирующие точки на 1, когда они принадлежат к $I_1 = [1-\alpha, 1]$ и 0, когда они принадлежат к $I_0 = [0, 1-\alpha]$.

Мы видели, что символы в слове Штурма w соответствуют интервалам I_0 и I_1, этот процесс можно повторить, чтобы объяснить, что происходит с факторами из $\{0,1\}^n$. В результате коэффициенты соответствуют интервалам окружности, ограниченным $0, -\alpha, -2\alpha, \cdots, -n\alpha$, по модулю 1. Обратите внимание, что, поскольку α иррационально, то точки $0, -\alpha, -2\alpha, \cdots, -n\alpha$, по модулю 1 все различны. Таким образом, приведенные выше точки ограничивают интервалы окружности $n+1$: у нас есть $n+1$ возможных факторов из $\{0,1\}^n$ длины n, появляющихся в слове w.

Пример 2. *Если взять $\alpha = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 - 1$ и $\beta = 0$, то получится слово*

$$w = 0100101001001010010100100101001001\ldots$$

которое называется словом Фибоначчи*, и является классическим примером слова Штурма.*

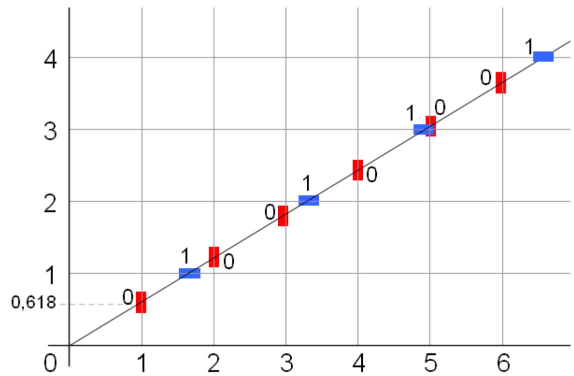

Рис. 1: Построение слова Фибоначчи

В качестве примера слова Штурма на рисунке 1 изображено построение слова Фибоначчи как механического слова: его очередной символ равен нулю тогда и только тогда, когда прямая $y = \alpha i + \beta$, где $0 \leq \alpha, \beta < 1$, не пересекает целочисленную горизонталь между двумя целочисленными вертикалями, и единице, если она ее пересекает.

Заметим, что количество единиц в подслове длины n слова Штурма с наклоном α может быть равно либо $\lfloor n\alpha \rfloor$, либо $\lceil n\alpha \rceil$, в полном соответствии с определением слова Штурма как уравновешенного слова.

Все эти эквивалентные определения относятся к словам над алфавитом $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Слово над любым другим бинарным алфавитом называется словом Штурма, если получается из слова Штурма над алфавитом $\{0, 1\}$ взаимно однозначным переименованием символов.

Мигноси [26], основываясь на предположении о неоднозначности языка [15], доказал в 1989 году следующую важную теорему.

Теорема 2. *Количество подслов длины n в слове Штурма определяется суммой*

$$1 + \sum_{1}^{n} (n - i + 1)\phi(i)$$

где $\phi(i)$– функция Эйлера.

Доказательство этой теоремы основано на тонком анализе структуры слова Штурма. Однако Берсель и Поккьоль [6] представили доказательство формулы с помощью геометрического двойственного метода. Метод основан на том, что каждому заданному двумя параметрами слову можно поставить в соответствие точку на плоскости, координаты которой равны параметрам слова. При определенном выборе параметров точки из одной связной области будут соответствовать одному и тому же слову. В данном случае области оказываются гранями плоского графа, а значит их количество можно посчитать по формуле Эйлера. Таким образом, количество всех подслов длины n слова Штурма может быть получено как количество всех связных областей плоскости.

Помимо комбинаторной сложности существует множество различных функций сложности: сложность Ли [7], Абелева сложность [12], k-абелева сложность [20], арифметическая сложность [4], [10], максимальная шаблонная сложность [19], циклическая сложность [11], биномиальная сложность [32], оконная сложность [13], сложность периода [27] , сложность палиндрома [3] . В большинстве случаев эти альтернативные понятия сложности могут быть использованы для обнаружения (а в некоторых случаях и для характеристики) со временем периодических слов. Среди этого списка, мы будем рассматривать лишь арифметическую сложность, являющуюся в некотором смысле модификацией комбинаторной сложности.

