МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ, СТАТИСТИКИ И ИНФОРМАТИКИ (МЭСИ)
ИНСТИТУТ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра высшей математики

Международная миниконференция "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" (3 июня 2011 г.)

СБОРНИК ТРУДОВ

MOSCOW STATE UNIVERSITY OF ECONOMICS, STATISTICS AND INFORMATICS (MESI)
INSTITUTE OF COMPUTER TECHNOLOGIES
Department of Higher Mathematics

International miniconference "Qualitative theory of differential equations and applications" (3 June 2011)

PROCEEDINGS

Москва 2011 год

References

[1] Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. V. 1*, Wiley, New-York, 1989.

[2] Ladyzhenskaya O.A. *Boundary value problems of mathematical physics*. "Nauka", Moscow, 1973. 408 p.

[3] Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. Springer, Berlin, 1984.

[4] Landis E.M. *On some properties of solutions of elliptic equations* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1956, V. 107, no. 5, P. 640 – 643.

[5] Sperb R.P. *Untere und obere schranken fur den tiefsten eigenwert elastisch gestutzten membran* // Zeitschrift Angew. Math. Phys. 1972. V. 23, no. 2, P. 231 – 244.

[6] Payne L.E. *Isoperimetric inequalities and their applications* // SIAM Review. 1967. V. 9, no. 3, P. 453–488.

О ПРИВЕДЕНИИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ К ПСЕВДОНОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Самовол В.С. (*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*)

Введение. В работе речь пойдет о системах, матрица линейной части которых имеет два чисто мнимых собственных числа, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси. Мы будем использовать преобразования, не являющиеся обратимыми, поэтому систему, получающуюся при их применении, мы, в отличие от нормальной формы, будем называть псевдонормальной формой. Этот подход развит в [1], где предложен новый взгляд на псевдонормальную форму систем с одним нулевым собственным числом (в указанной работе мы не использовали термин псевдонормальная форма и именовали ее нормальной формой).

Ниже будут рассматриваться вещественные автономные системы вида

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \tag{1}$$

где ξ, $Q(\xi) \in R^{n+2}$, $n > 0$, $Q(\xi)$ — функция класса C^∞ в некоторой окрестности начала координат, $Q(0) = 0$, матрица $\widetilde{A} \doteq Q'(0)$ имеет n собственных чисел, лежащих вне мнимой оси и пару чисто мнимых собственных чисел. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы $\widetilde{A}$ с ненулевой действительной частью, $\pm i\omega$ — пара чисто мнимых собственных чисел данной матрицы, $\omega > 0$, i — мнимая единица.

С помощью стандартного линейного преобразования приведем систему (1) к следующему виду, где матрица $\widetilde{A}$ станет жордановой:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= i\omega x_1 + f_1(x, y), \\ \dot{x}_2 &= -i\omega x_1 + f_2(x, y), \\ \dot{y}_j &= \varepsilon_j y_{j+1} + \lambda_j y_j + g_j(x, y), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь x, y — комплексные координаты, $x = (x_1, x_2)$, $x_2 = \bar{x}_1$, $y = (y_1, \dots y_n)$, комплексно сопряженным переменным соответствуют комплексно сопряженные уравнения (см., напр., [2, стр. 167-168]), ряды Тейлора функций $f_1, f_2, g_j, j = 1, \dots, n$ не содержат линейных членов. Переменные x мы будем называть вырожденными, а переменные y, соответственно, невырожденными.

Замечание. *В данной работе нас будут интересовать преобразования, относящиеся к системам уравнений, переменные в которых являются комплексными. В то же время исходная система* (1) *является вещественной. При переходе от системы* (1) *к комплексной системе* (2) *все уравнения разбиваются на пары комплексно сопряженных уравнений (соответствующих комплексно сопряженным собственным числам) и вещественных уравнений (для* *вещественных собственных чисел). Важным является то обстоятельство, что при всех последующих преобразованиях комплексных систем будет соблюдаться принцип, согласно которому комплексно сопряженные переменные и соответствующие им уравнения будут преобразовываться в комплексно сопряженные. Каждому такому преобразованию будет соответствовать вещественное преобразование исходной системы. Этот принцип (условие) мы будем называть принципом (условием) вещественности.*

Следующая теорема, при формулировке которой мы используем хорошо известное понятие резонансного монома (см., напр, [2-4]) представляет собой стандартное утверждение и мы ограничимся лишь ее формулировкой.

Теорема. *Существует невырожденное преобразование класса C^∞, приводящее систему (2) к виду, при котором ряд Тейлора правой части системы является суммой резонансных мономов по всем переменным (как вырожденным, так и невырожденным).*

Ниже будем считать, что система (2) уже приведена к виду, указанному в данной теореме.

