УДК 519.612:632.4

Т. С. Якушкина[1]

О РАСПРЕДЕЛННОЙ РЕПЛИКАТОРНОЙ СИСТЕМЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ БИМАТРИЧНОЙ ИГРЕ

Данная работа посвящена исследованию репликаторных систем типа реакция-диффузия в биматричном случае. Один из подходов, предложенный в литературе для формализации и анализа распределенных репликаторных систем с одной матрицей, обобщается для случая асимметричных конфликтов. Приводится теоретико-игровая интерпретация задачи, устанавливается связь между динамическими свойствами систем и их игровыми характеристиками. Рассматривается устойчивость пространственно-однородного решения распределенной системы, доказывается теорема о сохранении устойчивости. Полученные результаты иллюстрируется на классических двумерных примерах в распределенном случае.

Ключевые слова: эволюционная теория игр, системы реакция-диффузия, репликаторные уравнения.

1. Введение.

Модели эволюционной теории игр находят широкое применение во многих областях, среди которых выделяют две основные категории [13]: биологические и экономические. Одним из самых распространенных и универсальных инструментов описания эволюционных процессов являются репликаторные уравнения, использующиеся, в биологическом контексте, в популяционной генетике [10], в теории предбиологической эволюции [7], [8]. Подавляющее большинство исследований эволюции кооперации также основаны на репликаторной динамике [9], [11]. При этом один из стандартных способов записи репликаторных уравнений [2] имеет вид

$$\dot{v}_i(t) = v_i(f_i(\mathbf{v}) - f^l(\mathbf{v})), i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\mathbf{v} = (v_1(t), \ldots, v_n(t))$ – вектор, описывающий состояние системы (например, распределение вероятностей выбора стратегий в игре в нормальной форме). Взаимодействие элементов системы формирует функции приспособленности (фитнеса) $f_i(\mathbf{v})$ отдельных элементов, а выражение $f^l(\mathbf{v})$ является усредненной характеристикой этого взаимодействия. Многие модели используют матричную форму записи для описания взаимодействия: если A – матрица выплат, $f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$.

[1]Факультет ВМК МГУ, аспирант; Факультет бизнес-информатики, Научно-исследовательский университет "Высшая школа экономики ассистент E–mail: tyakushkina@hse.ru

Основное допущение, которое позволяет использовать сосредоточенные репликаторные системы вида (1), – остутствие пространственной зависимости в системе. Но предположение, что все элементы взаимодействуют с равной вероятностью друг с другом, зачастую не характерно для реальных биологических систем. Существуют различные подходы, позволяющие учесть пространственную структуру в репликаторных уравнениях: использование пространственные решеток [1],[12], случайных графов [3] и систем реация-диффузия [5],[6]. Большинство работ, посвященных исследованию распределенных репликаторных систем, рассматривают модификации системы (1) с одной матрицей. В данной работе рассматривается биматричный случай репликаторных систем, для анализа которых выбран подход, предложенный в [4]. Таким образом, исследуется устойчивость распределенных репликаторных систем при условии глобального регулирования для задач с двумя матрицами, выводится связь меду теоретико-игровыми понятиями и понятием устойчивости при учете пространства, и демонстрируется существование пространственно-неоднородных решений.

2. Репликаторные системы общего вида: биматричные игры. В одной из возможных биологических постановок задачи рассматривается система взаимодействия двух популяций I и II, каждая из которых состоит из n типов. Если величины x_i, y_j обозначают абсолютную численность отдельных типов, то возможные состояния системы описываются наборами $\mathbf{x} = (x_1, \dots x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n_+$. При этом $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ – дифференцируемы по вещественной переменной $t > 0$, имеющей смысл времени. Полагается, что попарное взаимодействие типов с номерами i и j, относящихся к разным популяциям, происходит случайным образом и характеризуется матрицами взаимодействия A и B с постоянными элементами $\{a_{ij}\}, \{b_{ji}\} (i, j = 1, \dots, n)$. Интенсивность роста абсолютной численности отдельного типа пропорциональна эволюционному успеху этого типа, поэтому закон воспроизводства популяций запишется в виде

$$\dot{x}_i = x_i(A\mathbf{y})_i; \quad \dot{y}_j = y_j(B\mathbf{x})_j; \tag{2}$$

где $(A\mathbf{y})_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k$, $(B\mathbf{x})_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} x_k$. Считая суммарную численность каждой из популяций достаточно большой постоянной величиной, введем частоты (относительные численности) типов:

$$u_i = \frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k}, \quad v_j = \frac{y_j}{\sum_{k=1}^n y_k}; \quad i, j = 1, \dots, n; \tag{3}$$

тогда вектор-функции $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$, принадлежат симплексам вида

$$S_n = \left\{ \mathbf{s}(t) : \sum_{i=1}^n s_i(t) = 1, s_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Используя выражения (2) и дифференцируя (3), получим биматричную репликаторную систему:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= u_i\left((A\mathbf{v})_i - (\mathbf{u}, A\mathbf{v})\right); \\ \dot{v}_j &= v_j\left((B\mathbf{u})_j - (\mathbf{v}, B\mathbf{u})\right); \quad i,j = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь под выражениями $(A\mathbf{v})_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}v_k$; $((B\mathbf{u})_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}u_k$ понимается приспособленность типа, называемая *фитнесом*. Тогда средняя приспособленность (фитнес) популяций I и II представляется в виде: $(\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} u_i(A\mathbf{v})_i; (\mathbf{v}, B\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} v_i(B\mathbf{u})_i$.