3. Арифметическая сложность бесконечных слов

Понятие арифметической сложности бесконечного слова впервые было введено в 2000 г. С. Августиновичем, Д. Фон-Дер-Флассом и А. Фрид в работе [4], и на настоящий момент прекрасно изучены авторами определения. Начало изучению арифметической сложности положили теоремы Ван дер Вардена [41] и Семерди [36].

Теорема Ван дер Вардена — классический результат комбинаторной теории чисел об одноцветных арифметических прогрессиях в раскрасках натуральных чисел.

Theorem 1 (Ван дер Варден, 1927). *Пусть $l, k \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое натуральное число $n(k,l)$, что при разбиении любого отрезка ряда натуральных чисел длины $n(k,l)$ любым способом на k классов (среди которых могут быть и пустые) по крайней мере в одном из этих классов найдется арифметическая прогрессия длины l.*

Несмотря на кажущуюся простоту и естественность теорема Ван дер Вардена сыграла значительную роль в развитии двух разделов математики – аддитивной комбинаторики и комбинаторной эргодической теории. Теорема Ван дер Вардена является типичным утверждением теории Рамсея, а также предтечей теоремы Семереди, которая положила начало большой ветви аддитивной комбинаторики. Прежде всего, дадим следующее важное определение.

Будем говорить, что множество $A \in \mathbb{N}$ имеет *положительную асимптотическую плотность*, если

$$lim_{n\to\infty}\sup\frac{|A\{1,2,3,\cdots,n\}|}{n} > 0.$$

Theorem 2 (Семереди, 1975). *В любом бесконечном множестве $A \in \mathbb{N}$ положительной асимптотической плотности для всякого положительного целого l существует арифметическая прогрессия длины l .*

В своем доказательстве Семереди использует трудные комбинаторные аргументы. Основу его доказательства составляет так называемая Лемма регулярности [37], которая является, на сегодняшний день, важнейшим инструментом исследования графов. Из этой замечательной теоремы выросла новая большая область комбинаторной теории чисел. Обсуждению этой тематики и посвящен обзор И.Д. Шкредова [42].

Прежде чем подойти к понятию арифметической сложности слова, введем обозначение для арифметической подпоследовательности и дадим определение арифметического замыкания.

Для всякого бесконечного вправо слова $w = w_1 \cdots w_n \cdots$ через w_d^k обозначим бесконечное слово $w_d^k = w_k w_{k+d} \cdots w_{k+nd} \cdots$ – *арифметическую подпоследовательность* слова w с разностью d и начальной позицией k.

Арифметическим замыканием бесконечного слова w называется множество

$$A_w = \{w_k w_{k+d} w_{k+2d} \cdots w_{k+(n-1)d} | k \geq 0, d > 0\}.$$

Теоремы Ван дер Вадрена и Семереди в данных терминах могут быть сформулированы следующим образом.

Theorem 3 (Ван дер Варден). *Во всяком слове w существует символ a, такой что $a^n \in A_w$ для всякого $n > 0$.*

Theorem 4 (Семерди). *Если в слове w для некоторого символа a верхний предел отношения количества вхождений символа a в префикс слова w к длине этого префикса положителен,*

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{|w[1..n]|}{n} > 0$$

то $a \in A_w$ для всех $n > 0$.

Эти теоремы дают ответ на вопрос о том, какие слова обязательно входят в арифметическое замыкание.

Арифметическая сложность $a_w(n)$ определяется как как совокупное число всех подслов арифметических подпоследовательностей данного слова $a_w(n) = \#\left(A_w \cap \Sigma_q^n\right)$.

Эта функция является одной из наиболее изученных модификаций классической функции комбинаторной сложности $p_w(n)$.

Вопросы, возникающие в связи с арифметической сложностью, аналогичны вопросам, связанным с комбинаторной сложностью: как растет функция арифметической сложности ? В каких случаях функция ведет себя линейно? Эти вопросы непросты для комбинаторной сложности, но могут быть частично решены для арифметической сложности.

