ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-93-117

Геометрия блочных сред[1]

А. Я. Канель-Белов, В. О. Кирова

Канель-Белов Алексей Яковлевич — Магнитогорский государственный технический университет имени Г. И. Носова (г. Магнитогорск).
e-mail: Kanelster@gmail.com
Кирова Валерия Орлановна — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).
Kirova_vo@mail.ru

Аннотация

Для изучения блочного массива важно уметь определять относительное число блоков, удовлетворяющих данному свойству. Так, при разработке месторождения облицовочного камня возникает необходимость по данным о трещиноватости определить распределение блоков по объемам. Будем полагать (если не оговорено противное), что трещины моделируются неограниченными плоскостями и группируются в системы примерно параллельных трещин. Ниже рассматриваются модель равностоящих трещин и пуассоновская модель, в которой предполагается, что пересечения каждой системы трещин с прямой L общего положения образуют пуассоновское множество точек, и кроме того, объединения любого числа этих множеств точек пересечения также образуют пуассоновские множества точек. Для модели равностоящих трещин (мы будем в дальнейшем ее называть равностоящей моделью) доказана эргодическая теорема, связывающая средние по объему и по реализациям для чисел блоков, удовлетворяющим данному свойству. Разработана основанная на этой теореме программа для ЭВМ. Также рассмотрены задачи определения среднего объема блока, распределения блоков по объемам и выхода так называемых тарифных (т.е. имеющих определенные размеры и форму) блоков при разработке месторождения облицовочного камня камнерезными машинами.

Ключевые слова: Эргодический подход, эргодическая теорема

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
А. Я. Канель-Белов, В. О. Кирова. Геометрия блочных сред // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 93–117.

[1]Работа выполнена при поддержка гранта РНФ 22-19-20073 «Комплексное исследование возможности применения самозаклинивающихся структур для повышения жесткости материалов и конструкций»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-93-117

Geometry of block environs

A. Ya. Kanel-Belov, V. O. Kirova

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — Nosov Magnitogorsk State Technical University (Magnitogorsk).
e-mail: Kanelster@gmail.com
Kirova Valeria Orlanovna — National Research University “Higher School of Economics” (Moscow).
Kirova_vo@mail.ru

Abstract

To study a block array, it is important to be able to determine the relative number of blocks that satisfy a given property. Thus, when developing a deposit of facing stone, it becomes necessary to determine the distribution of blocks by volume based on data on fracturing. We will assume (unless otherwise stated) that the cracks are modeled by unbounded planes and are grouped into systems of approximately parallel cracks. Below we consider the model of equidistant cracks and the Poisson model, in which it is assumed that the intersections of each system of cracks with a generic line L form a Poisson set of points, and in addition, the unions of any number of these sets of intersection points also form Poisson sets of points. For the model of equally spaced cracks (we will henceforth call it the equally spaced model), an ergodic theorem is proven that relates the averages over volume and over realizations for the number of blocks satisfying this property. A computer program based on this theorem has been developed. The problems of determining the average volume of a block, the distribution of blocks by volume and the yield of so-called tariff (i.e., having a certain size and shape) blocks when developing a deposit of facing stone using stone-cutting machines are also considered.

Keywords: Ergodic approach, ergodic theorem

Bibliography: 17 titles.

For citation:
A. Ya. Kanel-Belov, V. O. Kirova, 2024. “Geometry of block environs”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 93–117.

1. Доказательство свойств эргодичности и вывод необходимых соотношений.

Эргодический подход основан на равенстве средних по объему и по реализациям, что позволяет вместо моделирования всего массива описать локальные его участки, вычислив локальную характеристику такого участка, усреднение которой по реализациям и даст искомую. эффективную характеристику массива. При усреднении по реализациям каждый локальный участок учитывается с весом, пропорциональным частоте его появления м массиве. Таким образом, определение локальной характеристики участка и частоты (плотности мат. ожидания) его появления являются основными задачами при данном подходе.

В этом параграфе будут получены эргодические теоремы для разбиения пространства n системами равностоящих плоскостей и других аналогичных задач. Также в этом и следующем параграфе мы будем рассматривать задачу определения относительного числа N_V, блоков, имеющих объем больше V для пространства, разбитого n системами плоскостей $A_1, \dots, A_n$, моделирующих трещины.

При этом для каждой i - системы A_i расстояния между соседними плоскостями постоянны и равны d_i.

Отметим, что задача отыскания распределения блоков по объемам равносильна задаче определения N_V, поскольку P_V- плотность вероятности того, что монолитный блок имеет объем V, равна:

$$P_V = \lim_{dV \to 0} \left(N_V - N_{V+dV}\right)/dV. \tag{1}$$

Если число систем $n < 3$, то плоскости не разбивают пространство на ограниченные части, а если $n = 3$, то они разбивают пространство на одинаковые параллелепипеды, так что этот случай тривиален. Поэтому мы будем рассматривать только случай, когда $n > 3$. (Изучая разбиение плоскости n системами параллельных равностоящих прямых мы будем предполагать, что $n > 2$ по тем же причинам).

Основные идеи. Рассмотрим три системы трещин A_1, A_2, A_3. Они разбивают пространство на параллелепипеды, которые называют *блоками первого порядка*. Каждый из них в свою очередь, разбит плоскостями остальных $n-3$ систем $A_4, \dots, A_n$ на монолитные блоки. Монолитным мы будем называть блок, не пересеченный ни одной трещиной.

Блок первого порядка B примем в качестве локального участка; его разбиение системами $A_4, \dots, A_n$ описывается $n-3$ параметрами $f_4, \dots, f_n$, характеризующим сдвиг систем $A_4, \dots, A_n$ относительно B; параметр f_i соответствует системе A_i.

В качестве f_i мы примем расстояние от фиксированной вершины B до подходящей плоскости системы A_i; при этом $0 \leqslant f_i \leqslant d_i$. Оказывается, что все f_i равновероятны и независимы, т.е. относительное число N блоков B таких, что $f_i < f_i' < f_i + df_i$ равно $\prod_{i=4}^{n} df_i/d_i$.

Ниже будет придан сказанному точный смысл. Число частей $\overline{N}_V$, объем которых превосходит V, в пересчете на единицу объема, находится по формуле:

$$N_V = \frac{1}{V_{1,2,3}} \frac{1}{d_4 \cdots d_n} \int_0^{d_4} \cdots \int_0^{d_n} \left(f_4, \dots, f_n\right) df_4 \dots df_n, \tag{2}$$

где $N_V\left(f_4 \dots, f_n\right)$ - число блоков, объем которых превосходит V, получившихся при разбиении, задаваемом набором параметров

$\{f_1, \dots, f_n\} \cdot V_{1,2,3}$ - объем B – блока первого порядка, порожденного системами $A_1,\ A_2,\ A_3$.

Относительное число N_V блоков, объем которых превосходит V отличается от N множителем N_0, где N_0 - среднее количество блоков в единице объема.

При практическом вычислении выбор тройки систем целесообразно проводить так, чтобы $V_{1,2,3}$ (и следовательно, среднее число частей разбиения B) был бы минимален.

Перейдем к формальной постановке задач. Среднее число N_V монолитных блоков, объем которых превосходит V в пересчете на единицу объема мы определим как среднее по решетке через предел:

$$N_V = \lim_{n \to \infty} M_{n,V}/n, \tag{3}$$

где $M_{n,V}$ - число монолитных блоков, объем которых больше V в кубе с ребрами длины n, параллельными осями координат. Из доказанного ниже будет следовать, что этот предел существует. Аналогично можно определить N_α - среднее число блоков в единице объема, удовлетворяющих свойству α, если соответствующий предел, аналогичный пределу (3), существует.

Уравнения плоскостей из A_i имеют вид:

$$X \cos\varphi_i \sin\psi_i + Y \cos\varphi_i \cos\psi_i + Z \sin\psi_i = \text{ const} \tag{4}$$

Причем $\cos\varphi_1 \sin\psi_1 > 0$ в силу выбора нормального вектора.

Предположим также, что все системы находятся в общем положении, так что величины $\{\cos\varphi_i, d_i, \cos\psi_i\}$ алгебраически независимы .

Поскольку породный массив часто имеет сложную структуру из-за сильно выраженной системы пастельных трещин, имеет смысл и плоский аналог задачи. В этой случае величины N_S, N_S определяются аналогично, только блок первого порядка B определяется парой систем прямых $A_1,\ A_2,\ S$ - его площадь; справедлива формула аналогичная (2):

$$\overline{N}_{\mathbf{s}} = \frac{1}{s_{1,2}} \quad \frac{1}{d_3 \ldots d_n} \int_0^{d_3} \ldots \int_0^{d_n} N_s\left(f_3, \ldots, f_n\right) df_3 \ldots df_n \tag{2'}$$

Уравнения линий трещин i-системы A_i имеют вид:

$$X \cdot \sin\varphi_i + Y \cdot \cos\varphi_i = 0.$$

При этом также предполагается, что трещины находятся в общем положении, т.е. величины $\{\cos\varphi_i, d_i\}$ алгебраически независимы. Задача нетривиальна при $n > 2$.

1.1. Случай трех систем прямых на плоскости.

Прежде чем доопределить необходимые пространственные понятия и заняться изучением общей задачи, рассмотрим первый нетривиальный случай разбиения плоскости тремя системами прямых $A_1,\ A_2,\ A_3$.

С помощью афинного преобразования можно добиться того, чтобы системы $A_1,\ A_2$, разбивали плоскость на единичные квадраты.

Выбрав подходящим образом направления координатных осей, можно считать, что уравнения прямых из A_3 имеют вид:

$$ax + by = \text{ const}, \tag{4}$$

где $a > 0, b > 0, a = \cos\varphi, b = \sin\varphi$.