Система (4) согласуется с одним из базовых принципов дарвинизма: репродуктивный успех индивида или группы зависит от преимущества собственной приспособленности перед средней приспособленностью по популяции. Приведем основные характеристики репликаторных систем типа (4), которые потребуются в дальнейшем при исследовании распределенных систем.

- Точки покоя системы (4) определяются из уравнений:

$$(A\mathbf{v})_1 = (A\mathbf{v})_2 = \ldots = (A\mathbf{v})_n = \beta_1;$$

$$(B\mathbf{u})_1 = (B\mathbf{u})_2 = \ldots = (B\mathbf{u})_n = \beta_2.$$

- Матрица Якоби в точке покоя в общем виде [10]:

$$J = \begin{bmatrix} \Theta & C \\ D & \Theta \end{bmatrix}.$$

  Здесь под Θ понимаются нулевые подматрицы размера $(n-1)\times(n-1)$ (после исключения одной из переменных на S_n) блочной матрицы, под C, D – подматрицы некоторых постоянных коэффициентов. Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать размер этих подматриц равным n.

- Характеристический многочлен системы имеет вид

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{n-m} det(\lambda^2 I - DC) = det(\lambda^2 I - DC).$$

- Если λ – собственное значение, то и $-\lambda$ – собственное значение. Используем этот факт в дальнейшем при анализе устойчивости положения равновесия (из которого следует, например, что в двумерном случае система не может иметь точку покоя типа фокус или узел).

2.1 Репликаторные системы в теории игр. Теоретико-игровая интерпретация системы (2) основана на игре в нормальной форме с двумя игроками, имеющими разные конечные наборы стратегий и разные матрицы выплат A, B (игры такого типа называют биматричными). В такой постановке задачи n имеет смысл числа чистых стратегий I и II игрока, а $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_n$ – смешанные стратегии игроков. Доминирование одного типа в популяции соответствует чистым стратегиям, возможное сосуществование нескольких типов одновременно – смешанным. Заметим, что в случае $A = B$ игра становится симметричной.

Далее будем рассматривать систему в виде (4), учитывая, что равновесие по Нэшу в биматричной игре с матрицами выплат A, B является точкой покоя системы (4) (обратное, вообще говоря, неверно)[2]. Будем полагать, что пара $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) \in S_n \times S_n$ – равновесие по Нэшу, если $\forall \mathbf{u} \in S_n \quad (\mathbf{u}, A\hat{\mathbf{v}}) \leq (\hat{\mathbf{u}}, A\hat{\mathbf{v}})$; $\forall \mathbf{v} \in S_n \quad (\mathbf{v}, B\hat{\mathbf{u}}) \leq (\hat{\mathbf{v}}, B\hat{\mathbf{u}})$. Заметим,что множество строгих равновесий по Нэшу состоит из чистых стратегий, то есть из углов соответствующих симплексов S_n.

3. Распределенная репликаторная система.

Рассмотрим репликаторную систему с диффузией:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= u_i\left((A\mathbf{v})_i - f^A(t)\right) + d_i^A \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}; \quad i = 1, \ldots, n \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} &= v_j\left((B\mathbf{u})_j - f^B(t)\right) + d_j^B \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2}; \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

Где d_i^A, d_j^B – положительные коэффициенты диффузии. Для данной системы $u_i = u_i(x,t)$, $v_i = v_i(x,t)$, где x – пространственная переменная, $t > 0$, $f^A(t), f^B(t)$ – фитнесы каждого игрока. Исходя из биологической и теоретико-игровой предпосылок модели, имеет смысл рассматривать ограниченную область определения пространственной переменной: $D \in \mathbb{R}^k$ с кусочно-гладкой границей Γ, $x \in D$ ($k = 1, 2$ или 3) Положим, что $u_i(x,t), v_i(x,t)$ дифференцируемы по t при любых $x \in D$ и принадлежат пространству Соболева $W_2^1(D)$ при $D \in \mathbb{R}^1$ или W_2^2 при $D \in \mathbb{R}^2 (D \in \mathbb{R}^3)$ как функции от x при фиксированном времени. Составим условие, аналогичное условию постоянства частот для сосредоточенной системы (4):

$$\forall t : \sum_{i=1}^{n} \int_D u_i(x,t)dx = 1; \quad \sum_{i=1}^{n} \int_D v_i(x,t)dx = 1. \tag{6}$$

Фитнесы обоих популяций тогда имеют вид $f^A = \int_D (u, Av)dx; \quad f^B = \int_D (v, Bu)dx; \quad x \in D$. На границе Γ множества D зададим граничное условие – однородное условие Неймана: $\frac{\partial u_i}{\partial n}\Big|_{x\in\Gamma} = 0; \quad \frac{\partial v_i}{\partial n}\Big|_{x\in\Gamma} = 0$; где n – внешняя нормаль к границе множества. В момент времени $t = 0$ заданы условия Коши: $u(x,0) = \phi^A(x); \quad v(x,0) = \phi^B(x)$. Введем обозначение $D_t = D \times [0;\infty)$, и $S_n(D_t)$ – для множества неотрицательных вектор-функций

$\mathbf{y}(x,t)$ с нормой элементов:

$$\|y_i\|_S = \max_{t\geq 0}\left\{\|y_i(x,t)\|_{W_2^k} + \|\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t}\|_{W_2^k}\right\}$$

Решение поставленной начально-краевой задачи будем искать в классе $S_n(D_t)$, удовлетворяющих выражениям:

$$\int_0^\infty\int_D \frac{\partial u_i}{\partial t}\eta(x,t)dxdt = \int_0^\infty\int_D u_i[(Av)_i - f^A(t)]\eta(x,t)dxdt - d_i^A\int_0^\infty\int_D(\nabla u_i,\nabla\eta)dxdt;$$

$$\int_0^\infty\int_D \frac{\partial v_i}{\partial t}\eta(x,t)dxdt = \int_0^\infty\int_D v_i[(Bu)_i - f^B(t)]\eta(x,t)dxdt - d_i^B\int_0^\infty\int_D(\nabla v_i,\nabla\eta)dxdt;$$

выполненным при любых дифференцируемых по t функциях $\eta(x,t)$ с компактным носителем на $[0,+\infty)$, принадлежащих к соответствующему пространству Соболева по x.