Арифметическая сложность отражает структуру множества арифметических подслов бесконечного слова, то есть слов, встречающихся в нем по арифметическим прогрессиям. Арифметическая сложность имеет тесную связь как с классической комбинаторикой, так и с дискретной динамикой. Начало изучению арифметической сложности положили теоремы Ван дер Вардена и Семерди [36], представленные далее. Эти теоремы дают ответ на вопрос о том, какие слова обязательно входят в арифметическое замыкание.

Теорема 3 (Ван дер Варден). *Во всяком слове w существует символ a, такой что $a^n \in A_w$ для всякого $n > 0$.*

Теорема Семерди о наличии длинных арифметических прогрессий в плотных множествах в данных терминах может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 4 (Семерди). *Если в слове w для некоторого символа a верхний предел отношения количества вхождений символа a в префикс слова w к длине этого префикса положителен,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|w[1..n]|}{n} > 0$$

то $a \in A_w$ для всех $n > 0$.

Ясно, что арифметическая сложность бесконечного слова не может быть меньше его комбинаторной сложности, поскольку арифметическое замыкание содержит множество подслов бесконечного слова - его арифметических подслов с разностью 1. Таким образом, верно следующее:

$$1 \le p_w(n) \le a_w(n) \le q^n.$$

Нетрудно также убедиться, что арифметическая сложность бесконечного слова ограничена константой тогда и только тогда, когда слово со временем периодично; сложность же бесконечного слова может расти линейно, как впервые было показано в [4]. При этом почти все бесконечные слова, разумеется, имеют максимально возможную арифметическую сложность q^n, причем это возможно, даже если комбинаторная сложность слова растет линейно.

3.1. Арифметическая сложность слов Штурма

Функция арифметической сложности прежде всего была изучена на словах Штурма. Естественным образом возник вопрос: является ли арифметическая сложность слов Штурма также минимальной? Ответ на этот вопрос отрицательный, и может быть получен уже из характеристики равномерно повторяющихся слов линейной арифметической сложности [16]: слова Штурма даже не попадают в класс слов, имеющих линейную сложность. Более того, кажется, что уникальной функции минимальной арифметической сложности непериодического слова не существует: по крайней мере, для равномерно повторяющихся слов вместо этого мы имеем семейство функций с убывающими верхней и нижней асимптотами [2].

Но какова арифметическая сложность слова Штурма? В работе [10] Ж. Кассень и А. Фрид, используя геометрический двойственный метод [6], установили верхнюю оценку арифметической сложности, единую для всех слов Штурма и равную $O\left(n^3\right)$. Если быть точнее, то

$$g(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \sum_{p=1}^{n}(n-p+1)\phi(p) + 2$$

где $\phi(p)$ – функция Эйлера.

Теорема 5. *Для всякого $\alpha \in (0,1)$ верно неравенство*

$$a_\alpha(n+1) \le g(n).$$

Заметим, что $g(n) = (1/6 + 1/\pi^2)n^3 + O(n^2)$, т.е. растет как $O\left(n^3\right)$.

Так же авторы показали, что сама функция арифметической сложности зависит от выбора наклона слова Штурма. Исследовав этот интересный факт для некоторых слов Штурма, включая слово Фибоначчи, так же было установлено, что в рассмотренных случаях разница между верхней границей и реальной арифметической сложностью ограничена.

В этой же работе были получены точные оценки арифметической сложности для наклонов слова Штурма из интервала $\alpha \in (1/3, 1/2)$, и вращательных слов с иррациональной длиной интервала $\alpha \in (1/3, 1/2)$.

Теорема 6. *Для наклона слова Штурма $\alpha \in (0.4, 0.5)$ верны равенства $a_\alpha(1) = 2$, $a_\alpha(2) = 4$, $a_\alpha(3) = 8$, $a_\alpha(4) = 16$, $a_\alpha(5) = 30$*

$$a_\alpha(n+1) = \begin{cases} g(n) - 4, & \text{если } n \text{ - четное} \\ g(n) - 3, & \text{если } n \text{ - нечетное} \end{cases}$$

если $n + 1 \ge 6$.