В рассматриваемых системах, как и в случае с одним нулевым собственным значением, главной проблемой является приведение к удобной форме линейной (по невырожденным координатам) части системы. Основным препятствием являются так называемые резонансы единичного веса (см. [5]), которые возникают в тех случаях, когда для каких-либо $1 \leqslant j_1 \neq j_2 \leqslant n$ число $\frac{\lambda_{j_1}-\lambda_{j_2}}{i\omega}$ — целое. Такие собственные числа, а также соответствующие переменные и уравнения системы мы будем называть эквивалентными между собой. В случае отсутствия указанных резонансов система (1) всегда может быть приведена к полиномиальной нормальной форме преобразованием конечного класса гладкости [5, теорема 3]. Среди указанных резонансов выделим такие, где $\lambda_{j_1} = \bar{\lambda}_{j_2}$. Это означает, что число $2\omega^{-1}\operatorname{Im}\lambda_{j_1}$ — целое. Такие резонансы, где это число нечетное, будем называть особыми. Переменные, соответствующие собственным числам λ, для которых число $2\omega^{-1}\operatorname{Im}\lambda$ — нечетное, будем также называть особыми переменными, а если это число не является нечетным (или оно не целое), то соответствующие переменные будем называть неособыми.

У формальной системы, соответствующей системе (2), имеется двумерное инвариантное центральное многообразие, отвечающее мнимой части спектра. Из [6] следует, что у системы (2) также имеется инвариантное центральное многообразие класса C^∞ (вообще говоря, не единственное), на котором в окрестности особой точки интегральные кривые либо замкнуты (случай центра), либо являются спиралями (случай фокуса). В данной статье исследуются системы вида (2), имеющие фокус на центральном многообразии. На любом центральном многообразии система может быть приведена формальным преобразованием к следующей нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(i\omega + ig_2(\widetilde{r}) + g_1(\widetilde{r})),\\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega - ig_2(\widetilde{r}) + g_1(\widetilde{r})). \end{aligned}$$

где $\widetilde{r} = x_1x_2$, $g_j(\widetilde{r})$, $j = 1, 2$ — вещественные формальные ряды без свободных

членов. Мы ограничимся рассмотрением основного случая, когда $g_1(\widetilde{r})$ — функция, тождественно не равная нулю (случай негрубого фокуса).

С учетом формулы (2.7) из [7], а также исходя из соображений вещественности, получаем, что на центральном многообразии система в случае фокуса может быть приведена формальным преобразованием к следующей нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(i\omega + i\varphi(\widetilde{r}) + \widetilde{b}(\widetilde{r})),\\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega - i\varphi(\widetilde{r}) + \widetilde{b}(\widetilde{r})). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь и ниже $\widetilde{r} = x_1x_2$, $\varphi(\widetilde{r}) = \sum\limits_{j=1}^{m}\varphi_j\widetilde{r}^j$, $\widetilde{b}(\widetilde{r}) = b\widetilde{r}^m + c\widetilde{r}^{2m}$, $m \geq 1$ — целое число, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, b, c — вещественные числа, $b \neq 0$. Отметим, что переменная $\widetilde{r}$ удовлетворяет уравнению $\dot{\widetilde{r}} = 2\widetilde{r}\widetilde{b}(\widetilde{r})$. Зафиксируем одно из центральных многообразий. После соответствующей замены переменных можно считать, что данное многообразие определяется уравнением $y = 0$. Возможность формального преобразования в случае фокуса на центральном многообразии означает существование преобразования класса C^∞, приводящего систему на центральном многообразии к виду (3) (см., например, [6]). Будем считать, что в системе (2) указанное преобразование уже сделано.

Рассмотрим линейную (по невырожденным координатам) часть системы (2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(i\omega + i\varphi(\widetilde{r}) + \widetilde{b}(\widetilde{r})),\\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega - i\varphi(\widetilde{r}) + \widetilde{b}(\widetilde{r})),\\ \dot{y} &= A(x)y. \end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что за счет соответствующей нумерации переменных можно добиться того, что матрица $\widehat{A}(x)$, являющаяся формальным аналогом матрицы $A(x)$, будет иметь блочно-диагональную форму, где в отдельные блоки будут входить только группы эквивалентных переменных (под $\widehat{A}(x)$ понимается ряд Тейлора матрицы $A(x)$).

В данной работе мы часто будем пользоваться соображением о том, что наличие формальных преобразований рассматриваемых систем уравнений означает существование соответствующих преобразований класса C^∞ (см. [6]). Поэтому рассмотрение системы в подобных случаях будем заменять исследованием ее формального аналога. С учетом этого будем в дальнейшем считать, что матрица $A(x)$ в (4) также имеет указанный блочно-диагональный вид.

Заметим теперь, что в случае, когда число $2\omega^{-1}\operatorname{Im}\lambda_j$ целое, то переменные y_j и $\bar{y}_j$ будут эквивалентными, и уравнения для них будут находиться в одном блоке. Отсюда нетрудно видеть, что для некоторого набора эквивалентных переменных y_j либо все числа $2\omega^{-1}\operatorname{Im}\lambda_j$ целые и тогда все пары комплексно сопряженных переменных y_j и $\bar{y}_j$ окажутся в одном блоке, либо все числа $2\omega^{-1}\operatorname{Im}\lambda_j$ не являются целыми, и комплексно сопряженные переменные будут входить в разные блоки.