Случаю общего положения исходных систем соответствует случай, когда для преобразованных систем A_i' величины a/d и b/d-. иррациональны, где d - расстояние между соседними прямыми в преобразованной системе A_3'.

Рассмотрим теперь разбиение плоскости 3-мя системами прямых A_1, A_2, A_3 .

Каждый блок первого порядка B определяется однозначно парой целых чисел (x, y) являющихся в образованной трещинами систем $A_1,\ A_2$ системе координат координатами его левого нижнего угла.

Разбиение блока B системой A_3 определяется расстоянием f от точки $O(x, y)$ до ближайшей прямой из A_3, лежащей выше O.

Очевидно, что $0 \leqslant f < d = d_3$. Покажем, что значения f равномерно распределены на отрезке $[0, d]$, т.е. относительное число блоков первого порядка, для которых $f_1 \leqslant f < f_2$, где $0 \leqslant f_f \leqslant f_2$, равно $(f_1 - f_2)/d$.

Тем самым среднее число $\overline{N}_S$ блоков площади $> S$ в пересчете на единицу площади будет равным:

$$\bar{N}_S = \frac{1}{d} \int_0^d N_S(f) df \tag{2''}$$

где $N_S(f)$ - определяется аналогично $N_s\left(f_3, \ldots, f_n\right)$.

Докажем равномерную распределенность f. Равномерное распределение для f следует из того, что равномерно распределены величины $\{\alpha \cdot n\}$, (где $n \in \mathbb{Z}, \{X\}$ – дробная часть X), т.е. предел отношения числа целых чисел n на отрезке $[-K, K]$ при $K \to \infty$ для которых $0 \leqslant h_1 \leqslant \{\alpha n\} \leqslant h_2 \leqslant 1$ к числу 2 $K + I$ - всех целых чисел на этом отрезке есть $h_2 - h_1$. В самом деле: при сдвиге B на вектор (α, β) значени f меняется следующим образом:

$$f' = d \cdot \{(f - \alpha a - \beta b)/d\} = d \cdot \{f/d - \alpha a/d - \beta b/d\}. \tag{5}$$

Поскольку $a/d \notin \mathbb{Q}$ из (5) следует равномерная распределенность f. В горизонтальном ряде квадратов единичной решетки, отличающихся сдвигом на векторы, параллельные оси OX значения f_i распределены равномерно; в разных же горизонтальных рядах f отличается сдвигом, поэтому равномерная распределенность f есть и для усреднения по плоскости.

1.2. Определение необходимых величин.

Для доказательства формул (2) и (2') в общем случае необходимо проверить независимость распределения параметров f_i и кроме того, их нужно более удобно определить, ведь что значит что прямая (или плоскость) лежит "выше"точки O ? В качестве f_i хочется взять расстояние от выбранного угла до подходящей прямой (плоскости) i-й системы. Но точка O находится между двумя прямыми (плоскостями). Какую из них выбрать?

Запишем уравнение прямых i-й системы в нормальном виде:

$$X \cdot a_i + Y \cdot b_i = c_i + k \cdot d_i, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

где $a_i^2 + b_i^2 = 1, a_i^2 > 0$. Аналогично, уравнения плоскостей $i-$ й системы в пространственном случае имеют вид:

$$a_i \cdot X + b_i \cdot y + c_i \cdot z = e_i + k \cdot d_i, \tag{4}$$

Причем $a_i > 0, a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$.

Рассмотрим пространственный случай.

Точка $O\,(x_0, y_0, z_0)$ заключена между плоскостями α_1 и α_2 :

$$\begin{aligned} &\alpha_1 : a_i \cdot X + b_i \cdot Y + c_i \cdot Z = e_i + k \cdot d_i \\ &\alpha_2 : a_i \cdot X + b_i \cdot Y + c_i \cdot Z = e_i + (k+1) \cdot d_i, \end{aligned} \tag{5}$$

что алгебраически означает:

$$\begin{gathered} a_i \cdot X_0 + b_i \cdot Y_0 + c_i \cdot Z_0 - k \cdot d_i > 0 > \\ a_i \cdot X_0 + b_i \cdot Y_0 + c_i \cdot Z_{0}\text{-}\,(k+1) \cdot d_i \cdot \end{gathered}$$

Положим $f_i\,[X_0, Y_0, Z_0]$ равным расстоянию от т. $O\,(X_0, Y_0, Z_0)$ до α_2. Как легко убедиться

$$f_i\,[X_0, Y_0, Z_0] = d_i \cdot \{(-a_i \cdot X_0 - b_i \cdot Y_0 - c_i \cdot Z_0 + e_i)\,/d_i\}\,. \tag{6}$$

При параллельном переносе точки $O\,(X_0, Y_0, Z_0)$, на вектор $(X_1, Y_1, Z_1\ \ )$ f_i преобразуются следующим образом:

$$f_i' = d_i\,\{(f_i - a_i \cdot X_1 - b_i \cdot Y_1 - c_i \cdot Z_1)\,/d_i\} \tag{5'}$$

Для плоского случая имеют место аналогичные формулы:

$$f_i\,[X_0, Y_0] = d_i\,\{(-a_i \cdot X_0 - b_i \cdot Y_0 + e_i)\,/a_i\}\,. \tag{6'}$$

$$f_i' = d_i \left\{ \left(f_i - a_i \cdot X_1 - b_i \cdot Y_1 \right) / d_i \right\} \tag{5''}$$

Сформулируем теперь эргодическую теорему:

Пусть B - блок первого порядка, образованный системами $A_1,\ A_2,\ A_3$, т. O его вершина. Набор $f_i, i = 4, \ldots, n$, определяет разбиение B системами $A_1, \ldots, A_n$ и тем самым определена величина $N_V\left(f_4, \ldots, f_n\right)$ число частей разбиения B, объем которых превосходит V. Величина N_V уже определена выше с помощью формулы (3).

Теорема 1.

$$\overline{N}_V = \frac{1}{V_{1,2,3}} \frac{1}{d_4 \cdots d_n} \int_0^{d_4} \int_0^{d_n} N_V\left(f_4, \ldots, f_n\right) df_4 \ldots df_n$$

аналогично, для плоского случая

$$\overline{N}_S = \frac{1}{S_{1,2}} \quad \frac{1}{d_3 \cdots d_n} \int_0^{d_3} \cdots \int_0^{d_n} N_S\left(f_3, \ldots, f_n\right) df_3 \ldots df_n$$

Поставим задачу о математическом ожидании числа добытых тарифных блоков. Пусть Ω - разрабатываемая область массива, настолько большая, что можно пренебрегать граничными блоками и полагать, что она содержит целое число блоков первого порядка. Через $|\Omega|$ мы будем обозначать объем Ω, а через $\overline{M}_V^\Omega$ - математическое ожидание числа блоков объема выше V, находящихся в области Ω, точное определение этой величины будет дано ниже.

Теорема 2.

$$\overline{M}_V^\Omega = |\Omega| \cdot \overline{N}_v. \tag{7}$$

Аналогично, в плоском случае

$$\overline{M}_S^\Omega = |\Omega| \cdot \overline{N}_S,$$

где $|\Omega|$ -площадь области Ω).

В общем случае пусть l – аддитивный функционал, заданный на множестве наборов блоков, т.е. его значение на наборе есть сумма его значений по всем блокам, составляющим набор. Примерами такого функционала являются число блоков в наборе объема больше V или суммарная "стоимость"блоков.

Пусть $\tilde{M}_l^\Omega$ - математическое ожидание, т.е. среднее значение l на наборе монолитных блоков составляющих Ω. Дадим формальное определение величинам $\tilde{M}_l^\Omega$ и $\overline{M}_v^\Omega$, введем нужные понятия.

Рассмотрим систему координат $O\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$, связанную с блоком первого порядка B. В этой системе координат $A_1,\ A_2,\ A_3$ образуют целочисленную решетку единичных кубов, каждый куб единичной решетки $B(a,b,c)$ определяется вектором сдвига (a,b,c) относительно начального куба

$$B = B(0,0,0) = \{x, y, z \mid 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}.$$

Тем самым определяются функции $f_i(x,y,z)$ – параметры разбиения $B(x,y,z)$ системами $A_4, \ldots, A_n$, вычисленные в старой системе координат. При этом

$$f_i(x,y,z) = d_i \cdot \left\{ \left(f_i - a_i \cdot x - b_i \cdot y - c_i \cdot z \right) / d_i \right\} \tag{6}$$

область Ω задается набором $\left\{B\left(a + x_i, b + y_i, c + z_i\right)\right\}$ составляющих ее блоков первого порядка; причем расположение Ω относительно решетки задается вектором $(\ a, b, c)$, а набор векторов (x_i, y_i, z_i) определяет "форму"Ω. Объем $|\Omega|$ области Ω равен $k \cdot V_{1,2,3}$

Математическое ожидание $\tilde{M}_l^\Omega$ или среднее значение l на частях разбиения области Ω определяется как среднее по решетке:

$$\tilde{M}_l^\Omega = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8n^3} \left[\sum_{|a|,|b|,|c|\le n} \sum_{i=1}^{k} l\left[a+x_i, b+y_i, c+z_i\right] \right], \tag{8}$$

Здесь $l[\alpha,\beta,\gamma]$ - значение l на наборе, образованном разбиением $B(\alpha,\beta,\gamma)$ системами $A_4,\ldots,A_n$.