Теорема 7. *Для наклона слова Штурма $\alpha \in (0.375, 0.4)$ верны равенства $a_\alpha(1) = 2$, $a_\alpha(2) = 4$, $a_\alpha(3) = 8$, $a_\alpha(4) = 16$, $a_\alpha(5) = 30$, $a_\alpha(6) = 52$, $a_\alpha(7) = 83$, $a_\alpha(8) = 128$ и*

$$a_\alpha(n+1) = \begin{cases} g(n) - 8, & \text{если } n \text{ - четное} \\ g(n) - 9, & \text{если } n \text{ - нечетное} \end{cases}$$

если $n + 1 \ge 9$.

Отметим, что эта формула верна и для слова Фибоначчи, заданного $\alpha = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 - 1 = 0.381966$.

Для остальных значений α ситуация намного сложнее, так как при геометрическом изображении слова в построенной схеме встречается сколь угодно большое число центральных расщепляющихся граней, и разность между числом граней схемы и значением $a_\alpha(n+1)$ растет.

В отличие от верхней оценки на арифметическую сложность слова Штурма, нижняя оценка, полученная в работе А. Фрид [17] , является достаточно точной (в том смысле, что в некоторых случаях разность между ней и точными значениями ограничена константой).

Теорема 8. *Для всех $n > 0$ арифметическая сложность слова Штурма с наклоном $\alpha < 1/2$ удовлетворяет неравенству*

$$a_\alpha(2n-2) \;\ge\; \sum_{p=1}^{n} p\phi(p) - 1/2 \sum_{p=1}^{\lfloor 2/\alpha \rceil} p\phi(p) - 1/2 \sum_{p=1}^{\lceil 1/\alpha \rceil} p\phi(p)$$

где $\phi(i)$– функция Эйлера.

Однако в этой же работе результат дополняется менее точно нижней оценкой, имеющей кубический порядок: существует нижняя граница арифметической сложности слова Штурма , которая также равна $O(n^3)$ (точнее, значение равно $n^3/4\pi^2 + O(n^2) - O(1/\alpha^3)$, где α - наклон слова Штурма). Итак, нижняя и верхняя границы отличаются примерно в 10,58 раза, причем верхняя более реалистична. Стоит обратить внимание, что другие функции сложности слов Штурма различаются сильнее. Максимальная шаблонная сложность слова Штурма также минимальна среди непериодических слов и равна $2n$, хотя слова Штурма - не единственные слова, обладающие этим свойством. Шаблонная сложность слова Штурма, как и арифметическая сложность, зависит от выбора слова и может быть равна $\Omega(n^3)$, хотя принцип зависимости от конкретного слова совершенно иной.

Таким образом, взятые вместе результаты на оценку роста арифметическую сложность слов Штурма означают, что слова Штурма с любым наклоном имеют кубический порядок роста.

4. Полиномиальная сложность

Как упоминалось ранее, Теорема Ван дер Вардена положила начало изучению арифметической сложности бесконечных слов. Естественным образом возникает интерес к рассмотрению следующего вопроса: если не ограничиваться арифметическими подпоследовательностями, а взять подпоследовательности с более прогрессирующим шагом ? В этом разделе мы вводим новое понятие *полиномиальной сложности* слова, изучение которой задает модификация Теоремы Ван дер Вардена для полиномиального случая. Так, А. Либман и В. Бергельсон [25] представили частный случай полиномиальной Теоремы Ван дер Вардена.

Theorem 5 (Полиномалььаня Теорема Ван дер Вардена). *Пусть $l, r \in \mathbb{N}$ и $p(d)$ — полином с целочиселнными коэффициентами, т.ч. $p(0) = 0$. Тогда для любой раскраски множества целых чисел $\mathbb{Z}$ в r цветов существуют $a, d \in \mathbb{Z}$ т.ч. найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины l:*

$$a, a + p(d), 2 + 2p(d), \cdots, a + (l-1)p(d)$$

Мы рассмотрим более общий случай. Рассмотрим полином $Q_d(k) = a_d k^d + a_{d-1}k^{d-1} + \cdots + $ $+ a_1 k + a_0$, где $a_i, d \in \mathbb{N}$, и $i \in \{0, \ \ldots, \ d\}$.

Прежде чем подойти к понятию полиномиальной сложности, аналогично понятиям арифметической подпоследовательности и арифметического замыкания, введем следующий термин. Для заданного полинома $Q_d(k)$ определим *полиномиальную подпоследовательность* длины n бесконечного вправо слова w как конечную последовательность вида

$$w_{Q_d(k)} w_{Q_d(k+1)} \cdots w_{Q_d(k+n-1)}.$$

где $k-$ начальная позиция.