Нашей первой целью является приведение системы (4) к виду, где матрица $A(x)$ будет иметь жорданову форму. С учетом блочно-диагонального вида $A(x)$

достаточно привести к требуемому виду отдельный блок матрицы $A(x)$. Отметим то обстоятельство, что в таком блоке все числа $2\omega^{-1}\operatorname{Im}\lambda_j$ — одновременно все четные или все нечетные, соответственно, все переменные входящие в блок, либо не являются особыми, либо все они особые. Действительно, для двух чисел $\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}$, относящихся к такому блоку, имеем

$$2\omega^{-1}\operatorname{Im}\lambda_{j_1} = 2\omega^{-1}\operatorname{Im}\lambda_{j_2}+2(i\omega)^{-1}(\lambda_{j_1}-\lambda_{j_2}),$$

при этом второе слагаемое в правой части равенства, очевидно, четное, откуда следует указанное свойство.

В [1] мы рассматривали так называемые срезающие и слабо вырожденные преобразования, широко используемые В. Вазовым при изучении систем с одним нулевым собственным числом (см. [8]). Здесь мы также будем использовать подобные преобразования, несколько расширив их класс.

В следующем разделе будут приведены различные примеры. Мы покажем принципы построения срезающих преобразований, с помощью которых системы приводятся к псевдонормальной форме. Станет понятной разница между особыми и неособыми переменными. Кроме того, будет показана схема доказательства теоремы о конечно-гладкой эквивалентности систем рассматриваемого вида.

Примеры

Пример 1

В данном пункте мы покажем технологию приведения линейной (по невырожденным координатам) системы (4) к псевдонормальной форме. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\dot x_1 &= x_1(i\omega + x_1x_2) + f_1(x,y),\\
\dot x_2 &= x_2(-i\omega + x_1x_2) + f_2(x,y),\\
\dot y_1 &= \lambda_1 y_1 + g_{11}(x)y_1 + g_{12}(x)y_2 + g_1(x,y),\\
\dot y_2 &= \lambda_2 y_2 + g_{21}(x)y_1 + g_{22}(x)y_2 + g_2(x,y).
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь переменные x_1 и x_2, y_1 и y_2 попарно комплексно сопряжены, это же верно и для пары λ_1 и λ_2, при этом комплексно сопряженным переменным соответствуют комплексно сопряженные уравнения. Кроме того, $f_l(x,0) = g_{lj}(0) = 0$, $|g_l(x,y)| = o(\|y\|)$, $1 \leqslant l, j \leqslant 2$. Пусть $\lambda_1 = a + \beta i$, $\lambda_2 = a - \beta i$, $a \neq 0$, $\beta > 0$, $\omega > 0$.

В отличие от общего случая (см. систему (3)), мы считаем, что $\varphi(\widetilde r) = 0$, $\widetilde b(\widetilde r) = \widetilde r$. Отметим при этом, что все результаты остаются верными и в общем случае. Согласно теореме 1, без ограничения общности будем считать, что в данной системе ряды Тейлора функций в правых частях являются суммами резонансных мономов. Но резонансные мономы в последних двух уравнениях системы могут быть только линейными по невырожденным переменным, а в первых двух уравнениях

таких резонансных мономов, относящихся к функциям $f_j(x,y)$, $j = 1, 2$, нет совсем. Следовательно, все функции $f_j(x,y)$, $g_j(x,y)$ являются плоскими (то есть они и их производные любого порядка равны нулю в начале координат). Но тогда, поскольку, согласно [6], формальная эквивалентность систем вида (5) означает их C^∞-эквивалентность, то можно считать указанные функции равными нулю. Итак, без ограничения общности будем полагать, что рассматриваемая система имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
\dot x_1 &= x_1(i\omega + x_1x_2),\\
\dot x_2 &= x_2(-i\omega + x_1x_2),\\
\dot y_1 &= \lambda_1 y_1 + g_{11}(x)y_1 + g_{12}(x)y_2,\\
\dot y_2 &= \lambda_2 y_2 + g_{21}(x)y_1 + g_{22}(x)y_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для мономов $x_1^p x_2^q$, входящих в ряд Тейлора функции $g_{12}(x)$, выполняется резонансное равенство $(p-q)i\omega + \lambda_2 = \lambda_1$. Аналогичное равенство верно и для $g_{21}(x)$. Следовательно, если число $\frac{\lambda_1-\lambda_2}{i\omega}$ не является целым, то функции $g_{12}(x)$, $g_{21}(x)$ будут плоскими, и можно считать (см. выше), что они равны нулю. В этом случае система (6) невырожденным преобразованием класса C^∞ приводится к следующей нормальной форме (см., напр., лемму 2 из [5])

$$\begin{aligned}
\dot x_1 &= x_1(i\omega + x_1x_2),\\
\dot x_2 &= x_2(-i\omega + x_1x_2),\\
\dot y_1 &= \lambda_1 y_1 + a x_1x_2y_1,\\
\dot y_2 &= \lambda_2 y_2 + \overline{a} x_1x_2y_2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для простоты мы здесь сохранили обозначения системы (6).