Равенство (7) можно упростить, переставив порядок суммирования:

$$\tilde{M}_l^\Omega = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8n^3} \left[\sum_{i=1}^{k} \sum_{|a|,|b|,|c|\le n} l\left[a+x_i, b+y_i, c+z_i\right] \right) =$$
$$= k\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{l}{8n^3} \left[\sum_{|a|,|b|,|c|\le n} l[a,b,c] \right).$$

Окончательно имеем:

$$\tilde{M}_I^\Omega = k\cdot \bar{l}, \tag{8}$$

где $\bar{l}$ - среднее значение $l[x,y,z]$ по решетке. Взяв в качестве l число блоков объема больше V, мы определим M_V.

Через $L(f_4,\ldots,f_n)$ мы обозначим значение l на наборе, образованном разбиением B, системами $A_4,\ldots,A_n$, определенном параметрами $f_4,\ldots,f_n$.

Мы всюду предполагаем, что функция $L(f_4,\ldots,f_n)$ интегрируема по Риману.

Теорема 3.

$$\tilde{M}_l^\Omega = \frac{|\Omega|}{V_{1,2,3}} \cdot \frac{1}{d_4\cdots d_n} \int_0^{d_4} \cdots \int_0^{d_n} L(f_4,\ldots,f_n)\, df_4 \ldots df_n. \tag{7'}$$

Аналогично, в плоском случае

$$\tilde{M}_l^\Omega = \frac{|\Omega|}{S_{1,2}} \cdot \frac{1}{d_3\cdots d_n} \int_0^{d_3} \cdots \int_0^{d_n} L(f_3,\ldots,f_n)\, df_3 \ldots df_n, \tag{7''}$$

где все соответствующие величины для плоского случая определяются аналогично.

Мы будем изучать сечения массива прямыми, при этом каждая система A_i будет системой точек A_i' с расстоянием между соседними точками в $(i-1)$-ой системе d_i'; условие общего положения означает линейную независимость над $\mathbb{Q}$ чисел $d_1',\ldots,d_n'$.

В этом случае система A_1 разбивает прямую на отрезки, которые можно называть блоками первого порядка, точно также можно определить необходимые величины. В линейном случае справедлива формула:

$$\tilde{M}_l^\Omega = \frac{|\Omega|}{d_1} \cdot \frac{1}{d_2\cdots d_n} \int_0^{d_2} \cdots \int_0^{d_n} L(f_2,\ldots,f_n)\, df_2 \ldots df_n. \tag{7'''}$$

Приведенные теоремы позволяют сводить задачу отыскания распределения блоков по объемам или, что более обще, находить относительное число блоков, удовлетворяющих данному свойству к изучению разбиения одного блока первого порядка, что позволяет избежать моделирования всего массива. Смысл теоремы состоит, во-первых, в том, что средняя величина l на Ω пропорциональна объему $|\Omega|$, и, во-вторых, что все сдвиги систем A_i относительно B в случае общего положения равномерно распределены и независимы. Сформулируем последнее утверждение в несколько ином виде, в ряде случаев более удобном для использования.

Определим относительное число блоков решетки M_α, удовлетворяющих свойству α через предел:

$$M_\alpha = \lim_{n\to\infty} M_{n,\alpha}, \tag{3'}$$

где $M_{n,\alpha}$ - относительное число блоков решетки удовлетворяющих свойству α, находящихся в шаре радиуса n.

Теорема 4. *Относительное число блоков первого порядка, таких, что* $0 \leqslant f_i^O \leqslant f_i \leqslant \leqslant f_i^O + \Delta f_i \leqslant d_i$ *равно* $\prod_{i=4}^n \Delta f_i/d_i$.

Аналогичные теоремы имеют место и в n-мерном случае.

Из теоремы 4 непосредственно следует теорема 3 ; из ее плоского и одномерного аналога - соответствующие аналоги теоремы 3 .

Доказательство теоремы 4. Мы рассмотрим только пространственный случай. Для плоского, линейного, или n-мерного случая доказательство аналогично.

Прежде всего: с помощью аффинного преобразования можно добиться того, чтобы B являлся единичным кубом. Из условия общего положения будет следовать, что величины $\{d_i', \cos\varphi_i', \cos\psi_i'\}$ будут алгебраически независимы. Начиная с этого момента только этот случай мы и будем рассматривать. Удобно также вместо f_i иметь дело с $\lambda_i = f_i/d_i$. Достаточно показать, что относительное число кубов единичной решетки для которых $0 \leqslant \lambda_i^O \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_i + \Delta\lambda_i \leqslant 1$ равно $\prod_{i=4}^n \Delta\lambda_i$. Из равенства (5) следует, что при сдвиге на вектор (x, y, z) величины λ_i преобразуются по формуле:

$$\lambda_i' = \left\{\lambda_i - x\cdot\bar{a}_i - y\cdot\bar{b}_i - z\cdot\bar{c}_i\right\}, \tag{9}$$

где $\bar{a}_i = a_i'/d_i', \bar{b}_i = b_i'/d_i', \bar{c}_i = c_i'/d_i'$.

Из условия общего положения следует линейная независимость над $\mathbb{Q}$ набора $\{a_i, b_i, c_i\}$ $i = = 4, \ldots, n$. (т.е. нет линейных соотношений с рациональными коэффициентами).

Утверждение теоремы 4 следует теперь из теоремы о равномерной распределенности и независимости величин $\{n\alpha_i\}$, где $n \in \mathbb{N}, \alpha_i$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

1.3. Соображения эргодичности в общем случае.

Доказанные выше теоремы о равномерной распределенности и независимости сдвигов дают основания к тому, чтобы попытаться применить эргодический подход в общем случае.

Пусть теперь трещины одной системы не равноотстоят друг относительно друга и направления трещин в системе меняются, однако в масштабах порядка размера блока трещины можно предполагать плоскостями .

В этом случае, кроме набора параметров $\{\lambda_i\}$, характеризующих сдвиги, следует также рассмотреть набор $\{\alpha_i\}$ - характеризующий локальные межтрещинные расстояния и набор $\{\beta_i\}$, характеризующий направления трещин. Меру dP в пространстве параметров $\{\lambda_i, \alpha_i, \beta_i\}^*$, по которой следует производить интегрирование, следует искать в виде:

$$dP = d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \cdot \mu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) d\alpha_1 \ldots d\alpha_p d\beta_1 \ldots d\beta_q. \tag{10}$$

Величина же $\overline{N}_V$ будет равна:

$$\overline{N}_V = \int N_V(\vec{\lambda}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) dP/V_c \tag{11}$$

где V_c - средний объем блока I-го порядка.

В. В. Павловой разработана на основе этой методики программа.

2. Распределение блоков по объемам.

Эргодическая теорема, доказанная в предыдущем параграфе, позволяет упростить нахождение распределения блоков по объемам. Для случая трех систем прямых на плоскости получены явные формулы для распределения блоков по площадям. Для случая четырех систем в пространстве также можно получить явные формулы, однако последние будут включать несколько десятков случаев и содержать достаточно громоздкие формулы для общего решения кубического уравнения, так что пользы от них нет, поэтому для вычисления числа N_V - блоков объема выше V нужно определить N_V для каждого разбиения блока первого порядка, а затем численно проинтегрировать по формуле (I6).

Решим задачу для случая четырех систем плоскостей (для общего случая будет приведена теорема, позволяющая эффективно вычислять объемы блоков).

2.1. Случай четырех систем плоскостей.

Как уже упоминалось выше, это первый нетривиальный случай.

Для этого случая разработана программы, основанная на явном вычислении объемов. Эта программа строит гистограмму распределения блоков по объемам примерно за 2 секунды на ЭВМ типа NORD. Опишем соответствующие формулы.

Плотность вероятности $P(V)$ того, что блок имеет объем V вычисляется следующим образом:

$$P(V) = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\bar{N}_V - \bar{N}_{V+\Delta V} \right) / \Delta V. \tag{1}$$

Достаточно уметь определять $\overline{N}_V$ или пропорциональную величину блоков объема выше V в одном блоке первого порядка. С помощью подходящего аффинного преобразования задачу можно свести к случаю, когда системы A_1, A_2, A_3 разбивают пространство на решетку единичных кубов, а нормальные уравнения плоскостей системы A_4 имеют вид:

$$a_1 \cdot X + a_2 \cdot Y + a_3 \cdot Z = \text{ const } , \tag{12}$$

где $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1; a_1, a_2, a_3 \geqslant 0.$

В случае общего положения $a_1, a_2, a_3 > 0$ и кроме того a_1, a_2, a_3 линейно независимы над $\mathbb{Q}$. На самом деле достаточно только иррациональности одного из чисел a_1, a_2, a_3; этот случай можно из случая общего положения получить предельным переходом.

Пусть f - расстояние от т. O - начала координат до ближайшей плоскости из A_4, лежащей "выше"O , т.е. уравнение которой имеет вид $a_j x + a_j y + a_j z = C > O$.

Напомним, что в рассматриваемой системе координат B задается следующим образом:

$$B = \{x, y, z \mid 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}$$

где

Пусть $\mathrm{Vol}(d)$ - объем пересечения B с полупространством Π_d,

$$\Pi_d : a_j x + a_i y + a_j z \leqslant d.$$

Система A_4 разбивает B на следующие части:

$$\{0 < x, y, z < 1 \mid f + i \cdot d < a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z \leqslant f + (i+1) \cdot d\},$$

где d - расстояние между соседними плоскостями системы A_4. Объем V_i i-й части равен:

$$V_i = \mathrm{Vol}(f + i \cdot d) - \mathrm{Vol}(f + (i-1) \cdot d). \tag{13}$$

Таким образом, для вычисления V_i достаточно уметь определять $\mathrm{Vol}(x)$. Как обычно, через X^+мы обозначим $\max(x, 0)$. Пусть $\mathrm{TR}(x) = I$ при $x > 0$, иначе $\mathrm{TR}(x) = 0$.