Пример 3. *Рассмотрим функцию $Q_2(k) = k^2 + 1$ на слове Фибоначчи:*

$$w = 0100101001001010010100100101001001 \cdots$$

тогда полиномиальная подаоследовательность для $n = 5$ будет иметь вид

$$10010.$$

Аналогично арифметическому замыканию, введем полиномиальное. *Полиномиальное замыкание* бесконечного вправа слова w для полинома степени d называется следующее множество:

$$P_w^d = \{w_{Q_d(k)} w_{Q_d(k+1)} \cdots w_{Q_d(k+n-1)} | n, d > 0, k \geq 0\}$$

Для данного бесконечного справа слова $w = w_1 w_2 \cdots$ и полинома $Q_d(k)$ степени d мы определяем *полиномиальную сложность* как функцию $\mathcal{P}_w^d(n)$, равную количеству всех различных полиномиальных подпоследовательностей длины n, встречающихся в слове w:

$$\mathcal{P}_w^d(n) = \# \left(P_w^d \cap \Sigma_q^n \right).$$

Прежде всего, мы рассмотрим случай для полинома степени $d = 1$. Если $Q_1(k) = ak + b$, то $w_{ak+b} w_{a(k+1)+b} \cdots w_{a(k+n)+b}$, т.е. полиномиальное слово является арифметической подпоследовательностью w_a^{ax+b} слова w с разностью a и начальной позицией $ak + b$. Таким образом, арифметическое замыкание A_w включено в P_w^d, и для $d = 1$ равенство $A_w = P_w^1$ истинно.

Но что можно сказать для случая более высоких степеней полинома? Очевидно, что полиномиальная сложность бесконечного слова является неубывающей функцией, которая растет не быстрее, чем число всех возможных слов над заданным алфавитом q^n. Более того, она растет не медленнее, чем факторная сложность слова w. Поскольку арифметическая сложность является частным случаем полиномиальной сложности, то функция полиномиальной сложности растет не медленнее, чем арифметическая сложность слова w. Таким образом, для любых $d, n > 0$ верны следующие неравенства :

$$1 \leq p_w(n) \leq a_w(n) \leq \mathcal{P}_w^d(n) \leq q^n.$$

Очевидно предположить, что функция полиномиальной сложности в первую очередь ограничена степенью полинома d.

Так как арифметическая сложность является частным случаем полиномиальной сложности, для которой при рассмотрении на словах Штурма известны нижние и верхние оценки, а также точные формулы при определенных наколнах, ествественным образом возникает желание рассмотреть введенную функцию полиномиальной сложности прежде всего на словах Штурма.

В заключение, сделаем предположение об оценке скорости роста функции полиномиальной сложности для слов Штурма.

Предложение 1. *Пусть $w-$ слово Штурма. Для любого $d \in \mathbb{N}$ верно:*

$$p_w(n) \leq \mathcal{P}_w(n) \leq O(n^{d+3}).$$

В будущем, конечно, стоит более подробно рассмотреть поведение полиномиальной сложности для слова Штурма и рассмотреть слова из других классов бесконечных слов (слово Теплица, слово Туэ–Морса и так далее). В частности, для какого класса полиномов степени $d > 1$ функция $\mathcal{P}_w(n)$ растет линейно ? Существует ли вообще такой полином? Если же не ограничиваться натуральными коэффициентами, а взять $a_i \in \mathbb{R}$?

Мы оставляем все эти проблемы открытыми для дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Banks W. D., Conflitti A., Shparlinski I. E. Character sums over integers with restricted g-ary digits // Illinois J. Math. 2002. Vol. 46, №3. P. 819-836.

2. Avgustinovich S., Cassaigne J., Frid A. Sequences of low arithmetical complexity // Theoret. Inform. Appl. 40 (2006) P. 569–582

3. Allouche J.-P. Baake M. Cassaigne J., Damanik D. Palindrome complexity Selected papers in honor of Jean Berstel // Theoret. Comput. Sci. 292 (2003), no. 1, p. 9–31.

