ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
И ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 539.3

А. В. Михеев

ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассматривается вопрос расчета устойчивости ортотропных псевдосферических оболочек моделей Тимошенко и Кирхгофа – Лява. Проанализирована зависимость параметра критической нагрузки от коэффициента сдвига и упругих характеристик оболочки и основания.

Псевдосфера, оболочки, расчет устойчивости

При рассмотрении модели тонких оболочек для расчета их устойчивости в настоящее время используются две основных гипотезы: гипотеза Кирхгофа – Лява, не принимающая во внимание поперечный сдвиг волокон при деформации оболочки [1], и гипотеза Тимошенко, его учитывающая [2]. Как показывает сравнение, при одних и тех же параметрах жесткости оболочки и основания применение модели Тимошенко дает более низкое значение критической нагрузки по сравнению с моделью Кирхгофа – Лява [3]. Для решения задач о потере устойчивости тонких оболочек в ряде случаев применим так называемый «локальный подход», при котором коэффициенты системы уравнений устойчивости считаются постоянными («замораживаются»), а граничные условия игнорируются. В случае оболочек отрицательной гауссовой кривизны без упругого основания их форма потери устойчивости характеризуется, в зависимости от вида нагружения, распространением вмятин на всю срединную поверхность, либо их вытягиванием вдоль одной из образующих [4]. При наличии упругого основания становится возможным использование локального подхода, поскольку, как следует из результатов, полученных в [5], при определенных соотношениях упругих констант потеря устойчивости сопровождается образованием большого количества малых вмятин на поверхности оболочки. Цель данной работы – применив результаты, полученные для ортотропных оболочек в [3], провести расчет зависимости параметра критической нагрузки от параметра сдвига и упругих характеристик оболочки и основания, а также определить местонахождение наиболее слабой параллели псевдосферы, в окрестности которой происходят деформации при достижении критической нагрузки.

Геометрическое моделирование оболочки. Согласно классическому подходу двумерной теории оболочек, рассматриваемая оболочка моделируется своей срединной поверхностью (псевдосферой), а соответствующие напряжения и моменты усредняются [4]. Псевдосфера является поверхностью, полученной вращением трактриссы

$$z(\rho) = arch\left(\frac{1}{\rho}\right) - \sqrt{1-\rho^2}$$

относительно оси OZ (рис. 1). Ее главные кривизны равны:

$$K_\rho = -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}, \quad K_\theta = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

а гауссова кривизна является постоянной и равна –1.

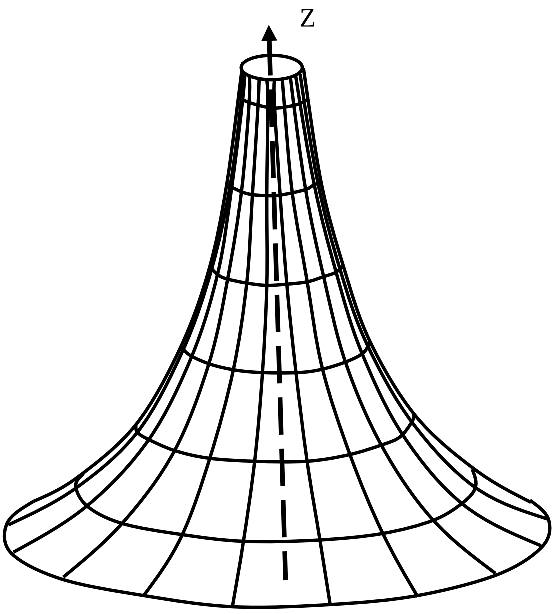

Рис. 1

Математическая модель потери устойчивости оболочки. Рассмотрим псевдосферическую ортотропную оболочку с постоянной толщиной h и характерным линейным размером R на упругом изотропном основании жесткости ω. Введем на срединной поверхности рассматриваемой оболочки систему криволинейных координат α, β так, чтобы их направления совпали с направлением главных кривизн (рис. 1). Пусть E_1, E_2 – модули Юнга оболочки в направлениях, параллельных α, β; G_{12} – модуль сдвига в касательном направлении; G_{13}, G_{23} – модули сдвига в нормальном направлении, $G'_{i3} = k \cdot G_{i3}$, где $i = 1, 2$; $k = 5/6$ – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения напряжений сдвига по толщине оболочки; ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона; a_1, a_2 – коэффициенты сдвига; k_1, k_2 –главные кривизны, отнесенные к характерному размеру срединной поверхности оболочки; $c_1 = E_2 / E_1$, $c_2 = G_{12} / E_1$ – параметры относительной жесткости оболочки. Оболочка подвергнута однопараметрическому нагружению вида