Теорема 5.

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vol}(x) = \Big[x^3 - \big[(x-a_1)^+\big]^3 - \big[(x-a_2)^+\big]^3 - \big[(x-a_3)^+\big]^3 + \\ &\big[(x-a_1-a_2)^+\big]^3 + \big[(x-a_2-a_3)^+\big]^3 + \big[(x-a_1-a_3)^+\big]^3 \\ &\big[(x-a_1-a_2-a_3)^+\big]^3\Big] / [6 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3]\end{aligned} \tag{14}$$

Предложение 1.

$$\tilde{N}_V(f) = \sum_{k=0}^{(a_1+a_2+a_3)/d} \mathrm{Tr}[\mathrm{Vol}(f+(k+1)d) - \mathrm{Vol}(f+kd) - V] + \mathrm{Tr}[\mathrm{Vol}(d) - V] \cdot D \tag{14}$$

Предложение 2.

$$\tilde{N}_V = 1/d \cdot \int^d \tilde{N}_V(f) df$$

Интегрирование в программе осуществляется как усреднение шагом $d \cdot 0,01$.

2.2. Доказательство теоремы.

Пересечение полупространства Π_x с положительным октантом $x, y, z \geqslant 0$ есть тетраэдр объема $\left(X^+\right)^3 / [6 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3]$; а пересечение Π_x с результатом параллельного переноса положительного октанта на вектор (α, β, γ) имеет объем:

$$\big((x - \alpha a_1 - \beta a_2 - \gamma a_3)^+\big]^3 / [6 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3)\,.$$

Фактически выписанные в (14) члены отвечают объемам пересечения Π_x со сдвигами положительного октанта на векторы $(I, O, 0), (O, I, 0), (0, O, I)$, (I, I, O), (O, I, I), (I, O, I), (I, I, I), т.е: в вершины B.

По сути дела соотношение (14) – это формула Эйлера для включений-исключений: записывая объем $\left(X^+\right)^3 / (6 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3)$ пересечения Π_x с положительным октантом $\mathcal{O}$ мы некоторые области подсчитали зря; а именно - пересечение Π_x со сдвигами $\mathcal{O}$ на векторы $(I, O, O); (O, I, 0); (O, O, I)$; вычтем соответствующие объемы. Но тогда мы дважды, вычли объем пересечения Π_x со сдвигами $\mathcal{O}$ на векторы ($I, I, 0)$; ($O, I, I); (I, O, I)$ и трижды - со сдвигом $\mathcal{O}$ вектор (I, I, I). прибавим соответствующие объемы. Но тогда окажется, что мы лишний раз прибавили пересечения Π_x со сдвигом $\mathcal{O}$ на вектор (I, I, I), что компенсируется последним членом формулы.

В $\mathbb{R}^n$ имеет место аналогичная формула для объема пересечения $\Pi_x : sa_i \cdot X_i < d$, где $a_i > 0$ с единичным кубом $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, если $\sum a_i^2 = 1$. В этом случае:

$$\mathrm{Vol}(d) = \frac{1}{n! \prod_{i=1}^n a_i} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{\# I} (d - \sum_{i \in I} a_i)^{+n}, \tag{14'}$$

где $\# I$ - число элементов множества I. Доказательство равенства (14') аналогично. Например, если $n = 2$, то

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(d) = \Big[d^2 - \big((d-a_1)^+\big]^2 - \big[(d-a_2)^+\big]^2 + \\ + \big[(d-a_1-a_2)^+\big]^2\Big] / (2a_1 \cdot a_2]\,.\end{aligned} \tag{14''}$$

И в тривиальном случае $n = 1$ равенство (14) превращается в равенство:

$$\mathrm{Vol}(d) = \left[d^+ - (d-a)^+\right]/a = d^+ - (d-1)^+$$

Т.к. тогда $a = a_i = 1$ в силу нормировки.

3. О нахождении распределения блоков по объемам в общем случае

При нахождении распределения блоков по объемам возникают задачи эффективного многократного вычисления объемов многогранников, грани которых параллельны данному конечному набору плоскостей. Сам объем вычисляется много раз при различных сдвигах, и для эффективного вычисления выгодно вычислить сначала все нужные величины, связанные с направлениями граней.

Достаточно, оказывается, уметь определять коэффициенты в формулах для объема тетраэдра в зависимости от свободных членов уравнений плоскостей его граней. Оказывается, что при массовом вычислении объема каждый раз тратится только несколько умножений. Мы покажем, что если у многогранника M грани находятся в общем положении, то задача вычисления объема М сводится, как и в случае четырех систем плоскостей, с помощью соображений включения-исключения к задаче вычисления объемов тетраэдров, грани которых лежат на $\mathcal{R}$ - семействе плоскостей, являющихся продолжением граней M.

Грани M находятся в общем положении, если никакие две не параллельны, никакие 3 не параллельны одной прямой. Соображения включения-исключения удобно формулировать на языке линейных комбинаций характеристических функций : через χ_M обозначим характеристическую функция множества M (т.е. $\chi_M(x) = 1$, если $x \in M$, иначе $\chi_M(x) = 0$). Равенство функций мы понимаем в смысле почти всюду, пренебрегая тем, что точки граней могут считаться несколько раз. Через $V(M)$ мы обозначаем множества M.

Теорема 6. *Если все грани м находятся в общем положении, то найдутся тетраэдры T_i, грани которых лежат на $\mathcal{R}$ и целые числа λ_i такие, что:*

$$\chi_M = \sum \lambda_i \chi_{T_i}$$

В этом случае $V(M) = \sum \lambda_i\ V\left(\ T_i\right)$.

Если грани и не находятся в общем положении, то найдутся многогранники N_i, грани которых лежат на R такие, что: параллелепипедом, либо трехгранной призмой, либо пирамидой, у которой основание параллелограмм.

Доказательство теоремы. Поскольку R разбивает M на выпуклые части, можно считать, что M - выпуклый многогранник. В случае общего положения у M найдутся четыре грани, продолжение которых образует тетраэдр T, содержащий M. T получается из M дополнением многогранниками M_i, чьи грани лежат на R, а число граней каждого M_i, очевидно, меньше числа граней M. Индукция по числу граней. Общий случай вытекает из того факта, что выпуклый многогранник, не имеющий звездчатых форм - это в точности описанный выше, так что у M найдутся несколько граней, продолжение которых будет таким многогранником.

Отметим, что даже для случая не общего положения можно ограничиться вычислением объемов тетраэдров с помощью метода малых шевелений.

Программа основанная на явном вычислении объемов, работает I сек. на малой ЭВМ и строит гистограмму.

4. Применение полученных результатов к определению выхода блоков. Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей.

4.1. Описание гистограммы.

Гистограмма распределения блоков по объемам, полученная в результате работы программы для разбиения пространства четырьмя системами плоскостей. Здесь $A_1,\ A_2,\ A_3-$ разбивают пространство на единичные кубы, система A_4 нормальна к диагонали куба и расстояния между соседними плоскостями A_4 равны 0,557 , что близко к одной трети длины диагонали куба.

Аналогичные гистограммы получены и в ряде других случаев. все они имеют две характерные особенности. Во-первых, это пик при $V \to 0$. Во-вторых, это максимум при относительно больших V и минимум при средних. Эти качественные особенности подтверждаются в работах маркшейдеров.

Эти графики имеют те же самые особенности. Различие состоит в поведении в окрестности нуля, но это связано с тем, что мелкие блоки, как неинтересные, маркшейдерами не учитывались.

4.2. Обсуждение результатов

Дадим теперь объяснение зависимости на интуитивном уровне. Рассмотрим для простоты случай четырех систем. Пусть $V_i(f)$ - объем $i-$ й части разбиения B, задаваемым сдвигом системы A_4. Если f изменится на df, то $V_i(f)$ изменится на $dV_i(f) = V_i'(f)df$.

Но так как все сдвиги f равновероятны, плотность вероятности того, что объем $i-$ й части равен V, пропорциональна $df/dV_\mathbf{i} = V_\mathbf{i}'(f)$. Таким образом, плотность вероятности того, что часть имеет объем V тем больше, чем меньше меняется объем V в зависимости от f.

Перейдем к объяснению гистограмм. Когда f мало, объем первой части, ближайшей к углу пропорционален f^3, а его производная - f^2. Таким образом, плотность вероятности $P(V)$ при $V \to 0$ имеет ассимптотику $V^{-2/3}$ Этим объясняется поведение $P(V)$ при малых V.

Перейдем теперь к объяснению "Горбика". Будем двигать полосу вдоль B, т.е. будем рассматривать пересечение B с полосой

$$\alpha \leqslant A_1 \cdot X + A_2 \cdot Y + A_3 \cdot Z < \alpha + d,$$

изменяя параметр α.

Вначале объем пересечения растет, затем падает, а когда становится максимальным, то меняется мало. Отсюда - второй максимум.

Тот же эффект присутствует и при распределении расстояний между соседними точками пересечения скважин с трещинами массива.

Вероятно, описанный выше механизм появления вторых максимумов работает и в ряде других ситуаций.

5. Оценка числа блоков в массиве и определение среднего объема блока.

В этом параграфе мы рассмотрим задачу определения среднего объема блока для модели, в которой трещины являются неограниченными плоскостями, а также рассмотрим плоскую задачу для модели, в которой каждая трещина растет до пересечения с соседней.