4. Avgustinovich S. V. , Fon-Der-Flaass D. G. , Frid A. E. Arithmetical complexity of infnite words // Proc. Words, Languages and Combinatorics III, 2000. Singapore: World Scientifc, 2003. P. 51-62.

5. Berstel J., P. Seebold. Sturmian words, in: M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words // Cambridge University Press, 2002. P. 40-97.

6. Berstel J., M. Pocchiola. A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words// Int. J. Algebra and Comput., 1993, V. 3, 349 -355.

7. Bell, J. P., Shallit, J. Lie complexity of words// Theoret. Comput. Sci. in press (2022).

8. Brown C. A characterization of the quadratic irrationals// Canad. Math. Bull. (1991), 364

9. Bresenham J. E. Algorithm for computer control of a digital plotter. IBM Systems J. (1965), 25-30.

10. Cassaigne J., E.A. Frid. On the arithmetical complexity of Sturmian words// Theoretical Computer Science, 2007, V. 380, P.304-316.

11. Cassaigne J., Fici, G., Sciortino, M., and Zamboni, L. Cyclic complexity of words// J. Combin. Theory Ser. A 145 (2017), 36–56.

12. Cassaigne J., Richomme, G., Saari, K., and Zamboni, L. Avoiding. Abelian powers in binary words with bounded Abelian complexity. Internat// J. Found. Comput. Sci. 22, 4 (2011), 905–920.

13. Cassaigne J., Kabor´e, I., Tapsoba, T. *On a new notion of complexity on infinite words.* Acta Univ. Sapientiae Math. 2, 2 (2010), 127–136.

14. Ethan M. Coven, Hedlund G. Sequences with minimal block growth Mathematical systems theory volume 7, 138–153, 1973

15. Dulucq S., D. Gouyou-Beauchamp. *Sur les facteurs des suites de Sturm*, Rapport No. I-8735, Comput. Sci., 1987.

16. A. Frid. Sequences of linear arithmetical complexity// Theoret. Comput. Sci. 339 (2005) 68–87.

17. A. Frid A lower bound for the arithmetical complexity of Sturmian words// Siberian Electron. Math. Rep. 2, 14–22 (in Russian, English abstract).

18. Fraenkel A.S., M. Mushkin, U. Tassa. Determination of by $[n\theta]$ its sequence of differences// Canad. Math. Bull. (1978), 441-446.

19. Kamae, T., and Zamboni, L. Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words// Ergodic Theory and Dynamical Systems 22, 4 (2002), 1191–1199.

20. Karhumaki, J., Saarela, A., and Zamboni, L. Q. On a generalization of abelian equivalence and complexity of infinite words// J. Combin. Theory, Ser. A 120, 8 (2013), 2189–2206

21. Hedlund G.A. , M. Morse. Symbolic dynamics// Amer. J. Math, 1938, 815-866.

22. Hedlund G.A., M. Morse. Sturmian sequences// Amer. J. Math, 1940.

23. Hedlund G.A. Sturmian minimal sets// Amer. J. Math, 1944, 605-620.

24. Ito S., Yasutomi S. On continued fractions, substitutions and characteristic sequences // Japan. J. Math., 1990, 287-306.

25. Leibman A., Bergelson V. Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemeredi's theorems // Journal of the American Math Society, Vol. 9, 1996, 725-753.

26. Mignosi F. On the number of factors of Sturmian words// Theoret. Comput. Sci. 1991, 71-84.

27. Mignosi, F., and Restivo, A. A new complexity function for words based on periodicity // Int. J. Algebra Comput. 23, 4 (2013), 963–988.

28. Queffelec M. Substitution Dynamical Systems// Spectral Analysis Lecture Notes Math.,vol. 1294, Springer-Verlag, 1987.

29. Rauzy G. Suites a termes dans un alphabet fini, Semin // Theorie des Nombres, 1982-1983, 25-01,25-16, Bordeaux.

30. Rauzy G. Mots infinis en arithmetique, in :Automata on infinite words (D. Perrin ed.)// Lect. Notes Comp. Sci. 1985, 165-171.

31. Rauzy G. Sequences defined by iterated morphisms, in :Workshop on Sequences (R. Capocelli ed.)// Lecture Notes Comput. Sci., to appear.

32. Rigo M. and Salimov, P. Another generalization of abelian equivalence: Binomial complexity of infinite words// Theoret. Comput. Sci. 601 (2015), 47–57.