Рассмотрим теперь случай, когда $h = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{i\omega} > 0$ — целое. Функции $g_{lj}(x)$, $1 \leqslant l$, $j \leqslant 2$, можно представить в следующем виде:

$$g_{ll}(x) = d_{ll}(\widetilde r) + \gamma_{ll}(x), \quad g_{lj}(x) = x_l^h d_{lj}(\widetilde r) + \gamma_{lj}(x), \quad l \neq j,$$

где $\widetilde r = x_1x_2$, $\gamma_{ll}(x)$, $\gamma_{lj}(x)$ — плоские функции, $d_{ll}(\widetilde r)$, $d_{lj}(\widetilde r)$ — функции класса C^∞. Согласно [6] все функции $\gamma_{ll}(x)$, $\gamma_{lj}(x)$ можно считать равными нулю. Дополнительно заметим, что $d_{ll}(0) = 0$, $l = 1, 2$.

Ниже мы подробно разберем неособый случай, т.е. когда число h — четное. Для особого случая мы в конце данного раздела ограничимся рассмотрением частного (но важного) примера системы (6).

Обозначим $\widetilde h = \frac{h}{2}$ и сделаем следующую замену переменных

$$y_1 = e^{i\widetilde h\alpha}v_1,\ y_2 = e^{-i\widetilde h\alpha}v_2, \quad \alpha = \arg x_1,\ e^{i\alpha} = \frac{x_1}{\sqrt{\widetilde r}}. \tag{8}$$

Переменная α удовлетворяет уравнению $\dot\alpha = \omega$. Отметим, что данное преобразование невырожденно при $\widetilde r \neq 0$.

Первые два уравнения системы (7) не изменятся, а последние два примут вид

$$\begin{aligned}
\dot v_1 &= av_1 + d_{11}(\widetilde r)v_1 + \widetilde r^{\widetilde h} d_{12}(\widetilde r)v_2,\\
\dot v_2 &= av_2 + \widetilde r^{\widetilde h} d_{21}(\widetilde r)v_1 + d_{22}(\widetilde r)v_2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $a = \operatorname{Re}\lambda_1$, $d_{22}(\widetilde{r}) = \overline{d_{11}(\widetilde{r})}$, $d_{21}(\widetilde{r}) = \overline{d_{12}(\widetilde{r})}$. Переменная $\widetilde{r}$ удовлетворяет уравнению $\dot{\widetilde{r}} = 2\widetilde{r}^2$. В полученной системе рассмотрим два случая. Первый, когда $\widetilde{h} > 1$, и второй, когда $\widetilde{h} = 1$.

В первом случае систему уравнений (9) можно записать в виде

$$\dot{v} = (aE + \widetilde{r}B_1 + \widetilde{r}^2 B_2(\widetilde{r}))v, \quad B_2(\widetilde{r}) \in C^\infty. \tag{10}$$

Здесь B_1 — постоянная диагональная матрица, диагональные элементы которой – это числа $d'_{11}(0)$ и $d'_{22}(0) = \overline{d'_{11}(0)}$. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \dot{v}^1 &= (B_1 + r^1 B_2(r^1))v^1, \\ \dot{r}^1 &= 2r^1. \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку разность чисел $d'_{11}(0)$ и $d'_{22}(0)$ не равняется целому отличному от нуля числу, то у приведенной системы нет резонансных членов. Следовательно, существует невырожденное преобразование

$$v^1 = H(r^1)z^1, \quad H(r^1) \in C^\infty, \tag{12}$$

приводящее систему (11) к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= B_1 z^1, \\ \dot{r}^1 &= 2r^1. \end{aligned}$$

Но тогда такое же преобразование $v = H(\widetilde{r})z$ приводит систему (10) к нормальной форме

$$\dot{z} = (aE + \widetilde{r}B_1)z. \tag{13}$$

Случай $\widetilde{h} > 1$ разобран.

Если $\widetilde{h} = 1$, то система (9) приобретает вид (10), где собственные числа матрицы B_1 могут отличаться на целое не равное нулю число. Если это так, то указанные собственные числа будут вещественными и, соответственно, жорданова форма матрицы B_1 будет также вещественной. Переходя в системе (10) к вещественным координатам и приводя матрицу B_1 к жордановой форме, получаем вещественную систему

$$\dot{u} = (aE + \widetilde{r}\widetilde{B}_1 + \widetilde{r}^2 \widetilde{B}_2(\widetilde{r}))u, \quad \widetilde{B}_2(\widetilde{r}) \in C^\infty, \tag{14}$$

в которой матрица $\widetilde{B}_1$ диагональна, причем разность ее диагональных элементов равна целому числу. В этой ситуации целесообразно использовать срезающие преобразования вида

$$u = P(\widetilde{r})u^1, \tag{15}$$

где $P(\widetilde{r}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{r} \end{pmatrix}$, или $P(\widetilde{r}) = \begin{pmatrix} \widetilde{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, с помощью которых можно добиться того, чтобы у матрицы $\widetilde{B}_1$ в системе (14) не было собственных значений, отличающихся на целое число (см. [8]). Предполагая, что это условие выполнено, с помощью

невырожденного преобразования вида $u = H(\widetilde{r})u^1$ с вещественной матрицей $H(\widetilde{r}) \in C^\infty$ система (14) приводится к виду

$$\dot{u}^1 = (aE + \widetilde{r}B_1)u^1,$$

чем заканчивается рассмотрение случая $\widetilde{h} = 1$. Последняя система называется нами псевдонормальной формой. Отличие от нормальной формы состоит в том, что построенная замена координат, преобразующая исходную систему, является необратимой при $\widetilde{r} = 0$ (вследствие преобразований (8) и (15)).