5.1. Модель, в которой трещины считаются неограниченными

плоскостями.Выше для этой модели была рассмотрена задача отыскания распределения блоков по объемам в предположении, что соседние трещины "в системах находятся на одинаковом расстоянии друг относительно друга. Однако, если искать только средний объем блока V_c (или обратную величину $\tau = V_{cp}^{-1}$, равную среднему числу блоков, приходящихся на единицу объема, то предположение о распределении расстояний между трещинами в системах не требуется. Важно только, чтобы для каждой системы существовало бы среднее расстояние d_i между соседними трещинами и для отыскания τ достаточно знать эти величины.

Мы приведем явные формулы для V_c , случай n систем будет сведен к случаю трех систем.

Введем необходимые определения. Назовем блок j-й и k-й систем. i, j, k - элементарные блоки являются блоками первого порядка и, вообще говоря, не являются монолитными, поскольку i, j, k - элементарный блок может быть разбит плоскостями остальных систем. Пусть $V_{i,j,k}$ - средний объем i, j, k - элементарного блока, а $\tau_{i,j,k} = V_{i,j,k}^{-1}$ - среднее число i, j, k элементарных блоков, приходящееся на единицу объема. Задача определения $\tau_{i,j,k}$ - это и есть случай трех систем, к которому сводится общий случай.

Легко убедиться, что

$$V_{i,j,k} = d_i d_j d_k \left|\vec{n}_i \Lambda \vec{n}_j \Lambda \vec{n}_k\right|^{-1}, \tag{17}$$

$$\tau_{i,j,k} = d_i^{-1} d_j^{-1} d_k^{-1} \left|\vec{n}_i \Lambda \vec{n}_j \Lambda \vec{n}_k\right|, \tag{17'}$$

где, как обычно, $\vec{n}_i$ - единичные векторы нормали к i-й системы, $|\vec{n}_i \wedge \vec{n}_j \wedge \vec{n}_k|$ - модуль смешанного произведения $\vec{n}_i, \vec{n}_j, \vec{n}_k$, т.е. объем параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Пусть направления всех $\vec{n}_i$ находятся в общем положении, т.е. $|\vec{n}_i \wedge \vec{n}_j \wedge \vec{n}_k| \neq 0$, если $i \neq j \neq k$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 7.

$$\tau = \sum_{i \neq j \neq k} \tau_{i,j,k} \tag{18}$$

Следствие 1.

$$V_c = \left[\sum_{i \neq j \neq k} V_{i,j,k}^{-1}\right]^{-1} \tag{18'}$$

$$\tau = \sum d_i^{-1} d_j^{-1} d_k^{-1} \left|\vec{n}_i \Lambda \vec{n}_j \Lambda \vec{n}_k\right|, \tag{18''}$$

$$V_c = \left[\sum d_i^{-1} d_j^{-1} d_k^{-1} \left|\vec{n}_i \Lambda \vec{n}_j \Lambda \vec{n}_k\right|\right]^{-1} \tag{18'''}$$

Заметим, что формула (I8”) справедлива и в том случае, когда некоторые плоскости могут находиться не в общем положении и какие-то три могут быть параллельны одной прямой. В этом случае $\tau_{i,j,k}$ следует положить равным нулю, а $V_{i,j,k}$−бесконечности.

Соотношение (I8”) получается для этого случая предельным переходом. Важно только, чтобы нашлись такие i, j, k, что $|\vec{n}_i \wedge \vec{n}_j \wedge \vec{n}_k|$ было бы отлично от нуля, т.е. A_i, A_j, A_k не были бы параллельны одной прямой, иначе системы $A_1, \ldots, A_n$ не разбивают пространство на ограниченные части. Заметим, что если существуют средние расстояния d_i, d_j, d_k, то определен и средний объем $V_{i,j,k}$.

Доказательство теоремы

Докажем (I8), установив взаимно-однозначное соответствие между монолитными блоками и блоками первого порядка.

Выберем направление, не перпендикулярное ни к одной из линий пересечения плоскостей системы A_i и $A_j; V_i, V_j$. Назовем это направление направлением "вверх". у каждого монолитного блока определен тогда "верхний "угол и этот угол образуют три системы с номерами, скажем i, j, k. (Поскольку системы A_i находятся B общем положении, мы предполагаем, что никакие 4 плоскости не пересекаются в одной точке).

Таким образом, каждому монолитному блоку соответствует i, j, k - элементарный блок с тем же "верхним"углом. Верно и обратное: у каждого i, j, k - элементарного блока есть "верхний"угол, а, следовательно, и монолитный блок к нему прилегающий. Теорема доказана.
.

5.2. Модель, в которой трещины являются неограниченными плоскостями, но не группируются в системы.

В этом случае пусть $R(\vec{n})$ характеризует распределение трещин по направлениям (см.гл.2). В случае N систем с нормалями $\vec{n}_i$ функция $R(\vec{n})$ имеет вид

$$R(n) = \sum_{i=1}^{N} \delta\left(\vec{n}, \vec{n}_i\right) d_i^{-1} + \sum_{i=1}^{N} \delta\left(\vec{n}_1, \vec{n}_i\right) d_i^{-1} \tag{19}$$

Рассматривая, распределение для $N \to \infty$ систем, трещин, аппроксимирующее непрерывное, и переходя к пределу, будем иметь:

$$\tau = \int_{S^2 \times S^2 \times S^2} R\left(\vec{n}_1\right) R\left(\vec{n}_2\right) R\left(\vec{n}_3\right) \left|\vec{n}_1 \Lambda \vec{n}_2 \Lambda \vec{n}_3\right| d^2\vec{n}_1 d^2\vec{n}_2 d^2\vec{n}_3 \tag{20}$$

Для N - мерного пространства точно также можно определить $i_1, \ldots i_n$ - элементарные блоки и соответствующие величины.

Точно также $\tau = \sum_{I \subset \{1,\ldots,k\}, |I|=N} \tau_I$.

И аналогично

$$\begin{gathered} \tau_I = \prod_{I \in I} d_i^{-1} \left|\widehat{i}_{i \in I} \vec{n}_i\right|; \\ \tau = \sum_{\#I=n} \prod_{i \in I} d_i^{-1} \left|\bigwedge_{i \in I} \vec{n}_i\right|; \tau = V_c^{-1}. \end{gathered} \tag{21}$$

В случае непрерывно распределенных направлений:

$$V_c = \int_{S^{n-1} \times \ldots \times S^{n-1} (n\text{раз })} \ldots \int \prod_i R\left(\vec{n}_i\right) \left|\bigwedge_{i \in I} \vec{n}_i\right| d^{n-1}\vec{n}_i \ldots d^{n-1}\vec{n}_N. \tag{22}$$

Наш вывод, использующий идею аппроксимации является значительно более простым и прозрачным, по сравнению с имеющимися.

5.3. Модель, в которой каждая трещина растет только до слияния с соседней.

В реальном массиве очень часто трещина растет только до слияния с соседней. Получается картина подобная той, что показана

Задачи, вытекающие из рассмотрения моделей, в которых каждая трещина растет только до слияния с соседней, очень сложны, мы рассмотрим только плоскую задачу и покажем, как искать в этом случае среднюю площадь.

Предположим, что трещины находятся в общем положении, так что в каждой вершине сходятся только две трещины. Трещина считается тонкой, так что вероятность того, что три или более растущих трещины "столкнуться"в одной точке мы считаем пренебрежимо малой. (Точно так же для пространственного случая пренебрежимо мала вероятность того, что 4 или больше трещин пройдут через одну точку).

Перейдем теперь к рассмотрению плоской задачи.

Теорема 8. *Произведение среднего числа трещин на единицу площади на среднюю площадь S_c области равно единице.*

Доказательство. Пусть $n = S_c^{-1}$ – среднее число монолитных областей в пересчете на единицу площади, K - соответственно число вершин, l - трещин. Точки встречи трещины с другими трещинами разбивают трещины на сегменты, m - число таких сегментов в единице площади. Поскольку у трещины две вершины, $K = 21$.

Поскольку к каждой вершине примыкают 3 сегмента, а каждый сегмент ограничен двумя вершинами, $3K = 2\ m$, откуда $m = 31$.

Из формулы Эйлера для плоского графа (число всех вершин -число ребер + число граней = 2, двойной пренебрегаем) вытекает, что $K - m + n = 0$. Откуда $n = 1$. Теорема доказана.

Из доказательства следует, что теорема верна и для криволинейных трещин.

Теорема позволяет также находить среднюю площадь монолитного участка поверхности образца после того, как трещины разовьются, зная среднее число трещин на единице площади.

6. Задачи об определении выхода блоков при разработке месторождения облицовочного камня камнерезными машинами.

В этом параграфе мы рассмотрим задачи о числе прямоугольных монолитных блоков, которые можно "вырезать"из массива. Будут рассмотрены две различные постановки задачи, отвечающие двум разным технологическим процессам.

При разработке месторождения стенового или облицовочного камня камнерезными машинами из массива выпиливаются блоки, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$. Длины ребер $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ мы будем называть $\therefore$ тарифными размерами. Те выпиливаемце блоки, которые пересечены трещинами, бракуются. Таким образом, представляет интерес задача определения выхода целых блоков.

Разработка месторождения производится по горизонтали, каждый такой горизонт можно считать частью пространства, заключенного между 2 горизонтальными плоскостями, находящимися на расстоянии D_3.

Для каждого горизонта выемка производится вдоль направления Фронта горных работ (ФГР), затем сам ФГР передвигается вглубь горизонта на расстояние $\mathcal{D}_1$..

Расстояния между горизонтальными распилами равны $\mathcal{D}_3$, между вертикальными распилами, параллельными ФГР, равны $\mathcal{D}_1$.

Распилы этих систем проводятся строго на равном расстоянии друг относительно друга и моделируются двумя перпендикулярными системами плоскостей с равными расстояниями между соседними плоскостями в каждой системе.