В качестве положений равновесия динамической системы (5) рассмотрим решения $w^A(x), w^B(x)$ уравнений:

$$\begin{aligned} d_i^A\triangle w^A(x) + w_i^A\left((Aw^B)_i - f^A\right) &= 0; \quad i=\overline{1,n};\\ d_j^B\triangle w^B(x) + w_j^B\left((Bw^A)_j - f^B\right) &= 0; \quad j=\overline{1,n}; \end{aligned} \tag{7}$$

с граничными условиями $\dfrac{\partial w_i^A}{\partial n} = 0; \dfrac{\partial w_i^B}{\partial n} = 0;$ и условиями баланса $\sum_{i=1}^n\int_D w_i^\tau dx = 1; \quad \tau = A,B$. Множество неотрицательных функций $w_i^\tau(x), \tau = A,B$, принадлежащих соответствующему пространству Соболева при $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих последнему условию, будем обозначать $S_n(D)$. Средние фитнесы в этом случае постоянны, т.к. принимают вид $f^A = \int_D(w^A, Aw^B)dx; \quad f^B = \int_D(w^B, Bw^A)dx$. Точки покоя исходной системы без диффузии удовлетворяют стационарным уравнениям системы (7), такие решения будем называть пространственно однородными решениями системы (7). Причем обратное тоже верно: пространственно однородные решения системы (7) также будут точками покоя исходной системы (4).

Для анализа устойчивости стационарных решений системы (5)введем определение:

Определение 1. *Будем говорить, что стационарное решение системы (7)* $\boldsymbol{w}^*(x) = (\boldsymbol{w}^{A*}, \boldsymbol{w}^{B*}) \in I_n\times I_n$ *устойчиво по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая окрестность*

$$U^\delta = \left\{(\boldsymbol{w}^A(x), \boldsymbol{w}^B(x)) \in I_n\times I_n, \quad \sum_{i=1}^n\|w_i^{\tau*}(x) - w_i^\tau(x)\|_{W_2^k} < \delta^2, \tau = A,B,\right\}$$

пары $(\boldsymbol{w}^{A*}(x), \boldsymbol{w}^{B*}(x))$, *что при любых начальных условиях системы (5), принадлежащих окрестности* U^δ, *будет выполнено*

$$\sum_{i=1}^n\|u_i(x,t) - w_i^{A*}(x)\|_S \leqslant \varepsilon^2; \sum_{i=1}^n\|v_i(x,t) - w_i^{B*}(x)\|_S \leqslant \varepsilon^2;$$

при любом $t \geqslant 0$. Здесь под $u_i(x,t), v_i(x,t)$ понимается вектор-функция – соответствующее решение системы (5) с начальными условиями $w_i^A(x), w_i^B(x), i = \overline{1,n}$.

Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения

$$\triangle\psi(x) + \lambda\psi(x) = 0, \quad x \in D, \quad \partial_n\psi|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{8}$$

При $\psi_0(x) = 1$; $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ – полная система в пространстве Соболева W_2^1, такая, что

$$\langle\psi_i(x), \psi_j(x)\rangle = \int_D \psi_i(x)\psi_j(x)dx = \delta_{ij}; \tag{9}$$

где под δ_{ij} подразумевается символ Кронекера. Соответствующие собственные значения удовлетворяют условию: $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_i \leqslant \ldots \leqslant \lim_{i\to\infty} = +\infty$.

Теорема 1. *Пусть пара $(u^*, v^*) \in \mathrm{int}S_n \times S_n$ является устойчивым по Ляпунову положением равновесия системы (2), тогда для любых положительных значений d_i^A, d_i^B, $(i = 1, \ldots, n)$ это положение дает пространственно однородное стационарное решение системы (5), устойчивое в смысле определения (1).*

Итак, пусть (u^*, v^*) – положение равновесия исходной системы без диффузии (4). Решение системы (5) будем искать в виде:

$$u_i(x,t) = u_i^* + w_i^A(x,t); \quad v_i(x,t) = v_i^* + w_i^B(x,t); \tag{10}$$

где

$$w_i^A(x,t) = C_0^i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^i(t)\psi_k(x); \quad w_i^B(x,t) = E_0^i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} E_k^i(t)\psi_k(x);$$

а в качестве $C_k^i(t), E_k^i(t)$ берутся гладкие функции, стремящиеся к нулю при $t \to \infty$, при этом $\psi_i, \forall i$ удовлетворяют (8) и (9). Используя условия Коши, получим:

$$u_i(x,0) = u_i^* + w_i^{A0}(x) = \phi_i^1(x); \quad v_i(x,0) = v_i^* + w_i^{B0}(x) = \phi_i^2(x); \tag{11}$$

где $w_i^{A0}(x) = w_i^A(x,0)$; $w_i^{B0}(x) = w_i^B(x,0)$; $i = 1, \ldots, n$. При этом учтем условие постоянства частот:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^* = 1; \sum_{i=1}^{n} v_i^* = 1, \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} C_0^i(t) = 0; \sum_{i=1}^{n} E_0^i(t) = 0. \tag{12}$$

1. Сделаем первый шаг: положим $k = 0$ и подставим решение в виде (10) в систему (5).

$$\frac{d}{dt}\left[u_i^* + C_0^i(t)\right] = \left[u_i^* + C_0^i(t)\right]\left[(A(v^* + E_0(t)))_i - (u^* + C_0(t), A(v^* + E_0(t)))\right].$$

В положении равновесия (u_i^*, v_i^*) выполнено $(Av^*)_i - (u^*, Av^*) = 0,$. Более того:

$$(Av^*, C_0) = \sum_{i=1}^{n} C_0^i (Av^*)_i = (Av^*, v^*) \sum_{i=1}^{n} C_0^i = 0.$$

Оставляя только линейные члены, получим

$$\frac{d}{dt} C_0^i(t) = u_i^* \left((A\bar{E}_0)_i - (A^T u^*, \bar{E}_0) \right); \tag{13}$$

аналогично для коэффициента E_0 :

$$\frac{d}{dt} E_0^i(t) = v_i^* \left((B\bar{C}_0)_i - (B^T v^*, \bar{C}_0) \right); \tag{14}$$

где $\bar{E}_0 = (E_0^1, \dots E_0^n), \bar{C}_0 = (C_0^1, \dots C_0^n)$. В системе, составленной из уравнений (13) и (14), n–й элемент можно исключить с помощью (12). Якобиан исходной системы без диффузии (4), взятый в точке (u^*, v^*), совпадает с матрицей этой системы:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix};$$

где $C = \{c_{ij}\} : c_{ij} = a_{ij} u_i^* - u_i^* (Au^*)_i; \quad D = \{d_{ij}\} : d_{ij} = b_{ij} v_i^* - v_i^* (Bv^*)_i$. Таким образом, тривиальное положение равновесия системы (13, 14) также будет устойчиво.

2. Умножая уравнения системы (5) на функции $\psi_k(x)$, и оставляя только линейные члены при подстановке (10), получим:

$$\frac{d}{dt} C_k^i(t) = u_i^* (A\bar{E}_k)_i + \psi_k d_i^A \Delta \sum_{p=1}^{n} C_p^i \psi_p.$$

Учтем выражение (8):

$$\frac{d}{dt} C_k^i(t) = u_i^* (A\bar{E}_k)_i - \lambda_k d_i^A C_k^i(t); \tag{15}$$

где λ_k – собственное значение задачи (8). Выпишем и уравнение для E_k^i.

$$\frac{d}{dt} E_k^i(t) = v_i^* (B\bar{C}_k)_i - \lambda_k d_i^B E_k^i(t); \tag{16}$$

Таким образом, матрица Якоби системы, составленной из уравнений (15),(16), имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & A^* \\ B^* & \Lambda_2 \end{bmatrix}; \tag{17}$$

где $\Lambda_1 = \{-d_i^A \lambda_k \delta_{ij}\}; \Lambda_2 = \{-d_i^B \lambda_k \delta_{ij}\}; \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad A^* = \{u_i^* a_{ij}\}; B^* = \{v_i^* b_{ij}\}$.

3. Для систем (15,16) получаем вид характеристического уравнения:

$$|\Lambda^2 - u^* v^* AB| = 0; \tag{18}$$

при элементах Λ^2, равных $\lambda_k^2(d_i^A - \mu)(d_i^A - \mu)$ на диагонали и нулю вне ее, μ – собственные числа (15,16). И выражение для следа якобиана (17) этой системы:

$$TrJ = -\lambda_k \Sigma_i (d_i^A + d_i^B) < 0. \tag{19}$$

4. Используя метод возмущений [17] и обозначая за ε коэффициент возмущения, разложим собственные числа и собственные функции возмущенной задачи в ряд

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \ldots; \psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \ldots.$$

Заметим, что подстановка $w_i^\tau = \varepsilon\omega_i^k; \quad \tau = 1, 2;$ не изменит вида уравнений (13) – (16). Тогда, получим условие на первое собственное значение (J – матрица Якоби (17)):

$$\lambda_1 = (J\psi_0, w_0)\,.$$

□ **4. Существование пространственно неоднородных решений.** Рассмотрим систему (**??**), представив ее в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dw_i^A}{dx} &= p_i(x); \\ \dfrac{dp_i}{dx} &= -\frac{1}{d_i^A} w_i^A \left((Aw^B)_i - f^A\right); \\ \dfrac{dw_i^B}{dx} &= q_i(x); \\ \dfrac{dq_i}{dx} &= -\frac{1}{d_i^B} w_i^B \left((Bw^A)_i - f^B\right); \end{cases} \tag{20}$$

где $f^A = \int_D (w^A, Aw^B); \quad f^B = \int_D (w^B, Bw^A)$. Причем $p_i(0) = q_i(0) = 0 \Rightarrow w_i^k = 0; k = 1, 2; i = \overline{1, n}$.

Точка покоя такой системы определяется из уравнений:

$$p_i^* = 0, q_i^* = 0; \quad (Aw^B)_i = (w^A, Aw^B); (Bw^A)_i = (w^B, Bw^A); \quad i = \overline{1, n}.$$

Более того, эта точка будет являться точкой покоя и для исходной системы без диффузии. Рассмотрим матрицу Якоби в точке $(0, w^{A*}, 0, w^{B*})$.

$$J = \begin{bmatrix} \Theta & I & \Theta & \Theta \\ \Theta & \Theta & -C^{d^A} & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & I \\ -D^{d^B} & \Theta & \Theta & \Theta \end{bmatrix}.$$

Матрица составлена из блочных элементов размера $n \times n$, Θ – нулевой блок, I – единичный, C^{d^A}, D^{d^B} совпадают с введенными ранее блоками C, D с точностью до деления на соответствующие коэффициенты диффузии. Отсюда можно получить характеристическое уравнение этой системы.

$$det(J - \lambda I) = (-\lambda)^{4n} - \mid D^{d^2} \mid \cdot \mid C^{d^1} \mid .$$

Таким образом, в зависимости от знака произведения определителей исходной задачи, можем получить либо чисто мнимые (если знак положителен), либо действительные собственные значения.

Введем некоторые специальные множества в фазовом пространстве. Обозначим за Σ множество, на котором p, q обращаются в ноль:

$$\Sigma = \{p \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^n; \quad p_i = 0; q_i = 0; i = \overline{1, n}\}.$$

Гиперплоскость, на которой w^A, w^B совпадает с u^*, v^*:

$$\Pi = \{(w^A, w^B) : w_i^A = u_i^*, w_i^B = v_i^*; i = \overline{1, n}\}.$$

$$U_- = \{(w^A, w^B) : (Aw^B)_i - f^A < 0\}; \quad V_- = \{(w^A, w^B) : (Bw^B)_i - f^B < 0\};$$
$$U_+ = \{(w^A, w^B) : (Aw^B)_i - f^A > 0\}; \quad V_+ = \{(w^A, w^B) : (Bw^A)_i - f^B > 0\}.$$

Пусть значение x увеличивается от нуля, так как $x = 0 : p(0) = q(0)$, то начало фазовой траектории лежит на гиперплоскости Σ. Пусть $w(0) = (w^A(0), w^B(0)) \in U_- \bigcap V_-$. Отсюда получим, что $p_i(x), q_i(x)$ возрастает по x в окрестности нуля $\forall i$. Таким образом, $p_i(x) > 0, q_i(x) > 0, \forall i$, что означает рост w_i^A, w_i^B. Если $(Aw^B(0))_i < (Aw^B(x))_i$; $(Bw^A(0))_i < (Bw^A(x))_i$; то $(Aw^B)_i - f^A; (Bw^A)_i - f^B$ возрастают при увеличении x. Продолжая аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что такой характер роста будет верным при всех x. Следовательно, найдется такая пара (w^A, w^B), что будет достигнута гиперплоскость Π, после чего, в силу непрерывности функций, $(w^A, w^B) \in U_+ \bigcap V_+$ и $p_i(x), q_i(x)$ начнут убывать. Но тогда найдется такое x_i^*, что повторно будет достигнута гиперплоскость Σ. В зависимости от $\Delta x_i = x_i^* - x_{\min}, x_{\min} = \min\{x_1^*, x_2^; \ldots x_n^*\}$, можно найти такие коэффициенты диффузии, что $x_i^* = 1, \forall i = \overline{1, n}$. Но аналогичным образом можно уменьшить значение вдвое: фазовая траектория совершит цикл и попадет на гиперплоскость Π. Продолжая уменьшать выбранную величину, получим, что (7) имеет пространственно неоднородное решение.

5. Динамика распределенных репликаторных уравнений

Определение 2. *Будем говорить, что пара* $(\hat{w}^A(x), \hat{w}^B(x)) \in S_n(\Omega) \times S_n(\Omega)$ *является распределенным равновесием по Нэшу, если*

$$\int_\Omega \big(u(x,t), A\hat{w}^B(x)\big)\, dx \le \int_\Omega \big(\hat{w}^A(x), A\hat{w}^B(x)\big)\, dx;$$

$$\int_\Omega \left(v(x,t), B\hat{w}^A(x)\right) dx \le \int_\Omega \left(\hat{w}^B(x), B\hat{w}^A(x)\right) dx;$$

$\forall (u(x,t), v(x,t)) \in S_n(\Omega) \times S_n(\Omega): \quad u \ne \hat{w}^1; v \ne \hat{w}^2.$

Тогда если $(\hat{w}^A, \hat{w}^B)$ – равновесие по Нэшу в смысле распределенной системы, то оно является и равновесием по Нэшу в обычном смысле:

$$\int_\Omega (u(x,t), A\hat{w}^B(x))dx = (\bar{u}(t), A\hat{w}^B); \quad \bar{u}_i(t) = \int_\Omega u_i(x,t)dx.$$

$$\int_\Omega (v(x,t), B\hat{w}^A(x))dx = (\bar{v}(t), B\hat{w}^A); \quad \bar{v}_i(t) = \int_\Omega v_i(x,t)dx.$$

Так как

$$\forall t: \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_i(x,t)dx = 1; \quad \sum_{i=1}^n \int_\Omega v_i(x,t)dx = 1;$$

$$\Rightarrow \bar{u}(t) \in S_n; \bar{v}(t) \in S_n.$$

Откуда

$$(\bar{u}, A\hat{w}^B) \le (\hat{w}^A, A\hat{w}^B);$$

$$(\bar{v}, B\hat{w}^A) \le (\hat{w}^B, B\hat{w}^A);$$

$$\Rightarrow$$

$(\hat{w}^A, \hat{w}^B)$ — равновесие по Нэшу в обычном смысле.

Теорема 2. *Если $(\hat{w}^A(x), \hat{w}^B(x)) \in int(S_n \times S_n)$ является устойчивым по Ляпунову решением системы (5) тогда $(\hat{w}^A(x), \hat{w}^B(x))$ – распределенное равновесие по Нэшу.*

Пара $(\hat{w}^A(x), \hat{w}^B(x))$ по определению устойчива по Ляпунову:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \begin{array}{rcl} U_1^\delta & = & \{w(x) \in S_n(\Omega) : \sum_{i=1}^n \|\hat{w}_i^A - w_i(x)\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \delta\}; \\ U_2^\delta & = & \{w(x) \in S_n(\Omega) : \sum_{i=1}^n \|\hat{w}_i^B - w_i(x)\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \delta\} \end{array}$$

– окрестности $\hat{w}^A(x), \hat{w}^B(x)$, такие что $\forall t \ge 0$

$$\sum_{i=1}^n \|u_i(x,t) - \hat{w}_i^1(x)\|^2 \le \varepsilon^2;$$

$$\sum_{i=1}^n \|v_i(x,t) - \hat{w}_i^2(x)\|^2 \le \varepsilon^2.$$

Докажем от противного. Пусть $(\hat{w}^1(x), \hat{w}^2(x))$ не является равновесием по Нэшу в смысле распределенной системы. Учитывая непрерывность скалярного произведения, $\exists i$ и $\exists \xi_1, \xi_2 = const > 0:$

$$\int_\Omega (Av(x,t))_i dx - \int_\Omega (u(x,t), Av(x,t))\, dx > \xi_1;$$

$$\int_\Omega (Bu(x,t))_i dx - \int_\Omega (v(x,t), Bu(x,t))\, dx > \xi_2.$$

Тогда для любых элементов из окрестности $(\hat{w}^1(x), \hat{w}^2(x))$ выполнено (исходя из системы без диффузии)

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\overline{ln(u_i(t))} & = & \int_\Omega ((Av(x,t))_i - (u(x,t), Av(x,t)))\, dx + d_i^A \int_\Omega \frac{\Delta u_i(x,t)}{u_i(x,t)} dx; \\ \frac{d}{dt}\overline{ln(v_i(t))} & = & \int_\Omega ((Bu(x,t))_i - (v(x,t), Bu(x,t)))\, dx + d_i^B \int_\Omega \frac{\Delta v_i(x,t)}{v_i(x,t)} dx; \end{array}$$

где $\overline{ln(u_i(t))} = \int_\Omega ln(u_i(x,t))dx$; $\overline{ln(v_i(t))} = \int_\Omega ln(v_i(x,t))dx$. Используем граничное условие Неймана:

$$\int_\Omega \frac{\Delta u_i(x,t)}{u_i(x,t)} dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{1}{u_i^2(x,t)} \left(\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k}\right)^2 dx \geq 0.$$

Для v аналогично.

$$\frac{d}{dt}(\overline{ln(u_i(t))}) > \xi_1 > 0; \quad \frac{d}{dt}(\overline{ln(v_i(t))}) > \xi_2 > 0.$$

$$\overline{ln(u_i(t))} > \xi_1 t + k_i > 0; \quad \overline{ln(v_i(t))} > \xi_2 t + k_i > 0; \quad i = \overline{1,n}.$$

Так как $u_i(x,t) > 0; v_i(x,t) > 0$; применим неравенство Йенсена

$$\overline{ln(u_i(t))} \leq ln(\overline{u_i(t)});$$

$$\overline{ln(v_i(t))} \leq ln(\overline{v_i(t)}); i = \overline{1,n}.$$

Отсюда

$$\bar{u}_i(t) > C_0 \exp \xi_1 t; \quad \bar{v}_i(t) > C_0 \exp \xi_2 t; \quad t \geq 0.$$

Противоречие с предположением устойчивости по Ляпунову.

5. Двумерный случай Рассмотрим систему (4) с матрицами $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$. Пусть u_1, u_2 – вероятности выбора первой и второй стратегии соответственно первым игроком, v_1, v_2 – вероятности второго игрока. Так как

$$u_1 + u_2 = 1; \quad v_1 + v_2 = 1;$$

можно рассматривать только пары (u, v) и $(1-u, 1-v)$, что приводит к системе, изученной в книгах [13] и [10].

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u} & = & u(1-u)(a_{12} - (a_{12} + a_{21})v); \\ \dot{v} & = & v(1-v)(b_{12} - (b_{12} + b_{21})u). \end{array} \right. \tag{21}$$

Исходя из смысла переменных, решение рассматривается на квадрате $Q = \{(u, v) : 0 \leqslant u, v \leqslant 1\}$. Система всегда имеет тривиальные точки покоя на границе области. При $a_{12}a_{21} > 0$ и $b_{12}b_{21} > 0$ система (21) имеет единственную точку покоя внутри Q:

$$F^* = \left(\frac{b_{12}}{b_{12} + b_{21}}; \frac{a_{12}}{a_{12} + a_{21}} \right).$$

Якобиан в точке F: $J^* = \begin{bmatrix} 0 & -(a_{12} + a_{21})\frac{b_{12}b_{21}}{(b_{12}+b_{21})^2} \\ -(b_{12} + b_{21})\frac{a_{12}a_{21}}{(a_{12}+a_{21})^2} & 0 \end{bmatrix}$. Отсюда

$$\lambda^2 = \frac{a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}}{(a_{12} + a_{21})(b_{12} + b_{21})}.$$

Заметим, что в системе (21 возможны только два типа точек покоя: при $a_{12}b_{12} > 0$ точка F – седло, при $a_{12}b_{12} < 0$ – центр.

Родительский вклад Рассмотрим задачу, известную как “родительский вклад” или “борьба полов”. В изначальной постановке (1977, Maynard Smith) в задаче рассматривался вклад особей двух полов в выведение общего потомства, при наборе из двух стратегий:“охранять” или “покинуть”[14]; и параметрах: вероятность выживания потомства при разных парах стратегий, вероятность завести потомство с еще одной женской особью для мужских особей, количество потомков у самки. В другой интерпретации (Dawkins,1976) также оценивается вклад родительских особей в выращивание общего потомства, но в расчет принимаются другие параметры и способы поведения [10],[14]. Выбирается по два типа стратегии: женская особь может придерживаться так называемых "медленной"и "быстрой"стратегий $(v1, v2)$, мужская – "непостоянной"и "верной"$(u1, u2)$. Введем константы, характеризующие выплаты:

- G – успешное выращивание потомства, увеличивает фитнес обоих полов.
- -C – если женская особь растит потомство в одиночестве, и все расходы ложатся на нее; -C/2 – если особи будут участвовать в равной мере в выведении потомства.
- -E – затраты на длительный период ухаживания.

Отсюда записываются матрицы выплат игры:A (мужская особь) и B (женская особь).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & G \\ G - C/2 - E & G - C/2 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & G - C/2 - E \\ G - C & G - C/2 \end{bmatrix}.$$

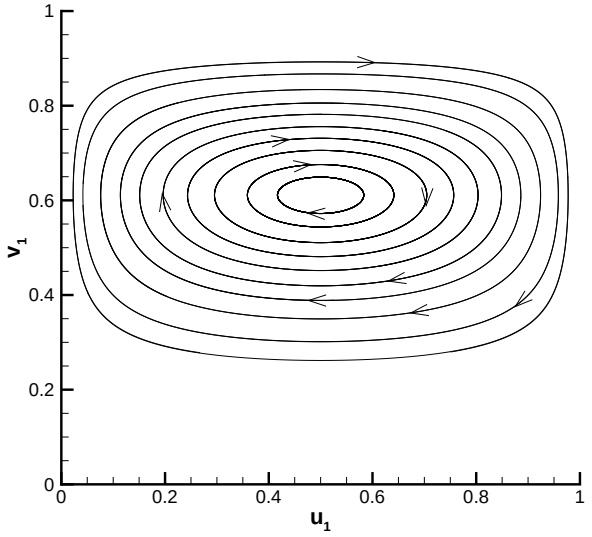

Рис. 1: Фазовый портрет системы без диффузии.

Причем $0 < E < G < C < 2(G - E)$. Положение равновесия системы

$$F = \left(\frac{E}{C - G + E}; \frac{G - C}{G - C - E}; \frac{C}{2(G - E)}; \frac{G - C/2 - E}{G - E} \right).$$

Эта упрощенная модель взаимодействия является примером естественного осциллятора: если самки играют "медленную" стратегию, то самцам приходится быть более "верным", но тогда самки могут себе позволить быть более "быстрыми", но тогда и самцы поменяют стратегию, что заставит самок вернуться к изначальному поведению. Это циклическое поведение подтверждается динамикой соответствующей модели, т.к. точка покоя в этой системе – центр.

Численно данная задача интегрировалась по явной схеме Эйлера первого порядка, производные аппроксимировались центральными разностями. Для численного моделирования были выбраны конкретные значения затрат : $G = 1.0$, $C = 1.1$ и $E = 0.1$ и построены соответствующие матрицы. На рисунке (1) приведен фазовый портрет данной системы. При включении механизма диффузии происходит постепенное устранение пространственной неоднородности, на рисунке (2) показан процесс изменения $u_1(t, x)$ при коэффициентах диффузии $d_i^A = d_i^B = 0.02$ и пространственно неоднородном начальном распределении.

"Владелец-захватчик","ястребы-голуби", координационная игра Рассмотрим еще один классический пример. Две особи (два вида) конкурируют за территорию или некоторый ресурс. Каждый игрок может выбрать одну из стратегий: "ястреб" или "голубь". Названия стратегий условные, обозначающие лишь два типа поведения: вступить

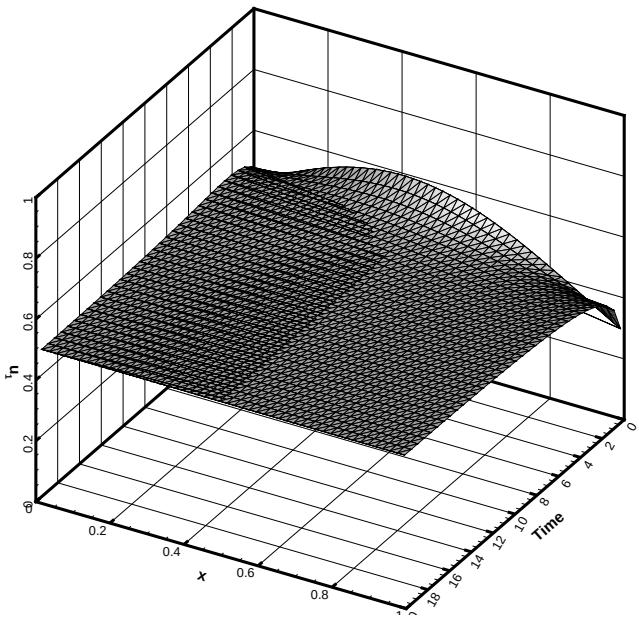

Рис. 2: Решение в зависимости от времени.

в агрессивный конфликт или отступить. В асимметричной форме игры будем считать ущерб игроков различным в случае, если они выбирают разные стратегии. Пусть первый игрок – "владелец", второй — "захватчик". Если оба выбирают агрессивное поведение, ущерб будем считать одинаковым и равным a, если оба отступили – 0. В случае атаки "захватчика" ушерб соответственно $e \leq c$; агрессивного поведения "владельца" – $b \leq d$. Причем $a \leq c \leq e; a \leq d \leq b$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} a & d \\ e & 0 \end{bmatrix}.$$

Данный класс задач, но с различными интерпретациями, крайне распространен. В теории игр аналогичными ему являются "дилемма заключенного" и координационная игра. В любом варианте внутренняя точка покоя, если она есть, – седло.

Данная задача также была исследована численно для следующих значений параметров : $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, $e = 3$. Фазовый портрет системы изображен на рисунке (3). При значении всех коэффициентов диффузии равном 0.02 пространственно неоднородные начальные условия со временем переходят в пространственно однородные (рисунок 4). Причем устойчивость достигнутого положения равновесия это проявление стабилизирующего эффекта диффузии (в обычном случае это неустойчивое равновесие).

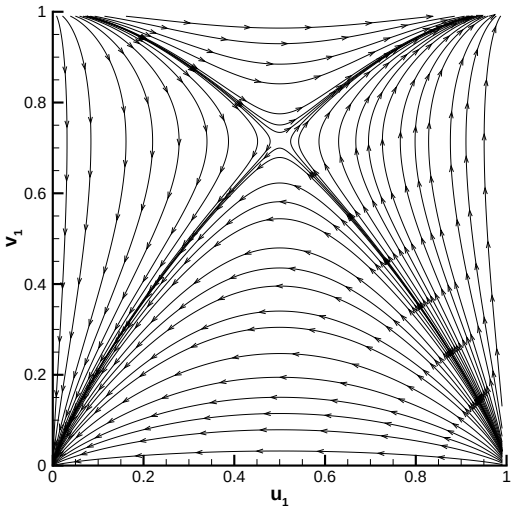

Рис. 3: Фазовый портрет системы без диффузии.

При достаточно больших коэффициентах диффузии, получен стабилизирующий эффект.

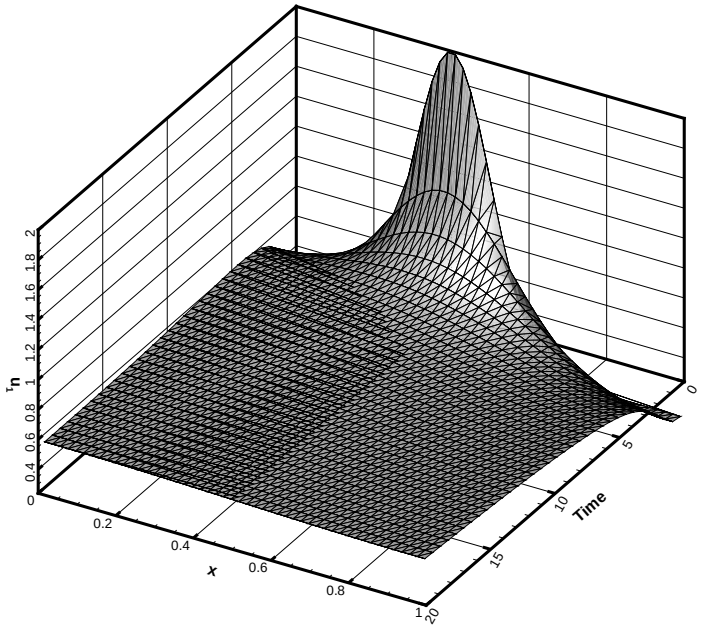

Рис. 4: Стабилизирующий эффект.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brauchli K., Killingback T., Doebeli M. Evolution of cooperation in spatially structured populations. Journal of theoretical biology // J Theor Biol. 1999. **200**. P. 405—17.
2. Sigmund K., Hofbauer J. Evolutionary game dynamics // Bull. of Amer. Math. Soc. 2003 **40**. N 4. P. 479–519.
3. Ohtsuki H., Nowak M. The replicator equation on graphs. // Journal of Theoretical Biology.2006.**243** P. 86—97.
4. Bratus A., Novozhilov A., Posvyanskii V. A note on the replicator equation with explicit space and global regulation. // Math. Biosci. 2011 **8**. N 3. P. 659–676.
5. Fisher R. A. The wave of advance of advantageous genes. // Annals of Eugenics. 1938. **7**. P. 353—369.
6. Hadeler K. P. Diffusion in Fisher's population model. // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 1981. **1981**. P. 39—45.
7. Bratus A., Novozhilov A., Posvyanskii V. Existence and stability of stationary solutions to spatially extended autocatalytic and hypercyclic systems under global regulation and with nonlinear growth rates.
   Nonlinear Anal.-Real. 2010 **11**. N 3. P. 1897–1917.
8. Eigen M., Schuster P. The hypercycle. A principle of natural self-organization. Part A: Emergence of the hypercycle, // Naturwissenschaften, 1977. **64(11)** . P. 541—565
9. Doebeli, M., Hauert C. Models of cooperation based on the Prisoner's Dilemma and the Snowdrift game. // Ecology Letters. 2005. **8**. P. 748—766.
10. Sigmund K., Hofbauer J. Evolutionary games and population dynamics. Cambridge University Press: 1998.
11. Nowak M. A., Sasaki A., Taylor C., Fudenberg D. Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations. // Nature. 2004. **428**. P. 646-–650.
12. Hauert C., Szabo? G. // Game theory and physics. Am. J. Phys. 2005. **73**. P. 405—414.
13. Cressman R. Evolutionary dynamics and extensive form games. The MIT Press: 2003.
14. Maynard Smith J. Evolution and the theory of Games. Cambridfe University Press: 1982.
15. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. М.: Физматлит, 2010.

16. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.

17. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968.

18. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике. М.: Мир, 1985.

Поступила в редакцию