33. Seebold P. Fibonacci morphisms and Sturmian words// Theoret. Comput. Sci. 1991, 367-384.

34. Series C. The geometry of Marhoff numbers// The Mathematical Intelligencer (1985), 20-29.

35. Stolarsky K. Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators// Cand. Math. Bull. (1976), 473-482.

36. Szemeredi E. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression// Acta Arithm. 1975. V. 27. P. 199-245.

37. E. Szemeredi // Regular partitions of graphs Computer science department, School of Humanities and Sciences, Stanford University, 1975

38. Thue A. Uber die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen// Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl., Christiania, 1912.

39. Thue A. Uber unendliche Zeichenreihen // Norske Vid. Skrifter I Mat. Nat. Kl., Christiania 1906. V. 7 P. 1 22. V. 10. P. 1-67.

40. Venkov A. Elementary Number Theory// Wolter-Noordho, Groningen, 1970.

41. Van der Waerden B.L, Beweis einer Baudetschen Vermutung // Nieuw Arch. Wisk., 15 (1927), 212–216.

42. Шкредов И. Д. Теорема Семереди и задачи об арифметических прогрессиях // *УМН*, **61**:6(372) (2006), 111–178; *Russian Math. Surveys*, **61**:6 (2006), 1101–1166

REFERENCES

1. Banks, W. D., Conflitti, A. & Shparlinski, I. E. 2002, “Character sums over integers with restricted g-ary digits”, *Illinois J. Math.*, vol. 46, no. 3, pp. 819-836.

2. Avgustinovich S., Cassaigne J., Frid A. E. 2006, “Sequences of low arithmetical complexity” *Theoret. Inform. Appl.* vol.40, pp. 569–582.

3. Allouche J.-P. Baake M. Cassaigne J., Damanik D. E. 2003, “Palindrome complexity Selected papers in honor of Jean Berstel” *Theoret. Comput. Sci.* vol. 292, no. 1, pp. 9–31.

4. Avgustinovich S. V. , Fon-Der-Flaass D. G. , Frid A. E. E.2003 “Arithmetical complexity of infnite words” *Proc. Words, Languages and Combinatorics III*, Singapore: World Scientifc, pp. 51-62.

5. Berstel J., P. Seebold. E.2002 “Sturmian words, in: M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words”, *Cambridge University Press*, pp. 40-97.

6. Berstel J., M. Pocchiola. E.1993 “A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words”, *Int. J. Algebra and Comput.*, vol 3, pp. 349 -355.

7. Bell, J. P., Shallit, J. E. 2022 “Lie complexity of words”, *Theoret. Comput. Sci. in press.*

8. Brown C. E.1991 “A characterization of the quadratic irrationals”, *Canad. Math. Bull.*, vol.36.

9. Bresenham J. E. E.1965 “Algorithm for computer control of a digital plotter.”, *IBM Systems* pp. 25-30.

10. Cassaigne J., E.A. Frid. E. 2007 “On the arithmetical complexity of Sturmian words”, *Theoretical Computer Science*, vol. 380, pp.304-316.

11. Cassaigne J., Fici, G., Sciortino, M., Zamboni, L. E.2017 “Cyclic complexity of words”, *J. Combin. Theory Ser.* , vol. 145 , pp. 36–56.

12. Cassaigne J., Richomme, G., Saari, K., Zamboni, L. Avoiding. E.2011 “Abelian powers in binary words with bounded Abelian complexity”, *Internat J. Found. Comput. Sci.* vol.22, no. 4, pp. 905–920.

13. Cassaigne J., Kabor´e, I., Tapsoba, T. E.2010 “On a new notion of complexity on infinite words.”, *Acta Univ. Sapientiae Math.* vol. 2, no. 2 , pp. 127–136.

14. Ethan M. Coven, Hedlund G. E.1973 “ Sequences with minimal block growth”, *Mathematical systems theory* vol. 7, pp. 138–153.

15. Dulucq S., D. Gouyou-Beauchamp. E.1987 “ Sur les facteurs des suites de Sturm”, *Rapport No. I-8735, Comput. Sci.*.

16. A. Frid. E.2005 “Sequences of linear arithmetical complexity”, *Theoret. Comput. Sci.* vol. 339, pp. 68–87.

17. A. Frid “A lower bound for the arithmetical complexity of Sturmian words”, *Siberian Electron. Math. Rep. 2*, pp. 14–22.