Когда выпиливается блок, то проводятся еще два вертикальных распила, перпендикулярных ФГР, расстояние между которыми равно $\mathcal{D}_2$. Однако, в самой процедуре проведения этих распилов возможны варианты.

Для первого технологического процесса (применяемого при разработке месторождения стенового камня) распилы каждой системы проводятся на равных расстояниях, так что все три системы распилов моделируются тремя перпендикулярными равноотстоящими системами плоскостей, с расстояниями между соседними плоскостями в системах равными D_1, D_2, D_3.

В этом случае задача сводится к задаче отыскания относительного числа монолитных блоков первого порядка.

Для второго процесса две системы распилов, параллельные ФГР проводятся точно также и разбивают пространство на равные бруски, а вот распилы третьей системы, перпендикулярные ФГР, доразбиваюие каждый такой брусок, для каждого бруска всякий раз регулируются так, чтобы повысить выход целых блоков. Ниже будет решена задача для оптимального выбора распилов.

Назовем горизонтальные распилы первой системой распилов или просто первой системой, систему распилов, перпендикулярную ФГР второй, а оставшуюся - третьей. Расстояния между соседними распилами соответственно первой, второй и третьей систем при выпиливании блока равны $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$.

мы предположим, что распилы второй системы регулируются оптимальным образом. Поясним это. Пусть добыча происходит слева направо (направление указано). можно считать, что две системы распилов, параллельных ФГР уже проведены и разбивают пространство на бруски.

Пусть B - один из таких брусков.

Оптимальная стратегия, позволяющая выпилить из в максимально возможное число монолитных тарифных блоков размера $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$, состоит в следующем:

1. Если можно провести справа от ранее проведенного распила второй системы распия на расстоянии $\mathcal{D}_2$ так, чтобы был выпилен монолитный блок, это следует сделать.

2. В противном случае проводится самый левый из распилов, который не пересекается с трещинами и не совпадает с ранее проведенным

Выход монолитных блоков размера $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$ для второго технологического процесса в пересчете на единицу объема равен выходу таких блоков из бруска. В пересчете на единицу длины длинного ребра B, деленный на $\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_3$. Последняя задача сводится уже к одномерной задаче определения числа отрезков длины $\mathcal{D}_2$ в пересчете на единицу длины, которые можно вырезать из прямой с выброшенными системами отрезков.

Уточним это соображение. Рассмотрим проекцию на направление ФГР. Вторая система проектируется в систему точек, вырезаемой тарифный блок - в отрезок длины $\mathcal{D}_2$.

Сечения в плоскостями i-й системы A_1 проектируются в отрезки длины d_i, среднее расстояние (расстояние между серединами) между соседними такими отрезками равно δ_i. Обозначим i-ю систему отрезков через α_i Расстояние между отрезками из α_i пропорционально расстоянию между соответствующими плоскостями из A_i, поэтому имеет тот же закон распределения.

Вырезанный монолитный блок проектируется в область, не пересекаются ни с одним из отрезков систем α_i.

Множество точек, не закрытых ни одним из отрезков систем α_i образует набор интервалов. Назовем такие интервалы свободными. из свободного интервала длинны x можно вырезать $f(X) = [x/D_2]$ отрезков длины $\mathcal{D}_2$, где $[x]$ - целая часть x. С коэффициентом $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_3$ выходу в пересчете на единицу длины ребра B или, что то же самое, пределу

$$Q = \lim_{1\to\infty} N(l)/l$$

где $N(l)$ - число блоков, которые можно вырезать из части B, являщейся прямоугольным параллелепипедом с ребрами $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3$. Пусть L(д) - проекция этой части на (OX). Тогда:

$$N(l) = \sum_{\mathbf{X}} f(x), \tag{23}$$

где x пробегает свободные интервалы, находящиеся внутри l. Таким образом, постановка задачи является такой:

На прямой даны n систем отрезков d_i, среднее расстояние между соседними отрезками i-й системы равно δ_i, закон распределения расстояний между соседними отрезками из α_i известен.

Найти λ - среднюю сумму $f(x)$ по свободным интервалам в пересчете на единицу длины, т.е. предел:

$$\lim_{l\to\infty} 1/21 * \sum_{\text{середина } x \text{ принадлежит } [-l,l]} f(x)$$

Ниже будут получены явные выражения для d_i и δ_i через параметры, описывающие положение систем A_i и направление ФГР.

Для первого процесса задача ставится так: даны 3 системы плоскостей, разбивающие пространство на блоки первого порядка, являющиеся прямоугольными параллелепипедами. Соседние плоскости первой системы удалены на расстояние $\mathcal{D}_1$, второй и третьей системы на $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_3$ соответственно. Кроме того, имеются еще n систем плоскостей с известными направлениями, средними расстояниями и законом распределения расстояний между соседними.

Требуется определить относительное число монолитных блоков первого порядка, порожденных первыми тремя системами.

На выход блоков, как для первого, так и для второго процесса оказывает влияние закон распределения расстояний в системах.

Мы рассмотрим две модели: равноотстоящую и пуассоновскую, которые представляют крайние случаи распределения расстояний между трещинами. Сравнение результатов этих двух моделей позволяет судить о влиянии разброса расстояний между трещинами и тем самым об обоснованности предположений, лежащих в основе моделей.

Заметим, что выход блоков для пуассоновской модели больше. Это связано с тем, что разброс межтрещинных расстояний приводит к тому, что где-то трещины располагаются реже (а где-то чаще). Но для выхода блоков "много трещин"это все равно, что "очень много". Зато важно, что появляются места с более редкими трещинами.

Ниже задача определения выхода блоков решена для четырех различных ситуаций:

1. I-й процесс - равноотстоящая модель.
2. I-й процесс - пуассоновская модель.
3. 2-й процесс - равноотстоящая модель.
4. 2-й процесс - пуассоновская модель.

В первом случае выход получается минимальным, в четвертом максимальным. Эти соображения служат одним из тестов для проверки алгоритмов. Сравнения результатов для первого и второго процесса позволяют судить о значении выбора распилов.

На основе решения задач $1, 2, 3, 4$ была разработана программа.

7. Задание плоскостей и вычисление вспомогательных величин.

В ближайших трех параграфах плоскости i-системы задаются нормальными уравнениями:

$$a_1x + b_1y + c_1z = const$$

при этом $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$ или

$$a_i = \sin\alpha_i \cos\beta_i$$
$$b_i = \sin\alpha_i \sin\beta_i$$
$$c_i = \cos\alpha_i$$

где α_i – угол падения плоскостей i-й системы, а β_i – азимут простирания.

Через ψ обозначается азимут ФГР, а через d_i– средние расстояния между трещинами i-й системы. Пусть R_{ij} - координаты ребер вырезаемого тарифного блока B (R_{3j} - вертикального,

R_{1j} параллельному ФГР, R_{2j} - горизонтального нормального ФГР, $j=1,2,3$ соответствует координатам x,y,z). Тогда:

$$\begin{array}{lll} R_{11}=D_1\cos\psi, & R_{21}=-D_2\sin\psi, & R_{31}=R_{32}=0 \\ R_{12}=-D_1\sin\psi, & R_{22}=-D_2\cos\psi, & R_{33}=D_3, \\ R_{13}=0, & R_{23}=0. & \end{array}$$

Длина проекции Γ_i блока П на нормаль к i-й системе равна сумме длин проекций его ребер:

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= |R_{11}a_i+R_{12}b_i+R_{13}c_i|+|R_{21}a_i+R_{22}b_i+R_{23}c_i|+ \\ &+|R_{31}a_i+R_{32}b_i+R_{33}c_i| = D_1\left|\mathrm{cosa}_i+\mathrm{sinb}_i\right|+ \\ &+D_2\left|-\mathrm{sina}_i+\mathrm{cosb}_i\right|+D_3\left|c_i\right| \end{aligned} \tag{24}$$

Пересчитаем все величины в систему координат, связанную с П , т.е, систему координат с базисными векторами $\vec{e}_1=R_{1j},\vec{e}_2=R_{2j},\vec{e}_3=R_{3j}$. В этой системе координат блок П есть множество точек x',y',z', таких, что $0\leqslant x',y',z'\leqslant 1$. Переход к этой системе координат представляет собой аффинное преобразование, переводящее П в единичный куб.

В новой системе координат уравнения плоскостей i-й системы имеют вид:

$$a_i'x+b_i'y+c_i'z=const,$$

где

$$\begin{aligned} a_i' &= a_iR_{11}+b_iR_{12}+c_iR_{13}, \\ b_i' &= a_iR_{21}+b_iR_{22}+c_iR_{23}, \\ c_i' &= a_iR_{31}+b_iR_{32}+c_iR_{33}. \end{aligned} \tag{25}$$

Удобно все коэффициенты a_i',b_i',c_i' разделить на нормировочный коэффициент $\mathbf{x}_i=\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}$.

Положим $a_i^1=a_i'/\mathbf{x}_i; b^4=b_i'/\mathbf{x}_i; c_i^1=c_i'/\mathbf{x}_i$.

Окончательно, уравнения плоскостей i-й системы имеют вид:

$$a_i^1x+b_i^1y+c_i^1z=\text{ const.}$$

Средние расстояния между плоскостями i-й системы в новой системе координат равны $d_i^1=d_i^1/\mathbf{x}_i$ а проекция Γ_i^1 на нормаль к i-й системе равна:

$$\Gamma_i^1=\left|a_i^1\right|+\left|b_i^1\right|+\left|c_i^1\right|. \tag{24$'$}$$

Ниже, если не оговорено противное, все координаты будут относиться к описанной выше системе.

$$\text{Пусть Br - брус: } Br=\{x,y,z\mid 0\leqslant x,y,z\leqslant 1\}$$

(длинная ось Br параллельна ФГР)

Проекция сечения Br плоскостью i-й системы на ось OX есть отрезок, длина которого равна:

$$s_i=\left(\left|b_i^1\right|+\left|c_i^1\right|\right)/\left|a_i^1\right| \tag{26}$$

Среднее расстояние DS_i между серединами таких отрезков равно:

$$DS_i=d_i^1/\left|a_i^1\right| \tag{27}$$

7.1. Определение выхода блоков для первого процесса.