Пример 2

Рассмотрим теперь особый случай, т.е. когда число $h = 2\omega^{-1}\operatorname{Im}\lambda_1$ — нечетное. Следующая система представляет собой простейший пример такого вида, где $h = 1$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(i\omega + x_1 x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + x_1 x_2), \\ \dot{y}_1 &= \lambda y_1 + x_1 y_2, \\ \dot{y}_2 &= \overline{\lambda} y_2 + x_2 y_1, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\omega = 2\operatorname{Im}\lambda$.

Замена переменных $y_1 = \sqrt{e^{i l \alpha}}v_1$, $y_2 = \sqrt{e^{-i l \alpha}}v_2$ приводит уравнения для невырожденных переменных к виду

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= av_1 + \sqrt{\widetilde{r}}v_2, \\ \dot{v}_2 &= av_2 + \sqrt{\widetilde{r}}v_1, \quad a = R. \end{aligned} \tag{17}$$

Основная неприятность заключается в том, что данное преобразование разрывно в точках, где x_1 является вещественным положительным числом.

Очевидно, что путем перехода к вещественным координатам полученная система приводится к диагональному виду и, следовательно, исходная система приобретает псевдонормальную форму.

Ниже на следующих двух примерах мы представим основные идеи доказательства теоремы о конечно-гладкой эквивалентности систем уравнений рассматриваемого вида.

Пример 3

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(i\omega + x_1 x_2) + f_1(x,y), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + x_1 x_2) + f_2(x,y), \\ \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + g_{11}(x)y_1 + g_{12}(x)y_2 + g_1(x,y), \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + g_{21}(x)y_1 + g_{22}(x)y_2 + g_2(x,y). \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь переменные x_1 и x_2, y_1 и y_2 попарно комплексно сопряжены, это же верно и для чисел λ_1 и λ_2, при этом комплексно сопряженным переменным соответствуют комплексно сопряженные уравнения. Кроме того, $f_l(x,0) = g_{lj}(0) = 0$,

$|g_l(x,y)| = o(\|y\|)$, $1 \leqslant l,\ j \leqslant 2$. Пусть $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$, $a \neq 0$, $b > 0$, $\omega > 0$. Без ограничения общности будем считать, что в данной системе ряды Тейлора функций в правых частях являются суммами резонансных мономов. Но резонансные мономы в последних двух уравнениях системы могут быть только линейными по невырожденным переменным, а в первых двух уравнениях таких резонансных мономов, относящихся к функциям $f_j(x,y)$, $j = 1,2$, нет совсем. Следовательно, все функции $f_j(x,y)$, $g_j(x,y)$ являются плоскими. Но тогда, поскольку, согласно [6], формальная эквивалентность систем вида (18) означает их C^∞-эквивалентность, то можно считать указанные функции равными нулю. Итак, без ограничения общности будем полагать, что рассматриваемая система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot x_1 &= x_1(i\omega + x_1x_2),\\
\dot x_2 &= x_2(-i\omega + x_1x_2),\\
\dot y_1 &= \lambda_1 y_1 + g_{11}(x)y_1 + g_{12}(x)y_2,\\
\dot y_2 &= \lambda_2 y_2 + g_{21}(x)y_1 + g_{22}(x)y_2.
\end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим еще одну систему, аналогичную (19):

$$\begin{aligned}
\dot x_1 &= x_1(i\omega + x_1x_2),\\
\dot x_2 &= x_2(-i\omega + x_1x_2),\\
\dot{\widetilde y}_1 &= \lambda_1 \widetilde y_1 + \widetilde g_{11}(x)\widetilde y_1 + \widetilde g_{12}(x)\widetilde y_2,\\
\dot{\widetilde y}_2 &= \lambda_2 \widetilde y_2 + \widetilde g_{21}(x)\widetilde y_1 + \widetilde g_{22}(x)\widetilde y_2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Предположим, что соответствующие функции из правой части систем (19) и (20) имеют совпадающие N-струи.

Для монома $x_1^p x_2^q$, входящего в ряд Тейлора функции $g_{12}(x)$, выполняется резонансное равенство $(p-q)i\omega + \lambda_2 = \lambda_1$. Аналогичное равенство верно и для $g_{21}(x)$. Следовательно, если число $h = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{i\omega}$ не является целым, то функции $g_{12}(x)$, $g_{21}(x)$ будут плоскими и можно считать (см. выше), что они равны нулю. В этом случае система (19) преобразованием класса C^∞ приводится к нормальной форме в виде полинома третьей степени (см., напр., лемму 2 из [5]). Все это верно и для системы (20). Отсюда следует, что если в рассматриваемом случае 3-струи систем (19) и (20) совпадают, то эти системы C^∞-эквивалентны.