18. Fraenkel A.S., M. Mushkin, U. Tassa. E. 1978 “Determination of by $[n\theta]$ its sequence of differences”, *Canad. Math. Bull.* , pp. 441-446.

19. Kamae, T., and Zamboni, L. E. 2002 "Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words", *Ergodic Theory and Dynamical Systems* vol.22, no.4, pp. 1191–1199.

20. Karhumaki, J., Saarela, A., and Zamboni, L. Q. E. 2013, "On a generalization of abelian equivalence and complexity of infinite words", *J. Combin. Theory, Ser. A 120,* no.8, pp. 2189–2206.

21. Hedlund G.A. , M. Morse. E.1978, "Symbolic dynamics", *Amer. J. Math,* pp. 815-866.

22. Hedlund G.A., M. Morse. E.1940 "Sturmian sequences", *Amer. J. Math.*

23. Hedlund G.A. E.1944 "Sturmian minimal sets", *Amer. J. Math*, pp. 605-620.

24. Ito S., Yasutomi S. E.1990, "On continued fractions, substitutions and characteristic sequences", *Japan. J. Math.*, pp. 287-306.

25. Leibman A., Bergelson V. " Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemeredi's theorems ", *Journal of the American Math Society*, Vol. 9, 1996, pp. 725-753.

26. Mignosi F. E.1991, "On the number of factors of Sturmian words", *Theoret. Comput. Sci.* pp. 71-84.

27. Mignosi, F., and Restivo, A. E.2013, "A new complexity function for words based on periodicity", *Int. J. Algebra Comput.* vol.23, no.4, pp. 963–988.

28. Queffelec M. E.1987, "Substitution Dynamical Systems", *Spectral Analysis Lecture Notes Math.*, vol. 1294, Springer-Verlag.

29. Rauzy G. E.1982-1983, "Suites a termes dans un alphabet fini, Semin", *Theorie des Nombres,* 25-01,25-16, Bordeaux.

30. Rauzy G. E.1985, "Mots infinis en arithmetique, in :Automata on infinite words (D. Perrin ed.)", *Lect. Notes Comp. Sci.* pp. 165-171.

31. Rauzy G. "Sequences defined by iterated morphisms, in :Workshop on Sequences (R. Capocelli ed.)", *Lecture Notes Comput. Sci., to appear.*

32. Rigo M. and Salimov, P. E. 2015, "Another generalization of abelian equivalence: Binomial complexity of infinite words", *Theoret. Comput. Sci.* no.601, pp. 47–57.

33. Seebold P. E.1991, "Fibonacci morphisms and Sturmian words", *Theoret. Comput. Sci.* , pp.367-384.

34. Series C. E.1985, "The geometry of Marhoff numbers", *The Mathematical Intelligencer* , pp. 20-29.

35. Stolarsky K. E.1976 "Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators", *Cand. Math. Bull.* , pp. 473-482.

36. Szemeredi E. E.1975 "On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression", *Acta Arithm.* . vol. 27, pp. 199-245.

37. E. Szemeredi "Regular partitions of graphs", Computer science department, School of Humanities and Sciences, Stanford University, 1975

38. Thue A. E.1912 "Uber die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen", *Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl., Christiania.*

39. Thue A. E.1906, “Uber unendliche Zeichenreihen ”, *Norske Vid. Skrifter I Mat. Nat. Kl., Christiania*. vol. 7 pp. 1-22., vol. 10., pp. 1-67.

40. Venkov A. E.1970, “Elementary Number Theory”, *Wolter-Noordho, Groningen.*

41. Van der Waerden B.L, “Beweis einer Baudetschen Vermutung”, *Nieuw Arch. Wisk.*, 15 (1927), pp. 212–216.

42. Shkredov I. D. 2006, “Semeredi’s theorem and problems of arithmetic progressions”, *Achievements of mathematical sciences*, **61**:6(372), 111–178; *Russian Math. Surveys*, **61**:6, pp. 1101–1166.

Получено: 18.09.2023
Принято в печать: 11.12.2023