Как было сказано выше, в этом случае задача ставится так: даны решетка параллелепипедов (блоков первого порядка), длины ребер которых равны $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ и п систем плоскостей. Требуется определить выход (относительное число) монолитных блоков первого порядка. Ниже в этом пункте будут решены задачи I, 2 предыдущего пункта. Проводимые при этом рассмотрения не зависят от выбора системы координат.

Средний выход блоков равен вероятности P того, что наугад взятый блок первого порядка, образованный системами распилов $A_1,\ A_2,\ A_3$, является монолитным. Как для пуассоновской, так и для равноотстоящей модели справедливо равенство:

$$P = \prod_{i=1}^{n} P_i. \tag{28}$$

где P_i - вероятность того, что блок первого порядка не пересчен трещинами i-й системы. Равенство (28), очевидное для пуассоновской модели, для равноотстоящей модели вытекает из результатов 3.I. через $P^{\text{равн}}$ ($P_i^{\text{равн}}$). Мы будем обозначать выход блоков в равноотстоящей модели через $P^{\text{равн}}$ и через $P_{\mathbf{i}}^{\text{Пуасс}}$ - в пуассоновской.

Пусть Γ_i - проекция блока первого порядка B на нормаль к i-й системе, d_i - расстояния между соседними трещинами i-й системы через x^+мы как обычно обозначаем MAX$(X, 0)$.

Из равномерной распределенности сдвигов i-й системы относительно B, доказанной в 3.I. следует равенство для равноотстоящей модели:

$$P_i^{\text{равн}} = (d_i - \Gamma_i)^+ / d_i. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует, что:

$$P^{\text{равн}} = \prod_{i=1}^{n} (\ d_i - \Gamma_i) / d_i, \tag{30}$$

где $p^{\text{равн}}$ выход блоков для равноотстоящей модели.

Аналогично, рассматривая проекцию В на нормаль к i-й системе, мы для пуассоновской модели приходим к следующей задаче:

На прямой дано пуассоновское множество точек, средние расстояния между соседними точками равны d_i. Найти вероятность P_i того, что наугад взятый отрезок длины Γ_i не закроет ни одной точки.

Как хорошо известно из теории геометрических вероятностей, в этом случае

$$P_i^{\text{пуасс}} = \exp\left(-\Gamma_i / d_i\right). \tag{31}$$

Учитывая (28) и (3I) для пуассоновской модели, окончательно имеем:

$$\mathrm{P}^{\text{пуасс}} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\Gamma_i / d_i\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i / d_i\right) \tag{32}$$

В системе координат, связанный с B $\Gamma_i^1 = \left|a_i^1\right| + \left|b_i^1\right| + \left|c_i^1\right|$ и поэтому окончательные выражения для выхода блоков в этой системе координат примут вид:

$$P_i^{\text{равн}} = \prod_{i=1}^{n} \left[\ d_i^1 - \left|a_i^1\right| - \left|b_i^1\right| - \left|c_i^1\right|\right] / d_i^1, \tag{30'}$$

$$P_i^{\text{пуасс}} \ \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \left[\left|a_i^1\right| + \left|b_i^1\right| + \left|c_i^1\right|\right] / d_i^1\right] \tag{32'}$$

где индекс I наверху обозначает, что все величины берутся в системе координат, связанной с B.

7.2. Определение выхода блоков для второго процесса.

Прежде всего с помощью аффинного преобразования задача сводится к случаю, когда $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = I$, а азимут ФГР ψ равен 0 . После преобразования вырезаемый блок является единичным кубом.

После перехода к проекциям на направление ФГР и сведения таким образом к линейному случаю, задача сводится к следующей:

На прямой l дано n систем отрезков, которые мы будем называть закрытыми отрезками. Отрезки i-й системы A_i имеют длину Ds_i. Средние расстояния между серединами соседних отрезков i-й системы равны S_i. Определить среднее число λ отрезков длины 1 , которое можно вырезать из частей прямой l , не закрытых отрезками в пересчете на единицу длины.

Равенство (2I) можно переписать в виде:

$$\lambda = \lim 1/2L \sum [x] = \sum_{k=1}^{\infty} N_k, \tag{21'}$$

где x – свободный интервал на отрезке $[-L, L]$, и N_k – среднее число свободных интервалов длины, большей чем k, в пересчете на единицу длины. Запишем окончательно:

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} N_k. \tag{33}$$

Число отрезков системы A_i на участке длины L равно L/DS_i, а всего отрезков всех систем равно $L \cdot DQ$, где

$$DQ = \sum_{i=1}^{n} 1/S_i \tag{34}$$

Предполагается также, что прямая l ориентирована так, что можно говорить о "начале"и "конце"каждого отрезка.

Перейдем теперь к разбору случаев пуассоновской и равноотстоящей модели.

7.3. Пуассоновская модель.

Выход блоков мы будем обозначать $\lambda_{\text{пуасс}}$. В этом случае середины отрезков систем A_i образуют пуассоновское множество точек со средним расстоянием I/DS_i. Пусть E – случайно выбранный конец отрезка системы A_i.Вероятность P_j того, что E не закрыта (не является внутренней точкой) отрезка A_j равна вероятности того,что произвольно выбранная точка не закрыта точками A_j При $i \neq j$ это очевидно, при $i = j$ это, следует из рассмотрения системы A_i как объединения очень большого числа систем A_k, порожденных пуассоновскими процессами середин малой интенсивности.

Справедливо равенство:

$$P_j = \exp\left(-S_j/Ds_j\right). \tag{35}$$

Формула (35) следует из того, что S_j/DS_j - это относительная суммарная длина отрезков из A_j в пересчете на единицу длины. Доказательство (35) основано на рассмотрении системы A_j как объединения систем A_j малой интенсивности. В этом случае

$$P_j = \prod_{\alpha=1}^{n} P_j^{\alpha} = \prod_{\alpha=1}^{n} \left(1 - \frac{S_j}{N \cdot DS_j} + o\left(\frac{S_j}{N \cdot DS_j}\right)^2\right),$$

т.е.

$$P_j = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{S_j}{N \cdot DS_j} + o\left(\frac{S_j}{N \cdot DS_j}\right)^2\right]^n = \exp\left(-S_j/D_j\right) \tag{36}$$

Вероятность P того, что E не закрыта никаким из отрезков систем A_i равна:

$$P = \prod_{j=1}^{n} P_j = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} S_j/D_j\right) \tag{37}$$

Пусть E - начало свободного интервала.

Покажем, что вероятность P_X того, что расстояние от т.E до начала ближайшего закрытого отрезка превышает X равна:

$$P_X = \exp(-X * DQ) = \exp\left[-X\sum_{j=1}^{n} 1/DS_j\right] \tag{38}$$

В самом деле: с тем же успехом, что и серединами, отрезки систем A_j можно задавать начальными точками. Условие незакрытости E - это условия на начальные точки, находящиеся левее E, которые не зависят от точек, находящихся правее Е. Если забыть о длинах отрезков из A_i, то объединения процессов, порождающих все A_j, можно рассматривать как один пуассоновский процесс интенсивности DQ. Вероятность же того, что ближайшее слева начало от наугад выбранной точки отстоит на расстоянии больше X равна $\exp(-X * DQ)$, что и требуется.

Определим теперь относительное число N_X свободных отрезков длины больше X в пересчете на единицу длины.

Число середин отрезков систем $\{A_j\}$, а следовательно, и концов, в пересчете на единицу длины равно DQ, P - вероятность того, что конец не закрыт другим отрезком. Итак, относительное число свободных отрезков в единице длины равно DQP. Каждый такой отрезок с вероятностью P_x имеет длину больше X.

Таким образом, справедливо равенство:

$$N_X = \left[\sum_{j=1}^{n} 1/DS_j\right) * \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} S_j/DS_j\right) * \exp\left(-X\sum_{j=1}^{n} 1/DS_j\right]. \tag{39}$$

Воспользовавшись (33) найдем $\lambda_{\text{пуасс}}$:

$$\lambda_{\text{пуасс}} = \sum_{k=1}^{\infty} N_k = DQ\exp\left(-\sum_{j=1}^{n} S_j/DS_j\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-kDQ) =$$

$$= \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} S_j/DS_j\right) \cdot DQ \cdot \exp(-DQ)/(1-\exp(-DQ)]$$

Окончательно имеем:

$$\lambda_{\text{пуасс}} = \exp\left(-S_j/DS_j\right] \cdot DQ \cdot \exp(-DQ)/(1-\exp(-DQ)], \tag{40}$$

где $DQ = \sum_{j=1}^{n} 1/DS_j$. Заметим, что если $DQ \to 0$, т.е. трещины располагаются редко, то $DQ\exp(-DQ)/(1-\exp(-DQ)] \to 1$ и $\lambda_{\text{пуасс}}\ \exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\ S_j/DS_j\right]$

В этом случае свободные интервалы имеют большую (стремящуюся к бесконечности) среднюю длину и число вырезанных отрезков длины l равно относительной длине свободных интервалов.

7.4. Равноотстоящая модель.