$$(T_1, T_2, S_0) = -\lambda(t_1, t_2, t_3), \tag{1}$$

где (T_1, T_2, S_0) – начальные усилия, (t_1, t_2, t_3) – безразмерные начальные усилия, λ – параметр нагружения. Нормальная компонента вектора смещения w выражается формулой, приведенной ниже, зависящей от волновых чисел p,q и нормированных координат $x = \alpha A, y = \beta B$, где A, B – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности:

$$w = w_0 \sin\left(\frac{px}{R}\right)\cos\left(\frac{qy}{R}\right). \tag{2}$$

Согласно [3] введем в рассмотрение функцию нагружения:

$$\Lambda = \frac{1}{f_T(\varphi)}\left(\frac{f_R(\varphi)}{s^2 f(\varphi)} + \frac{s^2 \cdot F(s,\varphi)}{12 N_\nu} + \frac{\omega}{s}\right), \tag{3}$$

где

$$N_\nu = 1 - \nu_{12}\nu_{21}, \ \Lambda = \frac{\lambda R}{E_1 h^2}, \ s = \sqrt{\frac{h(p^2 + q^2)}{R}}, \ tg(\varphi) = \frac{q}{p}.$$

Здесь $f(\varphi)$, $f_R(\varphi)$, $f_T(\varphi)$, $F(s,\varphi)$ – вспомогательные функции, полное выражение для которых приведено в [3]. Величина критической нагрузки получается минимизацией функции (3) по волновым числам s, φ.

Зависимость критической нагрузки от параметров жесткости. Рассмотрим псевдосферическую ортотропную оболочку со следующими характеристиками: $h_* = h/R = 0.01$, $\nu_{12} = 0.3$, $a_1 = a_2 = 0$. Тогда параметр Λ_*, определяющий значение критической нагрузки, находится следующим образом:

$$\Lambda_*(c_1, c_2, \omega) = \min{}^+ \Lambda,$$

где минимизация функции нагружения Λ проводится по четырем параметрам s, φ, k_1, k_2, а знак «+» указывает на положительный минимум. Значения параметров главных кривизн k_1, k_2, при которых достигается искомый минимум функции нагружения, определяют положение наиболее слабой параллели, вдоль которой располагаются вмятины при потере устойчивости.

Проведем сравнительные расчеты для двух случаев нагружения: $(t_1, t_2, t_3) = (1, 1, 0)$ и $(t_1, t_2, t_3) = (0, 0, 1)$. Для выполнения численной минимизации и построения графиков используется программный пакет Mathematica 5.0. Зависимости параметра критической нагрузки Λ_* от параметров относительной жесткости оболочки c_1, c_2 для случаев 1, 2 при жесткости основания $\omega = 1$ представлены на рисунках 2, 3 соответственно. Некоторые их значения при $\omega = 0.5$ приводятся в таблице 1. Как видно из графиков и таблицы, критическая нагрузка возрастает с увеличением c_1, c_2. Так в случае 1, $\omega = 0.5$ с увеличением $c_1 = E_2 / E_1$ с 0.1 до 1 и $c_2 = G_{12} / E_1 = 0.3$ критическая нагрузка возрастает на 115.7 %, а при увеличении c_1 от 1 до 10 и тех же значениях ω, c_2 на 114.6 %. В случае 2, $\omega = 0.5$ с увеличением отношения $c_1 = E_2 / E_1$ с 0.1 до 1 и $c_2 = G_{12} / E_1 = 0.3$ критическая нагрузка возрастает на 24.6 %, а при увеличении c_1 от 1 до 10 и тех же значениях ω, c_2 на 224.9 %. Значения параметров главных кривизн k_1, k_2 для наиболее слабой параллели в первом и втором случаях представлены в таблицах 2, 3.

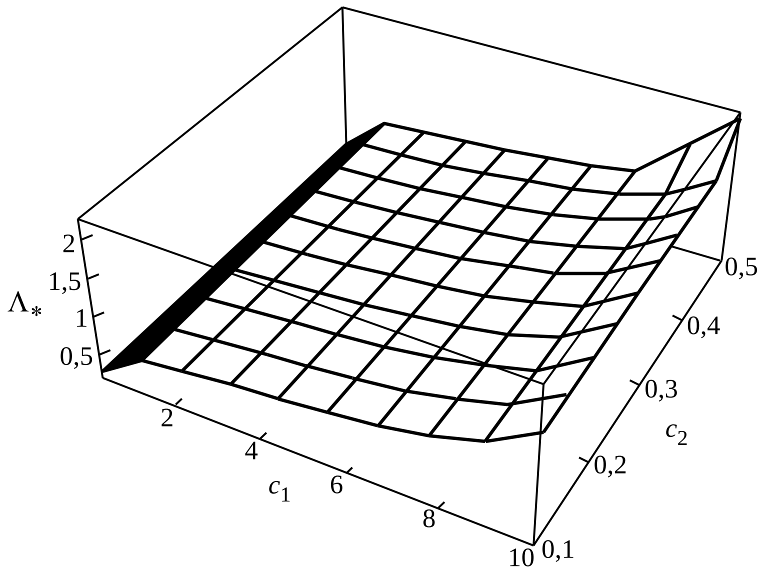

Рис. 2

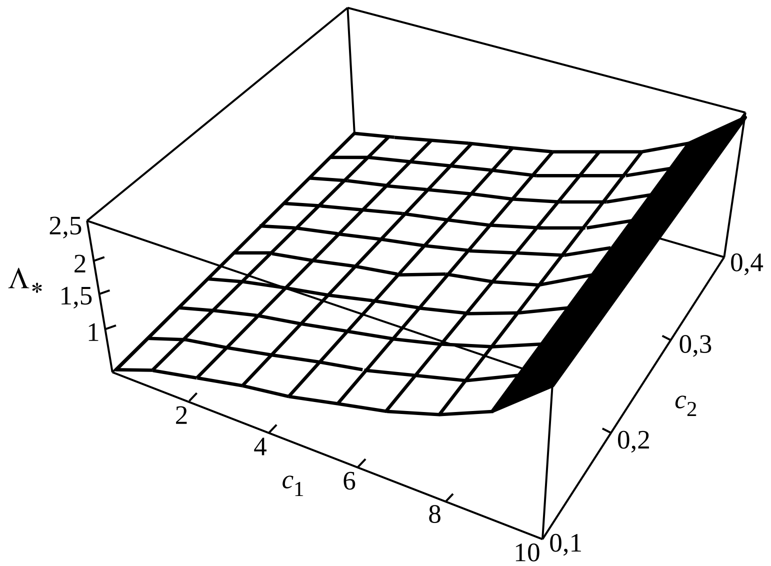

Рис. 3

Таблица 1

c_1	Случай 1			Случай 2		
	c_2 = 0.3	c_2 = 0.4	c_2 = 0.5	c_2 = 0.3	c_2 = 0.4	c_2 = 0.5
0.1	0.242	0.242	0.242	0.419	0.445	0.468
1	0.522	0.537	0.555	0.522	0.539	0.555
10	1.120	3.264	–	1.696	1.698	–

Таблица 2

c_1	c_2 = 0.3		c_2 = 0.4		c_2 = 0.5	
	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
0.1	–35.21	0.03	–47.12	0.02	–39.53	0.03
1	–1.00	1.00	–16.11	0.06	–1.00	1.00
10	–0.01	111.46	–0.23	4.40	–0.01	106.59

Таблица 3

c_1	c_2 = 0.3		c_2 = 0.4		c_2 = 0.5	
	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
0.1	–1.40	0.72	–1.36	0.74	–1.33	0.75
1	–1.00	1.00	–1.00	1.00	–1.00	1.00
10	–0.68	1.48	–0.68	1.48	–	–

При решении рассматриваемой задачи применимость локального подхода зависит от волновых чисел p, q, определяющих вытянутость вмятин, возникающих при потере устойчивости, вдоль одного из координатных направлений α, β. Данное условие определяется неравенством $\Gamma(c_1, c_2) \geq \varepsilon$, где c_1, c_2 – параметры относительной жесткости оболочки, $\Gamma(c_1, c_2) = \min\{ p_*(c_1, c_2), q_*(c_1, c_2)\}$, p_*, q_* – критические значения волновых чисел при $\Lambda = \Lambda_*$, а константа ε зависит от линейных размеров оболочки.

Графики функции $\Gamma(c_1, c_2)$ для двух случаев нагружения $(t_1, t_2, t_3) = (1, 1, 0)$ и $(t_1, t_2, t_3) = (0, 0, 1)$ при $h_* = 0.01$, $\nu_{12} = 0.3$, $\omega = 0.5$ представлены на рисунках 4 и 5.

Зависимость критической нагрузки от параметров сдвига. Рассмотрим псевдосферическую ортотропную оболочку модели Тимошенко со следующими характеристиками (см. [6]): $E_1 = 36 \cdot 10^3$ МПа, $E_2 = 26.3 \cdot 10^3$ МПа, $G_{12} = 4.9 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_{12} = 0.105$, $h_* = 0.01$. Тогда $c_1 = 0.73$, $c_2 = 0.14$. Как и в предыдущем пункте, имеют место два варианта нагружения: $(t_1, t_2, t_3) = (1, 1, 0)$ и $(t_1, t_2, t_3) = (0, 0, 1)$. В данном случае

$$\Lambda_*(a_1, a_2, \omega) = \min{}^+ \Lambda,$$

где положительная минимизация функции нагружения Λ проводится по четырем параметрам s, φ, k_1, k_2. Также a_1, a_2 – коэффициенты сдвига, которые при нахождении минимума должны оставаться постоянными.

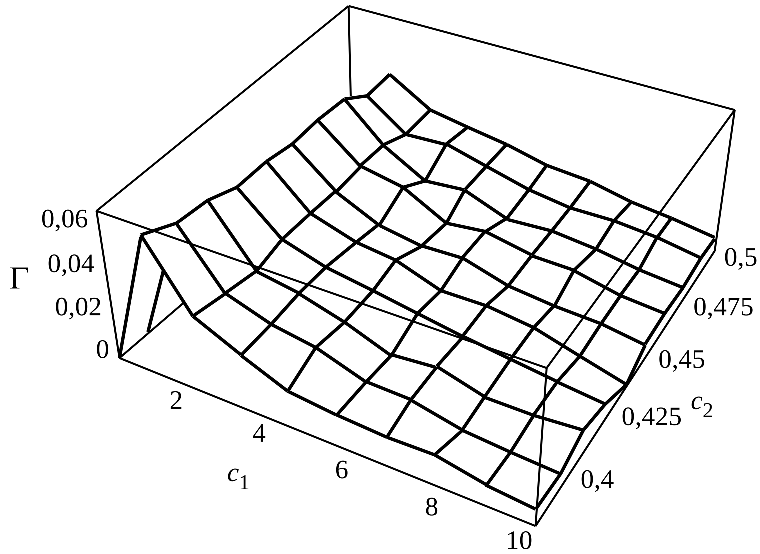

Рис. 4

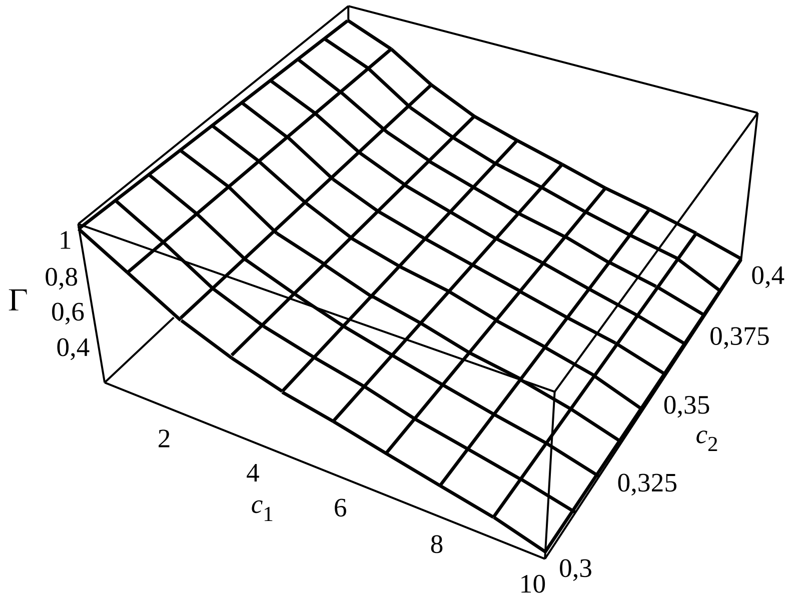

Рис. 5

Зависимости параметра критической нагрузки Λ_* от коэффициентов сдвига a_1, a_2 для случаев 1, 2 при $\omega = 1$ приведены в таблице 4, а в таблицах 5, 6 даются значения кривизн для наиболее слабой параллели в случаях 1 и 2 соответственно. Как видно из таблицы 4, с возрастанием одного из параметров a_1, a_2 при постоянном втором из них критическая нагрузка монотонно убывает. Так, в случае, $\omega = 1$, $a_2 = 0.01$ при $(t_1, t_2, t_3) = (1, 1, 0)$ с возрастанием a_1 с 0.01 до 0.1 критическая нагрузка убывает на 4.2 %, а при $(t_1, t_2, t_3) = (0, 0, 1)$ – на 4.8 %.

Таблица 4

a_1	Случай 1			Случай 2		
	a_2 = 0.01	a_2 = 0.05	a_2 = 0.1	a_2 = 0.01	a_2 = 0.05	a_2 = 0.1
0.01	0.688	0.671	0.642	0.694	0.682	0.667
0.05	0.678	0.661	0.636	0.679	0.666	0.650
0.1	0.659	0.646	0.623	0.660	0.646	0.627

Таблица 5

a_1	a_2 = 0.01		a_2 = 0.05		a_2 = 0.1	
	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
0.01	–1.31	0.76	–1.51	0.66	–1.94	0.52
0.05	–1.14	0.88	–1.31	0.76	–1.66	0.60
0.1	–0.91	1.10	–1.05	0.96	–1.31	0.76

Таблица 6

a_1	a_2 = 0.01		a_2 = 0.05		a_2 = 0.1	
	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
0.01	–1.06	0.94	–1.09	0.92	–1.13	0.89
0.05	–1.03	0.97	–1.05	0.95	–1.09	0.91
0.1	–0.98	1.02	–1.01	0.99	–1.05	0.96

Выводы. Анализ зависимости критической нагрузки от параметров ортотропии c_1, c_2 и жесткости основания ω показал, что увеличение жесткости основания, также как и модуля Юнга материала оболочки вдоль одного из выбранных главных направлений приводит к возрастанию критической нагрузки, в то время как увеличение сдвига (в модели Тимошенко) – к ее убыванию. При этом сравнительная скорость возрастания или убывания критической нагрузки в случаях 1 и 2 на разных интервалах может быть различной.

Как показывают графики на рис. 2, 3 и данные, приведенные в таблицах 1, 4, при фисированных значениях упругих параметров c_1, c_2 и параметров сдвига a_1, a_2 соответственно, критическая нагрузка в случае 2 превосходит по величине ту, что имеет место в случае 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 392 с.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости. – М.: ОНТИ, 1934. – 451 с.
3. Михеев А.В. Влияние сдвига на локальную устойчивость пологих ортотропных оболочек на упругом основании// Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. 2007. № 3. С. 137–143.
4. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. – М.: Наука, 1995. – 320 с.
5. Товстик П. Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании// Известия РАН. 2005. Вып. 1. С. 147–160.
6. Агаловян Л. А, Гулгазарян Л. Г. Асимптотические решения некласси-ческих краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек// Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 111–125.

A. V. Mikheev

LOCAL STABILITY OF PSEUDOSPHERICAL ORTHOTROPIC SHELLS ON ELASTIC BASE

The question of calculation of stability of pseudospherical orthotropic shells in Timoshenko and Kirchhoff – Love models is considered. The dependence of critical load parameter on shear coefficient and elastic characteristics of shell and base is obtained.

Pseudosphere, shells, calculation of stability