Рассмотрим теперь случай, когда $h = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{i\omega} = \frac{2b}{\omega}$ — целое. Функции $g_{lj}(x)$, $1 \leqslant l$, $j \leqslant 2$ можно представить в следующем виде

$$g_{ll}(x) = d_{ll}(\widetilde r), \quad g_{lj}(x) = x_l^h d_{lj}(\widetilde r), \quad l \neq j,$$

где $\widetilde r = x_1x_2$, $d_{ll}(\widetilde r)$, $d_{lj}(\widetilde r)$ — функции класса C^∞. Отметим также, что $d_{22}(\widetilde r) = \overline{d_{11}(\widetilde r)}$, $d_{21}(\widetilde r) = \overline{d_{12}(\widetilde r)}$.

Сделаем следующую замену переменных

$$y = V(x)z, \quad V(x) = \begin{pmatrix} e^{i\widetilde h\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\widetilde h\alpha} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$\widetilde h = \frac{h}{2}, \quad e^{i\alpha} = \frac{x_1}{r}, \quad \alpha = \arg x_1, \quad r = \sqrt{\widetilde r}.$$

В данном примере мы ограничимся случаем, когда число h четное и, следовательно, нет особых переменных. Уравнения для невырожденных переменных в системе (19) с добавлением к ним уравнения для $\widetilde r$ примут вид

$$\begin{aligned}
\dot z_1 &= az_1 + d_{11}(\widetilde r)z_1 + \widetilde r^{\widetilde h} d_{12}(\widetilde r)z_2,\\
\dot z_2 &= az_2 + \widetilde r^{\widetilde h} d_{21}(\widetilde r)z_1 + d_{22}(\widetilde r)z_2,\\
\dot{\widetilde r} &= 2\widetilde r^2, \quad a = \operatorname{Re}\lambda_1.
\end{aligned} \tag{22}$$

Полученную систему запишем в виде

$$\begin{aligned}
\dot z &= aEz + \widetilde r B_1 z + o(\widetilde r)z,\\
\dot{\widetilde r} &= 2\widetilde r^2,
\end{aligned} \tag{23}$$

где E — единичная матрица.

Если у матрицы B_1 нет собственных чисел, отличающихся на ненулевое целое число, то (см. [1]) система (23) приводится невырожденным преобразованием класса C^∞, удовлетворяющим условию вещественности, к виду

$$\begin{aligned}
\dot w &= aEw + \widetilde r A_1 w,\\
\dot{\widetilde r} &= 2\widetilde r^2,
\end{aligned} \tag{24}$$

где A_1 — постоянная жорданова матрица. Отметим, что элементы матрицы A_1 в данной системе определяются числами $d_{ll}(0)$, $d_{lj}(0)$ из системы (22). Если же у матрицы B_1 собственные числа отличаются на ненулевое целое число, то с помощью определенных срезающих преобразований (см. [1]) можно добиться того, чтобы собственные числа матрицы B_1 стали равными друг другу, а затем с помощью невырожденного преобразования класса C^∞ можно привести систему к виду (24).

Отметим, что при четном h все указанные замены переменных зависят от струи исходной системы некоторой длины P, где P зависит от собственных чисел матрицы B_1. Эти замены являются невырожденными при $x \neq 0$.

Итак, исходная система (19) с помощью замены переменных

$$y = V(x)T(\widetilde r)w \tag{25}$$

приводится к псевдонормальной форме (24), где $V(x)$ — преобразование (21), а $T(\widetilde r)$ является произведением конечного числа множителей, одна часть которых — срезающие преобразования, а другая часть — это невырожденные преобразования класса C^∞.

Отметим, что аналогичное преобразование $\widetilde y = V(x)\widetilde T(\widetilde r)w$ для системы (20) будет отличаться от (25) только указанными выше множителями класса C^∞. При этом данные множители будут иметь совпадающие N-струи.

Рассмотрим теперь преобразование

$$y = R(x)\widetilde y = VT\widetilde T^{-1}V^{-1}\widetilde y \tag{26}$$

Очевидно, что данное преобразование приводит систему (19) к виду (20). Покажем теперь, что при достаточно большом N данное преобразование принадлежит классу C^k с заданным $k > 0$. Соответствующие множители класса C^∞ в преобразованиях T и $\widetilde{T}$ имеют совпадающие N-струи, а все производные срезающих множителей до порядка k в преобразованиях T и $\widetilde{T}^{-1}$ не превосходят по норме величину $Dr^{-\widetilde{L}}$, $D = \mathrm{const}$, $\widetilde{L} > 0$ — число, зависящее от k. Количество этих множителей не превосходит некоторого числа L_1, которое зависит от собственных чисел матриц B_1 в системе (23), которые, в свою очередь, определяются числами $d'_{11}(0)$, $d_{12}(0)$ из системы (22). Нетрудно видеть, что производные до порядка k элементов матрицы $P(x) = T\widetilde{T}^{-1} - E$ по модулю не превосходят величины Dr^{N_1}, где

$$N_1 = N_1(N, k, \widetilde{L}, L_1) = N - L_2(k, \widetilde{L}, L_1), \quad \lim_{N\to\infty} N_1 = \infty.$$

Заметим также, что матрица $V(x)$ при четном h является невырожденной при $x \neq 0$. Производные до порядка k элементов матриц V, V^{-1} (при четном h) по модулю не превосходят величины $Dr^{-(h+k)}$.

Из приведенных оценок следует, что при достаточно большом N преобразование (26) принадлежит классу C^k и, следовательно, утверждение о конечно-гладкой эквивалентности систем (19) и (20) доказано.

Пример 4

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(i\omega + \widetilde{r}),\\
\dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + \widetilde{r}),\\
\dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + x_1 y_2 + \widetilde{r}^N y_3^2,\\
\dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + x_2 y_1 + \widetilde{r}^N y_4^2,\\
\dot{y}_3 &= \lambda_3 y_3,\\
\dot{y}_4 &= \lambda_4 y_4.
\end{aligned} \qquad (27)$$

Здесь переменные x_1 и x_2, y_1 и y_2, y_3 и y_4 попарно комплексно сопряжены, это же верно и для чисел λ_1 и λ_2, λ_3 и λ_4, $\lambda_1 = 2\lambda_3$, $\lambda_1 = a + bi$, $a \neq 0$, $b > 0$, $\omega = 2b$, $\widetilde{r} = x_1 x_2$, $N > 0$ — некоторое целое число. Особыми переменными здесь являются y_1 и y_2.

Рассмотрим одновременно соответствующую линейную по невырожденным переменным систему уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(i\omega + \widetilde{r}),\\
\dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + \widetilde{r}),\\
\dot{\widetilde{y}}_1 &= \lambda_1 \widetilde{y}_1 + x_1 \widetilde{y}_2,\\
\dot{\widetilde{y}}_2 &= \lambda_2 \widetilde{y}_2 + x_2 \widetilde{y}_1,\\
\dot{\widetilde{y}}_3 &= \lambda_3 \widetilde{y}_3,\\
\dot{\widetilde{y}}_4 &= \lambda_4 \widetilde{y}_4.
\end{aligned} \qquad (28)$$

Наша цель состоит в построении для заданного целого $k > 0$ обратимого преобразования класса C^k системы (27) к виду (28), при этом число N будет зависеть от k.

Построение такого преобразования разобьем на три этапа. На первом этапе мы построим линейное преобразование T, приводящее обе системы к псевдонормальной форме. Вследствие наличия особых переменных это преобразование будет разрывным в точках, где x_1 — вещественное положительное число, кроме того, оно будет необратимым при $x = 0$. Во всех остальных точках оно будет невырожденным класса C^∞. Отметим, что в точках разрыва данное преобразование остается обратимым. На втором этапе будет построено преобразование H, приводящее полученную в результате первого этапа псевдонормальную форму системы (27) к псевдонормальной форме системы (28). Третий этап состоит в применении к полученным таким образом системам преобразования T^{-1} (в точках, где $x \neq 0$). Далее мы покажем, что итоговое преобразование $R = T^{-1}HT$, доопределенное до тождественного при $x = 0$, будет невырожденным, обратимым, конечно-гладким преобразованием класса C^k (при $2N > k + 3$), приводящим систему (27) к виду (28).

При следующих преобразованиях переменные x_1, x_2, y_3, y_4, $\widetilde{y}_3$, $\widetilde{y}_4$ и соответствующие им уравнения меняться не будут, поэтому для простоты эти уравнения мы будем опускать. Приступим к реализации первого этапа намеченного плана.

Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
&Y = V(\alpha)Z, \quad \widetilde{Y} = V(\alpha)\widetilde{Z}, \quad Y^T = (y_1, y_2), \quad \widetilde{Y}^T = (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2),\\
&Z^T = (z_1, z_2), \quad \widetilde{Z}^T = (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2), \quad V(\alpha) = diag\,(e^{i\beta}, e^{-i\beta}),\\
&\beta = \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = \arg x_1.
\end{aligned}$$

В данном примере T — знак транспонирования.

Соответствующие уравнения систем (27) и (28) примут вид

$$\dot{Z} = A_1 Z + Q, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a & \sqrt{\widetilde{r}} \\ \sqrt{\widetilde{r}} & a \end{pmatrix}, \quad Q = \widetilde{r}^N F, \qquad (29)$$

$$\dot{\widetilde{Z}} = A_1 \widetilde{Z}, \qquad (30)$$

$$a = \mathrm{Re}\,\lambda_1, \quad F^T = (F_1, F_2), \quad F_1 = e^{-i\beta} y_3^2, \quad F_2 = e^{i\beta} y_4^2.$$

Следующие преобразования: $Z = BW$, $\widetilde{Z} = B\widetilde{W}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $\widetilde{r} = r^2$ приводят полученные системы к псевдонормальной форме

$$\dot{W} = A_2 W + G, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a + r & 0 \\ 0 & a - r \end{pmatrix}, \quad G = r^{2N} B^{-1} F, \qquad (31)$$

$$\dot{\widetilde{W}} = A_2 \widetilde{W}. \qquad (32)$$

Первый этап нашего плана завершен. Переходим ко второму этапу.

Прежде всего заметим, что, с учетом того, что переменная β удовлетворяет уравнению $\dot\beta = \omega/2 = b$, $b = \operatorname{Im}\lambda_1$, получаем, что производная $\dot U$ функции $U = (U_1, U_2)^T = B^{-1}F(\beta, \widetilde{y}_3, \widetilde{y}_4)$ в силу системы

$$\dot\beta = \omega/2, \quad \dot{\widetilde{y}}_j = \lambda_j \widetilde{y}_j, \quad j = 3, 4$$

удовлетворяет уравнению $\dot U = aU$.

Цель данного этапа состоит в построении преобразования, приводящего систему (31) к виду (32).

Прямая проверка показывает, что существуют такие функции $c_j(r) = o\left(r^{2N-2}\right)$, $j = 1, 2$ класса C^∞, что в результате преобразования $W = W^1 + C(r)U$, $C(r) = diag(c_1(r), c_2(r))$ система (31) примет вид

$$\dot W^1 = A_2 W^1 + h(r)U,$$

где $h(r) = diag(h_1(r), h_2(r))$ — плоская матрица (то есть элементами ее являются плоские функции). Чтобы сделать эту матрицу равной нулю, надо провести еще одно дополнительное преобразование $W^1 = W^2 + g(r)U$, $g(r) = diag(g_1(r), g_2(r))$, где диагональные элементы матрицы $g(r)$ являются плоскими решениями уравнений $g_j'(r)r^3 = (-1)^{j+1} r g_j(r) + h_j(r)$, $j = 1, 2$. У данных уравнений есть искомые плоские решения (см., напр., [9, стр. 49-50]).

Таким образом, мы получили преобразование $W = \widetilde{W} + H^*, H^* = C_1(r)U$, $C_1(r) = C(r) + g(r) = o\left(r^{2N-2}\right)$, приводящее систему (31) к виду (32).

В результате двух этапов мы построили следующие преобразования $Y = V(\alpha)BW$, $\widetilde{Y} = V(\alpha)B\widetilde{W}$, $W = \widetilde{W} + H^*$.

Приступаем к третьему этапу. Из предыдущего следует, что преобразование

$$Y = \widetilde{Y} + V(\alpha)BH^* \tag{33}$$

приводит систему (27) к виду (28). Покажем, что оно является обратимым и при $2N > k + 3$ принадлежит классу C^k. Верны следующие равенства

$$V(\alpha) = \xi V_1(\alpha), \quad \xi = e^{i\beta}, \quad V_1 = diag(1, e^{-i\alpha}), \quad H^* = C_1(r)U, \quad U = B^{-1}F,$$
$$F^T = (e^{-i\beta}\widetilde{y}_3^2, e^{i\beta}\widetilde{y}_4^2) = e^{-i\beta}(\widetilde{y}_3^2, e^{i\alpha}\widetilde{y}_4^2), \quad U = \xi^{-1}B^{-1}F^*, \quad F^* = (\widetilde{y}_3^2, e^{i\alpha}\widetilde{y}_4^2)^T.$$

Отсюда следует, что $H^* = \xi^{-1}C_1(r)B^{-1}F^*$ и $V(\alpha)BH^* = V_1(\alpha)BC_1(r)B^{-1}F^*$, из чего видно, что преобразование (33) обратимо, невырождено и принадлежит классу C^k при $2N > k + 3$. Таким образом, доказана конечно-гладкая эквивалентность систем (27) и (28).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Самовол В.С. «О новых резонансах и нормальной форме автономной системы с одним нулевым корнем», *Матем. заметки.* 88:1 (2010), 63-77.

[2] Брюно А.Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений,* Наука, М., 1979.

[3] Брюно А.Д. «Аналитическая форма дифференциальных уравнений», *Тр. ММО,* 25 (1971), 119-262.

[4] Самовол В.С. «Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки», *Тр. ММО,* 44 (1982), 213-234.

[5] Самовол В.С., «Конечно-гладкая нормальная форма автономной системы с двумя чисто мнимыми корнями», *Матем. заметки.* 80:2 (2006), 270-281.

[6] Белицкий Г.Р. «Гладкая эквивалентность ростков векторных полей», *Функциональный анализ и его приложения,* 20:4 (1986), 1-8.

[7] Брюно А.Д., Петрович В.Ю. «Нормальные формы системы ОДУ», Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 18 (2000).

[8] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений,* Мир, М., 1968.

[9] Кузнецов А.Н. «Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений», *Функциональный анализ и его приложения,* 6:2 (1972), 41-51.