В этом случае каждая система $A_{\mathbf{i}}$ отрезков представляет собой систему отрезков длины S_i. Соседние отрезки находятся на равном расстоянии DS_i между собой. Поскольку предполагается, что все параметры, описывающие положение ФГР и системы трещин находятся в общем положении, так что все величины DS_i алгебраически независимы и выполняются все свойства равномерного распределения независимости сдвигов. Это дает возможность любую точку, связанную с набором систем считать случайно взятой по отношению к другим системам, причем все сдвиги других систем относительно этой точки можно считать равномерно распределенными и независимыми.

Пусть $L \to \infty$. Число отрезков (а, следовательно, и их концов) из A_j на участке длины L равно L/D_j.Пусть Q_j - число свободных интервалов, начало которых совпадает с концом отрезка из A_j.

Поскольку вероятность P_j того, что наугад взятая точка не закрыта отрезком из A_j, равна $(DS_l - S_l)^+/DS_l$, то из замечания о независимости сдвигов, сделанного выше, вытекает равенство

$$Q_j = I/DS_j \cdot \prod_{l\neq j}(DS_l - S_l)^+/DS_l. \tag{41}$$

Множитель $\prod_{1\neq j}(DS_l - S_l)^+/DS_l$ имеет смысл вероятности того, что случайно взятая точка не закрыта отрезком из A_l. В отличие от пуассоновского случая, произведение берется по $l \neq j$, а не по всем l от I до n.

Если $S_j > D_j$ при некотором j, то система A_j не оставляет свободных отрезков и выход в этом случае равен нулю.

Пусть E - начало свободного отрезка, являющееся одновременно концом отрезка из A_j. Вероятность P_j того, что начало ближайшего отрезка из $A_l(j \neq 1)$ находится на расстоянии больше x от E равна:

$$P_{j,l}^X = (DS_l - S_l - X)^+ / (DS_l - S_l). \tag{42}$$

Покажем это. Расстояние между концом и началом соседних отрезков системы A_j равно $DS_j - S_j$, область же точек, находящихся между концом и началом двух соседних отрезков системы A_j, которые могут служить началами свободных отрезков длины больше X есть интервал длины $(DS_j - S_j - X)^+$, начало которого совпадает с концом первого отрезка A_j, а конец - отстоит на расстоянии t от начала второго. Отсюда и вытекает (42).

При $l = j, P_{j,l}^X = 1$, если $X \leqslant DS_j - S_j$ и $P_{j,l}^X = 0$ при $X \geqslant DS_j - S_j$.

Из (42) и результатов 4.1. вытекает, что вероятность P_j того, что наугад взятый свободный интервал, начало которого лежит на A_j имеет длину больше X, равна:

$$P_j^X = \prod_{l\neq j}(DS_l - S_l - x)^+ / (DS_l - S_l). \tag{43}$$

Таким образом, число свободных интервалов $N_{X,j}$ длины больше X, начало которых находится на конце отрезка из A_j на участке длины равно $P_j \cdot Q_j$ или

$$N_{X,j} = \frac{L}{DS_j} \prod_{l \neq j} \frac{(DS_l - S_l)^+}{DS_l} \cdot \prod_{l \neq j} \frac{DS_l - S_l - X)^+}{DS_l - S_l}$$

После упрощения получим:

$$N_{X,j} = L \cdot \frac{1}{DS_j - S_j - X} \prod_{l=1}^{n} \frac{(DS_l - S_l - X)^+}{DS_l - S_l} \tag{44}$$

Общее число N_X отрезков, длины большей, чем X, в пересчете на единицу длины равно

$$\begin{gathered} I/L \cdot \sum_{j=1}^{n} N_{X,j} \quad \text{или} \\ N_X = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{DS_j - S_j - X} \right) \prod_{j=1}^{n} \frac{(DS_j - S_j - X)^+}{DS_j - S_j}. \end{gathered} \tag{45}$$

Пусть $m = Min_j([DS_j - S_j])$. Если $m \leqslant 0$, то $\lambda^{\text{равн}} = 0$.
Воспользовавшись (33) имеем:

$$\lambda^{\text{равн}} = \sum_{X=1}^{\infty} N_X = \sum_{X=1}^{m} N_X.$$

Отсюда окончательно получаем:

$$\lambda^{\text{равн}} = \sum_{X=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{DS_j - S_j - X} \right) \prod_{j=1}^{n} \frac{DS_j - S_j - X}{DS_j - S_j} \tag{46}$$

Мы заменили ($DS_j - S_j - X)^+$, на $DS_j - S_j - X$, поскольку $DS_j - S_j - X > 0$.

На основании формул (40), (46) была составлена программа, позволяющая для каждого направления ФГР от 0^0 до 180^0, определять выход блоков для четырех описанных выше ситуаций, а также находить оптимальное направление ФГР для каждого случая. Для неоднородного месторождения выход блоков определяется как взвешенное, среднее.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аноценко Н.Н. Геометрический анализ трещиноватости и блочности месторождений облицовочного камня // МГИ, 1983.

2. Р.В. Амбарцумян, Й.Мекке, Д.Штоян. Введение в стохастическую геометрию // М.:Наука, 1989.

3. А.Я. Канель-Белов, В.В. Павлова, В.О. Кирова Геометрические свойства сред, разбитых трещинами на блоки // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 208-216.

4. Батугин С. А., Бирюков А. В., Крылатчанов Р. М., Гранулометрия геоматериалов // Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1989.

5. Касселс Дж. В., Введение в теорию диофантовых приближений // Москва, Изд-во иностранной литературы, 1961.

6. Количко А. В., Опыт оценки блочности трещиноватого массива скальных пород // Труды Гидропроекта, Сб.14, Москва–Ленинград, Энергия, 1966.

7. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности // М.:Наука 1972.

8. М. Маттерон. Случайные множества и интегральная геометрия // М: Мир, 1978.

9. Никитин В. В., Разработка Горно–Геометрического метода прогнозирования выхода блоков для рациональной отработки месторождений облицовочного камня // Дисс. на соиск. канд. техн. наук, Москва, МГИ, 1987. с.97.

10. Садовский М. А., Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР, 1979, т. 247, N4 – с. 829–831.

11. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф., О свойствах дискретности горных пород // Москва, Ин-т физики Земли им. О. Ю. Шмидта, 1981 (36с.).

12. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф., О свойстве дискретности горных пород. Физика Земли // 1982, N12, с. 3–18.

13. Садовский М. А., О распределении твердых отдельностей // ДАН СССР, 1983, т.269, N1, с.69–72.

14. Сантало д. Интегральная геометрия и геометрические веролтности // М.:Наука, 1983.

15. Чернышев С. Н., Трещины горных пород // Москва, Наука, 1983.

16. Pavlova V. V., Study of Geometrical Properties of Blocks in a Jointed Rock Mass Using Statistical Geometry. // Proceedings of the 23-rd International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, Tucson, Arisona, USA, April 7–11, 1992, pp.367–373.

17. Goodman, Gen-hua Shi. Block theory and some it's applications to rock engineering // Prentice-Hall, 1985.

REFERENCES

1. Anoshchenko, N.N., 1983. “Geometric analysis of fracturing and blockiness of facing stone deposits”, *MGI.*

2. Ambartsumyan, R.V., Mekke, J., Shtoyan, D, 1989. “Introduction to Stochastic geometry”, *Moscow:Nauka.*

3. Kanel-Belov, A.Ya., Pavlova, V.V., Kirova, V.O., 2023. “Geometric properties of media broken into blocks by cracks”, *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 24, Iss. 5, pp. 208–216.

4. Batugin, S. A., Biryukov, A. V., Krylatchanov, R. M., 1989. “Granulometry of geomaterials”, *Novosibirsk, Nauka, Siberian Branch.*

5. Cassels, J. V., 1961. “Introduction to the theory of diophantine approximations”, *Moscow, Publishing House of Foreign Literature.*

6. Kolechko A. V., 1966. “Experience in assessing the blockiness of a fractured rock mass”, *Trudy Gidroproekt, Sat.14, Moscow–Leningrad, Energiya.*

7. Kendall, M., Moran, P., 1972. “Geometric probabilities”, *Moscow:Nauka.*

8. Masteron, M., 1978. “Random sets and integral geometry”, *Moscow: Mir.*

9. Nikitin, V. V., Development of a mining and geometric method for predicting block yield for rational mining of facing stone deposits // Diss. on the job. Candidate of Technical Sciences, Moscow, Moscow State University, 1987. p.97.

10. Sadovsky, M. A., 1979. "Natural lumpiness of rock", *Dokl. USSR Academy of Sciences*, Vol. 247, № 4, pp. 829–831.

11. Sadovsky, M. A., Bolkhovitinov, L. G., Pisarenko, V. F., 1981. "On the properties of rock discreteness", *Moscow, O.Y.Schmidt Institute of Physics of the Earth*, 1981 (36s.).

12. Sadovsky, M. A., Bolkhovitinov, L. G., Pisarenko, V. F., 1982. "On the discreteness property of rocks", *Physics of the Earth*, № 12, pp. 3–18.

13. Sadovsky, M. A., 1983. "On the distribution of solid separations", *DAN USSR*, Vol. 269, № 1, pp. 69–72.

14. Santalo, D., 1983. "Integral geometry and geometric probabilities", *Moscow: Nauka.*

15. Chernyshev, S. N., 1983. "Rock cracks", *Moscow, Nauka.*

16. Pavlova, V. V., 1992. "Study of Geometrical Properties of Blocks in a Jointed Rock Mass Using Statistical Geometry", *Proceedings of the 23-rd International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, Tucson, Arisona, USA, April 7–11*, pp. 367–373.

17. Goodman, Gen-hua Shi., 1985. "Block theory and some it's applications to rock engineering", *Prentice-Hall.*

Получено:
Принято в печать: