проводить численный анализ электронных процессов в приборах с электростатическим управлением током цилиндрической конструкции.

Библиографический список

1. Федяев В.К. Расчет на ЭВМ трехмерных многоэмиттерных ЭОС / В.К. Федяев, В.П. Рыбачек // Радиотехника и электроника. 1988. Т.32. №12. С. 2611-2617.

2. Федяев В.К. Электронная проводимость и коэффициент полезного действия плоского сверхвысокочастотного зазора в нелинейном режиме / В.К. Федяев, А.А. Пашков // Радиотехника и электроника. 2005. Т.50. №3. С. 361-365.

УДК 621.385.632

В.А. Солнцев
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»,
e-mail: soln05@miem.edu.ru

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

V.A. Solntsev
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
National Research University «Higher School of Economics»

THEORY OF ELECTRON WAVES IN PERIODIC STRUCTURES

With the help of the difference theory of excitation of periodic waveguides obtained by the characteristic equation of the electron waves formed by the interaction of an electron beam with the forward and backward electromagnetic waves periodic waveguides. The resulting characteristic equation describes the electron-wave interaction in the passband and stopband of periodic waveguides and includes as special cases of well-known equation for the «smooth» slow-wave systems and resonator slow-wave systems near the cutoff frequency. Found a number of analytical solutions of the characteristic equation, which allowed to compare the properties of the amplification and propagation of electron waves inside and on the border of passband and stopband of periodic waveguides.

Теории взаимодействия прямолинейных электронных потоков с электромагнитными волнами периодических волноводов посвящено большое число работ, основанных как на общей теории возбуждения таких волноводов, так и на использовании эквивалентных схем резонаторных замедляющих систем (ЗС), применяемых в мощных лампах с бегущей волной (ЛБВ). Общая теория возбуждения периодических волноводов монохроматическим током дана впервые Л.А.Вайнштейном [1] и там же проведено исследование электронных волн в периодических волноводах, основанное на представлении всех ВЧ-полей и токов рядами по пространственным гармоникам и сведении характеристического уравнения электронных волн к виду, аналогичному уравнению для «гладких» ЗС. При этом возникают трудности, связанные с запиранием периодических волноводов на границах полос пропускания, когда поток энергии электромагнитной волны обращается в ноль, а сопротивление связи, характеризующее эффективность взаимодействия волны и электронов, стремится к бесконечности. Для преодоления возникающих трудностей в литературе неоднократно предлагались различные модификации уравнения возбуждения периодических волноводов ВЧ-током пучка. Другой подход к описанию дискретного электронно-волнового взаимодействия основан на применении эквивалентных схем резонаторных ЗС в виде цепочек 4-полюсников или RLC-цепей. При этом удается избежать указанных выше трудностей, однако сам выбор адекватных эквивалентных схем ЗС представляет непростую задачу.

В настоящей работе, следуя [2], используются разностное уравнение возбуждения, полученное в [3] из общей теории возбуждения волноводов, и входящий в это уравнение локальный импеданс связи. В отличие от теории Дж. Пирса, где сопротивление связи характеризует взаимодействие электронов с одной собственной волной ЗС, локальный импеданс связи характеризует взаимодействие электронов с полным полем двух – прямой и встречной – волн ЗС в зазорах взаимодействия и не обращается в бесконечность на частотах отсечки [2, 4]. Это позволило разработать обобщенную линейную теорию взаимодействия электронных потоков и волн в полосах пропускания и запирания ЗС без использования эквивалентных схем ЗС. На основе этой теории найдена матрица, связывающая электромагнитные поля, ВЧ-токи и скорости пучка на трех соседних периодах ЗС

$$\begin{aligned} I_{q+1} &= a_{11} I_q + a_{12} V_q + a_{13} F_q, \\ V_{q+1} &= a_{21} I_q + a_{22} V_q + a_{23} F_q, \\ F_{q+1} &= a_{31} I_q + a_{32} V_q + a_{33} F_q + a_{34} F_{q-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

где коэффициенты a_{ij} выражаются через параметры электронного пучка и ЗС.

Отыскивая решение системы уравнений (1) в виде собственных волн

$$\begin{aligned} I_{q+1,i} &= I_{q,i} \exp(i\psi_i), \\ V_{q+1,i} &= V_{q,i} \exp(i\psi_i), \\ F_{q+1,i} &= F_{q,i} \exp(i\psi_i), \end{aligned} \tag{2}$$

придем к системе линейных алгебраических уравнений 3-го порядка:

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)I_q + a_{12}V_q + a_{13}F_q = 0,\\
&a_{21}I_q + (a_{22}-\lambda)V_q + a_{23}F_q = 0,\\
&a_{31}I_q + a_{32}V_q + (a_{33}-\lambda+\frac{a_{34}}{\lambda})F_q = 0.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Приравнивая к нулю определитель этой системы, получим, однако, уравнение четвертой степени относительно входящих в него собственных чисел матрицы $\lambda = \exp(i\psi)$, что объясняется разностным видом уравнения возбуждения, связывающим значения поля на трех шагах ЗС. Используя выражения для a_{ij} и вычисляя определитель системы (3), получим универсальное характеристическое уравнение электронных волн в периодических структурах

$$(\cos\psi - \cos\theta_{\text{q}})[\cos\varphi_{\text{s}} - \delta\cdot\cos(\varphi_{\text{e}}+\psi) - \text{i}(\varepsilon\varphi_{\text{e}})^3(\text{Y}_1 - \text{iY}_2)] + \text{G} = 0, \qquad (4)$$

где

$$\text{G} = \frac{1}{2}\exp(-\text{i}\psi)\text{a}_{13}[\sigma(\varepsilon\varphi_{\text{e}})^2(\exp(\text{i}\frac{\theta}{2}) - \text{M})\sin\theta_{\text{q}} + (\cos\theta_{\text{q}} - \exp(\text{i}\psi))\cdot\text{i}\varepsilon\varphi_{\text{e}}^2\text{M}] +$$

$$+\text{a}_{23}[\varepsilon\varphi_{\text{e}}^2\text{M}\frac{\sin\theta_{\text{q}}}{\sigma} - (\cos\theta_{\text{q}} - \exp(\text{i}\psi))\cdot\text{i}(\varepsilon\varphi_{\text{e}})^2(\exp(\text{i}\frac{\theta}{2}) - \text{M})],$$

φ_s - сдвиг фазы поля волны на шаге ЗС без электронного пучка; $\theta = h_e d$ – угол пролета электронов в эквивалентном плоском зазоре взаимодействия ширины d; $M = \sin\frac{\theta}{2}\Big/\frac{\theta}{2}$ -коэффициент взаимодействия; Y_1, Y_2 -активная и реактивная составляющие электронной проводимости зазора.

Выбор в (4) величины $\delta = 1$ или $\delta = -1$ зависит от номера рабочей пространственной гармоники в ЛБВ. Интенсивность взаимодействия электронного потока с электромагнитным полем определяется величиной параметра усиления ε, который аналогичен параметру усиления C или ε,применяемому в теории ЛБВ. Главное отличие состоит в том, что в определение параметра усиления здесь входит не сопротивление связи, а локальный импеданс связи.

Если взаимодействия нет, то $\varepsilon = 1, G = 0$ и характеристическое уравнение (4) распадается на два независимых уравнения.

Уравнение $\cos\psi - \cos\theta_{\text{q}} = 0$ описывает волны пространственного заряда:

$$\psi = \pm\theta_q = \pm\frac{\omega_q}{v_e}.$$

Уравнение $\cos\varphi_s - \delta \cdot \cos(\varphi_e + \psi) = 0$ описывает волны в периодической структуре. При $\delta = 1$ оно определяет условия синхронизма электронов и пространственных гармоник поля с рабочей основной пространственной гармоникой

$$\varphi_e + \psi = \varphi_s + 2\pi m,\ \ 0 \le \varphi_s \le \pi,$$

причем m=0 для рабочей гармоники. При $\delta = 1$ аналогично получается

$$\varphi_e + \psi = \varphi_{s,1} + 2\pi m = \varphi_s - \pi + 2\pi m$$

для ЗС с рабочей первой пространственной гармоникой поля, m=1,

$$\pi \le \varphi_{s,1} \le 2\pi.$$

При взаимодействии электронного потока с электромагнитным полем в реальных ЗС параметр усиления ε , как правило, является малым. При этом имеем $a_{13} \sim \varepsilon^2, a_{23} \sim \varepsilon$ и т.к. параметр пространственного заряда $\sigma^2 = (\dfrac{\omega_q}{\varepsilon\omega})^2 \le 1,$ то $|G| \sim \varepsilon^3 \ll 1$ и комплексное возмущение фазы ψ также мало. В этом случае в выражении (4) для G можно положить $exp(\pm i\psi)=1$ и получаем следующее характеристическое уравнение

$$(\cos\psi - \cos\theta_q)[\cos\varphi_s - \delta \cdot \cos(\varphi_e + \psi) - \mathrm{i}(\varepsilon\varphi_e)^3(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{iY}_2)] + \mathrm{G}\,|_{\psi=0} = 0, \quad (5)$$

в котором величина $G\big|_{\psi=0}$, характеризующая взаимодействие, зависит только от невозмущенных параметров электронного пучка и ЗС.

Пренебрегая влиянием пространственного заряда и рассматривая случай тонких зазоров взаимодействия, можно получить из (5) следующее характеристическое уравнение

$$2(1-\cos\psi)[\cos\varphi_s - \cos(\varphi_e + \psi)] + \delta\varepsilon^3\varphi_e^4 = 0, \quad (6)$$

где $0 \le \varphi_s = \varphi_{s,0} \le \pi$ при $\delta = 1$ (рабочая нулевая пространственная гармоника), $\pi \le \varphi_s = \varphi_{s,1} \le 2\pi,$ при $\delta = -1$ (рабочая 1-я пространственная гармоника.

Т.к. $\varepsilon << 1$, то $\psi << 1$, и полагая $\cos\psi \cong 1 - \dfrac{\psi^2}{2}$, $\sin\psi \approx \psi$, получаем из (6) алгебраическое характеристическое уравнение четвертой степени для комплексного возмущения фазы электронных волн:

$$\frac{\psi^4}{2}\cos\varphi_e + \psi^3\sin\varphi_e + \psi^2(\cos\varphi_s - \cos\varphi_e) + \delta\varepsilon^3\varphi_e^4 = 0\,. \quad (7)$$

В теории электронных приборов это малое возмущение обычно нормируется с использованием параметра усиления e, введением, согласно Л.А. Вайнштейну [1]:

$$\eta = \frac{\psi}{\varepsilon\varphi_e} = \frac{\psi' + i\psi''}{\varepsilon\varphi_e} = \eta' + i\eta'', \tag{8}$$

и аналогично у Дж. Пирса.

Тогда характеристическое уравнение электронных волн в периодической структуре принимает вид:

$$\frac{\varepsilon}{2}\cos\varphi_e\eta^4 + \frac{\sin\varphi_e}{\varphi_e}\eta^3 + \frac{\cos\varphi_s - \cos\varphi_e}{\varepsilon\varphi_e^2}\eta^2 + \delta = 0. \tag{9}$$

Это уравнение имеет аналитические решения для ряда частных случаев.

В «гладких» ЗС с импедансными стенками (например, в спирально-проводящем цилиндре) существует только одна основная пространственная гармоника волны, т.е. $\delta = 1$. Шаг системы мал и получим характеристическое уравнение, точно совпадающее с известным уравнением, приведенным в [5] в пренебрежении пространственным зарядом.

В периодических ЗС при точном синхронизме электронов и волн ЗС (параметр расстройки $b = \xi = 0, \varphi_s = \varphi_e$) характеристическое уравнение (9) имеет аналитические решения.

Для ЗС с нормальной дисперсией основной пространственной гармоники волны ($\delta = 1$) в середине полосы пропускания при $\varphi_s = \frac{\pi}{2}$ получаем кубическое уравнение. Встречная волна ЗС не влияет здесь на вид решения. Наоборот, на границе полосы пропускания при $\varphi_s = \pi$ одна из пространственных гармоник как прямой, так и встречной волны ЗС синхронна с электронным потоком, и приходим к уравнению четвертой степени, определяющему 4 электронных волны

$$\eta^4 = \frac{2}{\varepsilon}, \quad \psi^4 = (\varepsilon\varphi_s)^4 \cdot \eta^4 = 2\varepsilon^2\pi^4 \cdot \tag{10}$$

При уменьшении взаимодействия, тогда $\varepsilon \to 0$, получим $\eta \to \infty$, что говорит о некорректности нормировки (8) на границе полосы пропускания ЗС. Однако для ψ имеем конечное решение

$$\psi_{1.3} = \pm 2^{\frac{1}{4}}\pi \cdot \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \quad \psi_{2.4} = \pm i \cdot 2^{\frac{1}{4}}\pi \cdot \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \tag{11}$$

показывающее, что постоянные нарастания электронных волн на границе полосы пропускания $\sim \varepsilon^{\frac{3}{4}}$ (а не ε, как на середине полосы или в «гладких»

ЗС). Иными словами, параметром усиления на границе полосы пропускания является величина $\varepsilon^{\frac{3}{4}}$, что уже отмечалось в ряде работ, где изучалось электронно-волновое взаимодействие вблизи границы полосы пропускания.

Аналогично можно рассмотреть взаимодействие электронного потока с волнами ЗС с аномальной дисперсией основной пространственной гармоники, когда в ЛБВ рабочей является ее 1-я пространственная гармоника ($\delta = -1$, $\pi \le \varphi_s = \varphi_{s,1} \le 2\pi$). В случае точного синхронизма ($\varphi_e = \varphi_{s,1}$) также можно получить аналитические решения (9) в центре и на границах полосы пропускания. Исследование решений показывает, что увеличением сдвига фазы зона усиления по параметру расстройки увеличивается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-02-00859).

Библиографический список

1. Вайнштейн Л. А. Электронные волны в периодических структурах / Л.А.Вайнштейн // ЖТФ. 1957. Т. 27. № 10. С. 2340-2352.

2. Солнцев В.А. Обобщенная линейная теория дискретного электронно-волнового взаимодействия в замедляющих системах / В.А.Солнцев, Р.П.Колтунов // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55. №11. С. 1362-1375.

3. Солнцев В.А. Разностная форма теории возбуждения периодических волноводов./ В.А. Солнцев, С.В. Мухин // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. №11. С. 2161-2166.

4. Мухин С.В. Исследование полосовых свойств локального импеданса связи замедляющих систем / С.В.Мухин, Д.Ю. Никонов, В.А. Солнцев // Радиотехника и электроника. 2008. Т.53. №10. С. 1324-1332.

5. Вайнштейн Л.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике / Л.А. Вайнштейн, В.А. Солнцев. М.: Сов. радио, 1973. 400 с.