PACS 02.50.Cw, 02.50.Le

А.Ю. Голубин канд. физ.-мат. наук,
В.Н. Гридин д-р техн. наук,
А.И. Газов

(Центр информационных технологий в проектировании РАН, Московская обл., г. Одинцово)

Оптимизация дележа риска в статической модели с перестрахованием[1]

Статья посвящена решению задач оптимального выбора страховщиком дележей риска клиента на уровне страховщик-клиент и на уровне страховщик--перестраховщик. Показано, что в модели без дополнительных ограничений для страховщика всегда будет наиболее выгодным отказ от перестрахования и применение «stop-loss» стратегии страхования. В задаче, учитывающей ограничение на риск страхователя, оптимальным оказывается перестрахование эксцедента убытка (« excess of loss») и страхование, представляющее собой комбинацию «stop-loss» стратегии и франшизы. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности для параметров указанных стратегий; приведен пример, иллюстрирующий доказанные результаты в случае экспоненциальных функций полезности.

1. Введение

Предметом изучения в данной работе является так называемая модель индивидуального риска [?, ?] (или статическая модель страхования) с перестраховщиком, где страховая компания может одновременно выбирать как долю своего возмещения (дележ) ущерба страхователя, так и дележ этого риска с перестраховщиком. Критерием оптимальности страховщика служит ожидаемая полезность его финального капитала.

Проблема оптимизации дележа риска в страховании впервые изучалась в [?], где было показано, что оптимальным с точки зрения страховщика является перестрахование формы «stop-loss». В [?] было показано, в частности, что решение подобной задачи дележа риска между страховщиком и страхователем (т.е. клиентом) приводит к «stop-loss» дележу, если решение о выборе функции дележа принимает страховщик, и к страхованию с франшизой, если выбирающей стороной является страхователь. В близкой постановке эти результаты были обобщены на случай

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00146-а).

группы страхователей в [?]. Проблемы нахождения функций дележа в заранее заданном параметрическом классе франшиз были изучены для разных типов распределений суммарного риска в [?, ?]. За последние годы появились также результаты [?, ?] по нахождению оптимального дележа перестрахования для динамической модели страхования или процесса риска. В [?] исследована задача оптимизации перестрахования в классе «stop-loss» дележей, применяемых к риску каждого отдельного страхователя. Работа [?] посвящена минимизации вероятности разорения страховой компании в случае, когда страховщику доступны пропорциональное перестрахование и инвестирование в рисковый актив.

В отличие от предыдущих исследований, где разрешен выбор либо только стратегии страхования, либо только стратегии перестрахования, в настоящей работе изучается задача одновременной оптимизации дележей страхования и перестрахования. Рассматривается схема, в которой перестраховывается каждый отдельный риск (per-claim reinsurance), но не суммарный риск в целом от всей группы клиентов. Как будет показано, в рамках такой модели при естественном ограничении на риск страхователя оптимальным оказывается «stop-loss» перестрахование каждого риска, а оптимальные дележи страхования образуют определенный класс функций. При этом лучший с точки зрения страхователя дележ в этом классе имеет специальную форму: комбинация «stop-loss» страхования и франшизы. Найдены уравнения оптимальности для параметров стратегий страхования и перестрахования как в модели без ограничений, так и в модели, учитывающей ограничение на средний риск страхователя. Вывод условий оптимальности опирается на методы теории моментов и, частично, на результаты, полученные в этом направлении в [?]. В конце работы приведен численный пример, иллюстрирующий полученные результаты в случае экспоненциальной функции полезности.

2. Описание модели

Рассматривается модель страхового рынка, состоящего из страховщика, n клиентов и перестраховщика. Потенциальные ущербы (риски) клиентов – независимые неотрицательные случайные величины X_j, $j = 1, \ldots, n$. В дальнейшем эта группа клиентов предполагается однородной: все X_j имеют одинаковое распределение $F(x) \stackrel{def}{=} P\{X_j \leq x\}$. Через $T = \sup\{supp\, F\} \leq \infty$ будем обозначать верхнюю грань носителя распределения F, т.е. множества возможных значений риска X_1. Страховщик выбирает функцию дележа страхования $I(x)$ и функцию дележа перестрахования $A(x)$ из класса борелевских функций на $[0, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq I(x) \leq x$ и $0 \leq A(x) \leq x$. Эти неравенства означают, что возмещение не может быть отрицательным и не может превосходить величины ущерба. Случайная величина $I(X_j)$ есть возмещаемая j-му клиенту часть ущерба, $A(I(X_j))$ – доля, оплачиваемая страховщиком, и (соответственно) $I(X_j)-A(I(X_j))$ – ущерб перестраховщика. Премия P, полученная от клиента, и премия P_Π от страховщика за перестрахование определяются по формуле среднего значения, широко используемой в актуарной литературе [?, ?]: $P=(1+\alpha)E\,I(X_1)$ и $P_\Pi=(1+\alpha_\Pi)E\,[I(X_1)-A(I(X_1))]$. Здесь α и α_Π – заданные коэффициенты нагрузки, причем выполнено стандартное соотношение $0<\alpha<\alpha_\Pi$.

Предпочтения страховщика описываются его функцией полезности, а именно: риск Y_1 предпочтительнее риска Y_2 тогда и только тогда, когда $E\,u_0(Y_1)>E\,u_0(Y_2)$, где $u_0(x)$ – заданная функция полезности со стандартными свойствами: $u_0'>0$ и $u_0''<0$ (см., например, [?, ?]). Объектом изучения является задача выбора страховщиком оптимальных дележей страхования и перестрахования, критерием максимизации выступает ожидаемая полезность финального капитала страховщика

$$\max_{I,A} J[I,A], \tag{1}$$

где $J[I,A]\equiv E\,u_0\,(S)$ и $S=nP-nP_\Pi-\sum\limits_{j=1}^{n}A(I(X_j))$. Ниже будем предполагать конечность всех математических ожиданий, указанных в тексте. Это условие не является слишком ограничительным, например, существование $E\,X_j$ и $E\,u_0(-n(1+\alpha_\Pi)E\,X_1-\sum_1^n X_j)$ влечет конечность ожидаемой полезности $J[I,A]$ при любых дележах риска. Решению задачи (1) посвящен следующий раздел, в разделе 4 рассмотрена эта же задача, но с дополнительным ограничением на среднее значение риска $Y=X_1-I(X_1)$, остающегося после дележа у страхователя.

3. Оптимальный выбор дележей страхования и перестрахования

Следующая теорема дает характеризацию единственной пары оптимальных дележей I^* и A^* в задаче (1). Здесь и ниже совпадение дележей $(I_1,A_1)=(I_2,A_2)$ означает $I_1(X_1)=I_2(X_1)$ и $A_1(I_1(X_1))=A_2(I_2(X_1))$ почти наверное (п.н.).

Теорема 1 *Единственным решением задачи* (1) *являются функции* $A^*(x)\equiv x$ *и* $I^*(x)=x\wedge k^*$*, уровень*

$$k^*=\begin{cases} k^0, & k^0<T,\\ T, & \textit{иначе},\end{cases}$$

где k^0 *является минимальным корнем уравнения* $\psi(k) = 0$,

$$\psi(k) \stackrel{def}{=} (1+\alpha)E\, u_0'(S(k)) - E\ [u_0'(S(k))|X_1 = k]$$
$$\text{и}\ \ S(k) \stackrel{def}{=} n(1+\alpha)\int\limits_0^k (1-F(x))dx - \sum_{j=1}^n (X_j \wedge k).$$

Доказательство. Существование оптимальных дележей устанавливает следующая лемма.

Лемма 1 *Задача* (1) *имеет решение.*

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

Пусть (I^*, A^*) – решение задачи (1) (существующее в силу леммы 1), тогда A^* максимизирует функционал $J[I^*, A]$. Следовательно, производная

$$\frac{d}{d\lambda} J[I^*, \lambda A^* + (1-\lambda)A]\Big|_{\lambda=1} \geq 0$$

для любой (допустимой) функции дележа A. После дифференцирования получаем, что последнее неравенство означает

$$n\int\limits_0^T \eta(x)(A^*(x) - A(x))dF^*(x) \geq 0,$$

где обозначено $F^*(x) = P\{X_1^* \leq x\}$ с $X_1^* = I^*(X_1)$, функция $\eta(x) =$ $= (1+\alpha_\Pi)Eu_0'(W(X_1^*)) - Eu_0'(W(x))$ и $W(x) = nP^* - nP_\Pi^* - A^*(x) -$ $- \sum\limits_{j=2}^n A^*(X_j^*)$. Таким образом, $A^*(x)$ есть решение задачи максимизации интеграла

$$\max_A \int\limits_0^T \eta(x)A(x)dF^*(x) \tag{2}$$

на множестве измеримых функций $\{A : 0 \leq A(x) \leq x\}$. Такой тип задач изучается в теории моментов (см., например, [?]), и решение дается обобщенной леммой Неймана-Пирсона: $A^*(x)$ оптимальна в (2) тогда и только тогда, когда

$$A^*(x) = \begin{cases} 0, & \eta(x) < 0, \\ x, & \eta(x) > 0 \end{cases} \tag{3}$$

с точностью до множества нулевой меры F^*. В силу того, что функция $u_0'(\cdot)$ убывающая, имеем: $\eta(0) > 0$ и при возрастании x от 0 значение

$\eta(x)$ монотонно убывает (при этом $A^*(x) = x$ в силу (3)). После касания оси абсцисс в некоторой точке a^0 функция $\eta(x)$ не может принимать отрицательных значений, поскольку в противном случае для таких x (см. (3)) значение $A^*(x) = 0$, и тогда приходим к противоречию: $\eta(x) > 0$. Возрастание $\eta(x)$ от 0 также исключено, так как для таких x выполнено $A^*(x) = x$, что влечет убывание, а не возрастание $\eta(x)$. В итоге, $A^*(x) = x \wedge a^0$, причем $A^*(X_1^*) = X_1^*$ п.н. в случае, когда точка касания a^0 окажется за $T^* \stackrel{def}{=} \sup\{supp\, F^*\}$ – верхней гранью возможных значений X_1^*.

Рассмотрим теперь задачу $\max\limits_I J[I, A^*]$, где, как показано, $A^*(x) = x \wedge a^0$. Необходимое условие оптимальности

$$\frac{d}{d\lambda} J[\lambda I^* + (1-\lambda)I, A^*]\Big|_{\lambda=1} \geq 0$$

после дифференцирования можно записать как

$$\int\limits_0^T \xi(x)(I^*(x) - I(x))dF(x) \geq 0,$$

где $\quad \xi(x) = \mathbf{1}\{I^*(x) < a^0\}\,[(1+\alpha_\Pi)Eu_0'(Z(X_1)) - Eu_0'(Z(x))] -$
$- (\alpha_\Pi - \alpha)E\,u_0'(Z(X_1)),\ Z(x) = nP^* - nP_\Pi^* - A^*(I^*(x)) - \sum\limits_{j=2}^n A^*(X_j^*)$ и $\mathbf{1}\{\cdot\}$ обозначает индикаторную функцию. Тогда аналогично первой части доказательства I^* максимизирует интеграл $\int\limits_0^T \xi(x)I(x)dF(x)$ и по лемме Неймана-Пирсона

$$I^*(x) = \begin{cases} 0, & \xi(x) < 0, \\ x, & \xi(x) > 0. \end{cases} \qquad (4)$$

При возрастании x от 0 значение $\xi(x) > 0$ монотонно убывает (при этом $I^*(x) = x$ в силу (4)) и $\mathbf{1}\{I^*(x) < a^0\} = 1$. В силу того, что $\alpha < \alpha_\Pi$, выполняется неравенство $\xi(x) < \eta(x)$, и поэтому точка k^0 касания функцией $\xi(x)$ оси абсцисс лежит левее точки a^0. Повторением, применительно к функции $\xi(x)$, рассуждений, использованных в задаче (2), получаем, что $\xi(x) = 0$ при $x > k^0$. Таким образом, $I^*(x) = x \wedge k^0$ и поскольку $a^0 > k^0$, то $A^*(I^*(X_1)) = I^*(X_1) = X_1 \wedge k^0$ п.н., страховщик не делит свой риск $I^*(X_1)$ с перестраховщиком.

Для получения уравнения, которому удовлетворяет k^0, подставим в функцию ξ выражения $X_j \wedge k$ вместо $A^*(X_j^*)$ и k вместо $A^*(I^*(x))$. С учетом того, что премия $(1+\alpha)E\,X_1\wedge k=(1+\alpha)\int\limits_0^k \bar F(x)dx$, где $\bar F(x)\overset{def}{=}1-F(x)$, получившееся уравнение имеет вид $\psi(k)=0$, где $\psi(k)$ задана в формулировке теоремы 1. Искомая точка касания (первого) функцией $\xi(x)$ оси абсцисс определяется как минимальный корень этого уравнения. Принимая во внимание вырожденный случай $k^0>T=\sup\{supp\,F\}$, т.е. $\psi(k)>0$ на $[0,T]$, означающий, что весь риск клиента удерживается страховщиком $I^*(X_1)=X_1$, приходим к выражению $I^*(x)=x\wedge k^*$, приведенному в теореме 1.

Единственность оптимальной стратегии $A^*(x)=x$ отказа от перестрахования уже была установлена выше. Единственность оптимальной стратегии страхования $I^*(x)$ следует тогда из единственности решения задачи $\max\limits_I J[I,A^*]$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что максимизация по I функционала $J[I,A^*]$ эквивалентна максимизации $J[I]\equiv E\,u_0(n(1+\alpha)E\,I(X_1)-\sum\limits_{j=1}^n I(X_j))$, который строго вогнут по I в силу строгой вогнутости функции полезности $u_0(x)$. Действительно, при $\lambda\in(0,1)$ неравенство $J[\lambda I_1+(1-\lambda)I_2]\geq\lambda J[I_1]+$ $+(1-\lambda)J[I_2]$ обращается в равенство лишь в случае $I_1(X_1)-I_2(X_1)=$ $=(1+\alpha)E[I_1(X_1)-I_2(X_1)]$ п.н., но тогда $I_1(X_1)=I_2(X_1)$ п.н. Таким образом, задача $\max\limits_I J[I,A^*]$ не может иметь более одного решения, и из леммы 1 получаем, что оно существует и единственно. □

Теорема 1 устанавливает, что лучшей стратегией страхования будет «stop-loss» дележ $I^*(x)=x\wedge k^*$ (малые ущербы оплачиваются полностью, если же $X_j>k^*$, то j-му клиенту возмещается лишь сумма k^*). Вырожденный случай, когда значение уровня k^*, определяемое в теореме 1, окажется равным T, означает, что значение коэффициента нагрузки α достаточно велико и страховщик оставляет весь риск X_1 себе, отказываясь от дележа с клиентом. Наиболее выгодным для страховщика является отказ от перестрахования. Последний результат представляется неожиданным с точки зрения страховой практики, где договоры на перестрахование, как известно, — обычное явление. Причина состоит в том, что в рассмотренной модели учтены интересы лишь страховщика, который здесь оказывается единственной стороной, принимающей решение. Принимая во внимание, что цена перестрахования выше цены страхования ($\alpha_\Pi>\alpha$), он отказывается от перестрахования, выбирая самую удобную для него форму «stop-loss» дележа страхования. В этом случае клиенту остается «хвост» распределения его риска, что часто является нежелательным с его точки зрения, поскольку все самые большие значения ущерба клиенту придется погашать самому. Более адекватная в этом смысле модель должна учитывать дополнительные ограничения на риск, остающийся клиенту.

4. Случай с ограничением на риск страхователя

Пусть допустимыми являются только те дележи страхования $I(x)$, при которых выполняется ограничение сверху на средний риск, остающийся у клиента после страхования: $E\,Y \le C$, где $Y = X_1 - I(X_1)$ и $C \in (0, E\,X_1)$ – заданная константа. Это ограничение можно эквивалентно переписать в форме ограничения снизу на риск страховщика: $E\,I(X_1) \ge M$, где $M = E\,X_1 - C$. В этом разделе будет рассмотрена задача полезности страховщика с дополнительным ограничением:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\limits_{I,A} J[I,A], \\ E\,I(X_1) \ge M. \end{array} \right. \tag{5}$$

Введем обозначения: $M_1 = E\,X_1 \wedge k^*$ и $M_2 = E\,X_1 \wedge a^*$, где k^* определяется в теореме 1 и

$$a^* = \left\{ \begin{array}{ll} a^0, & \text{если } a^0 < T, \\ T, & \text{иначе,} \end{array} \right.$$

где a^0 – минимальный корень уравнения $\phi(a) = 0$,

$$\phi(a) \stackrel{def}{=} (1+\alpha_{\Pi})E\,u_0'(S_M(a)) - E\,[u_0'(S_M(a))|X_1 = a] \tag{6}$$

и $S_M(a) = n(1+\alpha)M - n(1+\alpha_{\Pi})[M - \int\limits_0^a \bar{F}(x)dx] - \sum\limits_{j=1}^{n}(X_j \wedge a)$.

Теорема 2 *Дележи $A^*(x)$ и $I^*(x)$ являются решением задачи* (5) *тогда и только тогда, когда*

1) *при* $M \le M_1$
$A^*(x) = x$ *и* $I^*(x) = x \wedge k^*$*;*

2) *при* $M_1 < M \le M_2$
$A^*(x) = x$ *и* $I^*(x) = x \wedge k_M$*, где* k_M *есть корень уравнения* $\int\limits_0^k \bar{F}(t)dt = M$;

3) *при* $M > M_2$
$A^*(x) = x \wedge a^*$ *и* $I^* \in \mathcal{I}^* \stackrel{def}{=} \{I : x \wedge a^* \le I(x) \le x, E\,I(X_1) = M\}$.

Доказательство. 1. Утверждение теоремы тривиально следует из того, что указанные дележи (A^*, I^*) доставляют оптимум в (1), т.е. в задаче максимизации на более широком множестве.

2. Заметим, что повторением рассуждений в доказательстве леммы 1 легко показать, что ее утверждение о существовании решения сохраняет силу и для задачи (5). Как и в теореме 1, зафиксировав оптимальный

дележ I^*, получаем, что $A^*(x) = x \wedge a^*$, где $a^* = a^0 \wedge T^*$, a^0 – точка первого касания оси абсцисс монотонно убывающей функции $\eta(x)$, которая определена в теореме 1.

Рассмотрим теперь задачу максимизации $\max_I J[I, A^*]$ по множеству дележей, удовлетворяющих ограничению $E\,I(X_1) \geq M$. Следуя доказательству второй части теоремы 1, необходимое условие оптимальности I^* можно записать как $\int_0^T \xi(x)(I^*(x) - I(x))dF(x) \geq 0$ для любого допустимого дележа I, где функция $\xi(x)$ определяется так же, как в теореме 1: $\xi(x) = \mathbf{1}\{I^*(x) < a^0\}\,[(1+\alpha_\Pi)Eu_0'(Z(X_1)) - Eu_0'(Z(x))] -$
$-(\alpha_\Pi - \alpha)E\,u_0'(Z(X_1))$, $Z(x) = nP^* - nP_\Pi^* - A^*(I^*(x)) - \sum_{j=2}^n A^*(X_j^*)$. Тогда I^* есть решение задачи $\max_I \int_0^T \xi(x)I(x)dF(x)$ при дополнительном ограничении $\int_0^T I(x)dF(x) \geq M$. Вводя функцию Лагранжа для такой линейной задачи, получим, что при некотором $\lambda \geq 0$ дележ I^* максимизирует $\int_0^T \xi(x)I(x)dF(x) + \lambda\int_0^T I(x)dF(x)$ на множестве $\{I\,:\,0 \leq I(x) \leq x\}$. По лемме Неймана-Пирсона

$$I^*(x) = \begin{cases} 0, & \xi(x) + \lambda < 0, \\ x, & \xi(x) + \lambda > 0. \end{cases} \tag{7}$$

При возрастании x от нуля значение $\xi(x) + \lambda$ монотонно убывает, оставаясь положительным, при этом $I^*(x) = x$ в силу (7). Обозначим точку касания оси абсцисс через k_M и покажем, что $k_M \leq a^0$. Пусть $k_M > a^0$, тогда при $x \geq a^0$ функция $\xi(x) + \lambda$ остается равной $-(\alpha_\Pi -$ $-\alpha)E\,u_0'(Z(X_1)) + \lambda > 0$. Из (7) получаем $I^*(x) \equiv x$ и, следовательно, $E\,I^*(X_1) = E\,X_1 > M$. В силу условия дополняющей нежесткости тогда $\lambda = 0$, что противоречит положительности $\xi(x) + \lambda$.

После попадания в нуль функция $\xi(x) + \lambda$ не может принимать ни отрицательных, ни положительных значений. Действительно, если $\xi(x) + \lambda < 0$, то для таких x значение $I^*(x) = 0$ и $\xi(x) + \lambda = \xi(0) + \lambda > 0$. Если же $\xi(x) + \lambda > 0$, то $I^*(x) = x$. Последнее равенство влечет убывание, а не возрастание $\xi(x) + \lambda$ от нуля: на интервале $[k_M; a^0]$ это следует из убывания функции $\eta(x) = (1+\alpha_\Pi)Eu_0'(Z(X_1)) - Eu_0'(Z(x))$, умножаемой на индикатор (см. определение $\xi(x)$); на интервале $(a^0; T]$ это следует из того, что $\xi(x) + \lambda = -(\alpha_\Pi - \alpha)E\,u_0'(Z(X_1)) + \lambda \leq \xi(k_M) + \lambda$ в силу неравенства $\eta(k_M) \geq 0$ (напомним, что $\eta(a^0) = 0$ и $k_M \leq a^0$).

Таким образом, $I^*(x) = x \wedge k_M$; причем $k_M > k^0$ поскольку обратное неравенство ведет к противоречию: $M \leq M_1$. Учитывая, что k^0 – нуль функции $\xi(x)$, имеем $\lambda > 0$. Тогда $E\, I^*(X_1) = M$, поэтому уровень k_M определяется из уравнения $X_1 \wedge k = M$, т.е. $\int\limits_0^k \bar{F}(t)dt = M$. Как было показано, $k_M \le a^0$, следовательно $A^*(I^*(X_1)) = I^*(X_1) = X_1 \wedge k_M$ п.н.

3. Рассуждая так же, как в п. 2, получаем, что оптимальная стратегия перестрахования $A^*(X_1^*) = X_1^* \wedge a^0$ п.н., а оптимальная стратегия страхования I^* определяется выражением (7). При возрастании x от 0, в силу (7) $I^*(x) = x$, и функция $\xi(x) + \lambda$ монотонно убывает вплоть до точки касания x' оси абсцисс. В данном случае, когда $E\, I^*(X_1) \ge M > M_2$, эта точка необходимо совпадает с a^0. Действительно, случай $x' < a^0$ уже был рассмотрен в п. 2 и здесь невозможен. Если же $x' > a^0$, то на $[a^0; x')$ функция $\xi(x) + \lambda$ остается равной $-(\alpha_\Pi - \alpha)E\, u_0'(Z(X_1)) + \lambda > 0$, и из (7) получаем $I^*(x) \equiv x$. Тогда $E\, I^*(X_1) = E\, X_1 > M$ и в силу условия дополняющей нежесткости $\lambda = 0$, что делает невозможной положительность $\xi(x) + \lambda = -(\alpha_\Pi - \alpha)E\, u_0'(Z(X_1))$.

Покажем, что $I^*(x) \ge a^0$ при $x \ge a^0$. Предположим противное, тогда значения $\xi(x) + \lambda$ становятся положительными и (см. (7)) $I^*(x) = x$ — противоречие с предположением $I^*(x) < a^0$. Докажем, что $E\, I^*(X_1) = M$. Пусть $E\, I^*(X_1) > M$, тогда в силу условия дополняющей нежесткости $\lambda = 0$ и поэтому точкой касания оси абсцисс будет $k^0 < a^0$, что невозможно (см. выше).

Итак, показано, что оптимальные дележи $A^*(x) = x \wedge a^0$ и $I^* \in \mathcal{I}^* = \{I :\, x \wedge a^0 \le I(x) \le x, E\, I(X_1) = M\}$. Все такие пары дележей доставляют одно и то же значение (оптимум) целевому функционалу $J[I^*, A^*]$, поскольку для всех $I^* \in \mathcal{I}^*$ функционал зависит только от среднего $E\, I^*(X_1) = M$ и $A^*(I^*(X_1)) = X_1 \wedge a^0$. Уравнение для получения значения a^0 получается подстановкой в функцию η выражения $X_j \wedge a$ вместо $A^*(X_j^*)$ и a вместо $A^*(I^*(x))$. В итоге, a^0 есть минимальный корень уравнения $\phi(a) = 0$, где $\phi(a)$ определена в (6). Учитывая вырожденные случаи, когда $\xi(x) > 0$ либо $\eta(x) > 0$ на $[0, T)$, т.е. заменяя k^0 и a^0 на k^* и a^*, получаем утверждение теоремы 2. $\square$

Доказанная теорема, в частности, утверждает, что при увеличении левой границы M допустимых средних $E\, I(X_1)$ значение среднего оптимального риска страховщика $E\, I^*(X_1)$ остается сначала равным M_1 (точка, отвечающая задаче без ограничений), а затем «прилипает» к левой границе M. Случай, когда заданное значение уровня M достаточно мало, означает, что страховщик отказывается от перестрахования, выбирая оптимальный "stop-loss" дележ с клиентом. Если граница среднего риска страховщика M достаточно велика (п. 3) — т.е. достаточно мала правая граница среднего риска страхователя $C = E\, X_1 - M$ — то оптимальный дележ перестрахования $A^*(x) = x \wedge a^*$ (так называемое перестрахование эксцедента убытка) является единственным, а оптимальные дележи страхования I^* образуют целый класс $\mathcal{I}^*$ всех борелевских функций, графики которых лежат между биссектрисой и графиком $x \wedge a^*$, причем $E\, I^*(X_1) = M$.

Для выбора «лучшего» дележа из этого класса предлагается использовать известный в теории принятия решений принцип лексикографического упорядочивания, который в данной модели будет состоять в том, чтобы выбрать из $\mathcal{I}^*$ дележ, максимизирующий ожидаемую полезность другого участника сделки, а именно клиента. Ниже будет рассмотрена задача

$$\max_{I \in \mathcal{I}^*} J[I], \tag{8}$$

где $J[I] = E\, u_1\left(-(1+\alpha)M + I(X_1) - X_1\right)$ и $u_1(x)$ – заданная функция полезности клиента такая, что $u_1' > 0$ и $u_1'' < 0$.

Теорема 3 *Пусть $M > M_2$. Единственным решением задачи* (8) *является*

$$I^{**}(x) = (x \wedge a^*) \vee (x - q^*), \tag{9}$$

где q^* – решение уравнения $E\, I^{**}(X_1) = M$, т.е. $\int\limits_0^{a^*} \bar{F}(x)dx +$

$+ \int\limits_{a^*+q}^{T} \bar{F}(x)dx = M$.

Доказательство. В силу вогнутости $J[I]$ необходимое и достаточное условие оптимальности допустимого дележа I^{**} имеет вид

$$\frac{d}{d\lambda} J[\lambda I^{**} + (1-\lambda)I]\bigg|_{\lambda=1} \geq 0$$

для любого $I \in \mathcal{I}^*$. После дифференцирования получаем, что последнее неравенство эквивалентно неравенству $\int\limits_0^T \theta(x)(I^{**}(x) - I(x))dF(x) \geq 0$, где $\theta(x) = u_1'\left(-(1+\alpha)M + I^{**}(x) - x\right)$. Таким образом, $I^{**}(x)$ есть решение задачи

$$\max_{I \in \mathcal{I}^*} \int\limits_0^T \theta(x) I(x) dF(x).$$

Применение обобщенной леммы Неймана-Пирсона для этой задачи дает: допустимый дележ I^{**} оптимален тогда и только тогда, когда $I^{**}(x) = x$ при $x \in [0, a^*]$ и $\exists \lambda$:

$$I^{**}(x) = \begin{cases} a^*, & \theta(x) + \lambda < 0, \\ x, & \theta(x) + \lambda > 0 \end{cases} \qquad \text{при } x > a^*.$$

Легко видеть, что при движении x вправо от a^* значение $I^{**}(x)$ остается равным a^*, т.к. функция $\theta(x)+\lambda$ возрастает от отрицательного значения в точке $x = a^*$ до пересечения оси абсцисс в некоторой точке $a^* + q^*$. Действительно, если $\theta(a^*)+\lambda > 0$, то $I^{**}(x) \equiv x$ и $E\, I^{**}(X_1) = E\, X_1 > M$, что невозможно в задаче (8). Если же $\theta(a^*) + \lambda = 0$, то для $x \geq a^*$ $\theta(x) + \lambda$ остается равной нулю, что ведет к противоречию: $I^{**}(x) - x = 0$ и $E\, I^{**}(X_1) = E\, X_1 > M$.

При движении x вправо от точки $a^* + q^*$ значение $\theta(x) + \lambda$ остается равным нулю, при этом $I^{**}(x) - x$ не меняется, т.е. $I^{**}(x) = x - q^*$ для $x \geq a^* + q^*$. Условие допустимости $E\, I^{**}(X_1) = M$, т.е. $\int\limits_0^{a^*} \bar{F}(x)dx + \int\limits_{a^*+q^*}^{T} \bar{F}(x)dx = M$, однозначно определяет значение q^*. □

Найденный в теореме 3 оптимальный с точки зрения клиента дележ страхования $I^{**}(x) = (x \wedge a^*) \vee (x - q^*)$ представляет собой комбинацию stop-loss дележа $x \wedge a^*$ и безусловной франшизы $(x - [a^* + q^*])_+$, где $(y)_+$ обозначает $\max\{y, 0\}$. Пример такой функции дележа с уровнями $a = 1$ и $d = a + q = 3$ приведен на рис. 1.

При таком страховании клиенту остается «средняя» доля его первоначального риска $Y = X_1 - I^{**}(X_1) = (X_1 - a^*)_+ \wedge q^*$, а страховщику достается «хвост» распределения $F(x)$. Эта ситуация более привлекательна с точки зрения клиента, нежели "stop-loss"страхование $I^*(x) = x \wedge k^*$ в задаче без ограничений, когда страховщик оплачивает все мелкие ущербы и платит лишь пороговую сумму k^* в случае больших выплат. Параметры a^* и q^* в оптимальном дележе I^{**} не зависят от функции полезности страхователя u_1, теорема 3 использует лишь свойство вогнутости этой функции. Интересно отметить, что задача минимизации дисперсии риска клиента $Y = X_1 - I(X_1)$ на множестве $\mathcal{I}^*$ приводит (см. [**?**]) к такому же дележу $I^{**}(x)$.

После перестрахования доля риска, остающаяся у страховщика, есть $A^*(I^{**}(X_1)) = X_1 \wedge a^*$, а перестраховщику достается $I^{**}(X_1) - (X_1 \wedge a^*) = (X_1 - (a^* + q^*))_+$. Такой договор перестрахования означает погашение страховщику «больших» ущербов, начиная с уровня $a^* + q^*$, причем выплата равна значению X_1 за вычетом этой константы.

5. Пример

Пусть распределение $F(x)$ ущерба клиента есть равномерное распределение на $[0, 10]$, страховщик имеет экспоненциальную функцию полезности $u_0(x) = c^{-1}(1 - \exp(-cx))$ с коэффициентом неприятия риска $c = 0,1$. Ниже будет рассмотрено применение теорем 2 и 3 при различных значениях M и коэффициентов нагрузки α и α_Π. Для нахождения уровня удержания страховщика k^* выпишем выражение для функции $\psi(k)$. Обозначим $E_1 = \int\limits_0^k \bar{F}(x)dx = k - 0,05k^2$ и $E_2 = E\ \exp\{c(X_j \wedge k)\} =$ $= \exp(0,1k)[2 - 0,1k] - 1$, тогда уравнение $\psi(k) = 0$, т.е.

$$(1+\alpha)E\, u_0'(S(k)) - E\ [u_0'(S(k))|X_1 = k] = 0,$$

где $S(k)$ определена в теореме 1, имеет вид

$$(1+\alpha)\exp\{-cn(1+\alpha)E_1\}E_2^n - \exp\{-cn(1+\alpha)E_1\}E_2^{n-1}e^{ck} = 0$$

и сводится к уравнению

$$0,1k + \exp(-0,1k) = 2 - (1+\alpha)^{-1}. \tag{10}$$

Результаты численного расчета единственного корня этого уравнения и величины $M_1 = E\, X_1 \wedge k^*$ при различных коэффициентах нагрузки приведены в табл. 1

Таблица 1

α	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
k^*	4,589	5,582	6,386	7,658	8,644	9,444	10
M_1	3,536	4,021	4,347	4,726	4,908	4,984	5

По теореме 2 если заданное значение $M \le M_1$, то оптимальный дележ страхования $I^*(x) = x \wedge k^*$ и $A^*(x) = x$. Значение $\alpha = 0,582$ дает $k^* = 10\,(= T)$, и при дальнейшем увеличении нагрузки k^* остается равным 10 (последний столбец табл. 1).

Уравнение $\phi(a) = 0$ для определения уровня a^* в п. 3 теоремы 2 записывается с помощью тех же рассуждений, что и при выводе (10), в виде $0,1k + \exp(-0,1k) = 2 - (1+\alpha_\Pi)^{-1}$. После нахождения a^* определяем $M_2 = a^* - 0,05(a^*)^2$ и если заданное $M \in (M_1, M_2]$, получаем согласно п. 2 теоремы 2: $I^*(x) = x \wedge k_M$ с $k_M = 10(1 - \sqrt{1 - 0,2M})$. Например если $\alpha = 0,1$ и $\alpha_\Pi = 0,2$, то $M \in (3,536; 4,347]$ и при $M = 4$ значение $k_M = 5,527$. В случае $M > M_2$ оптимальный дележ перестрахования будет $A^*(x) = x \wedge a^*$, а оптимальный с точки зрения клиента дележ страхования $I^{**}(x) = (x \wedge a^*) \vee (x - q^*)$ (см. (9)). Результаты расчета уровней a^* и q^* при $\alpha = 0,1\,(< \alpha_\Pi)$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

$M = 4.5$			$M = 4.7$		
α_Π	0.15	0.2	α_Π	0.15	0.2
a^*	5.582	6.386	a^*	5.582	6.386
$a^* + q^*$	6.914	8.252	$a^* + q^*$	6.323	7.344

Увеличение M, левой границы среднего риска страховщика $E\,I(X_1)$, не именяет в данном случае уровень a^* и уменьшает второй уровень a^*+q^*. Последнее означает увеличение доли риска $(X_1-(a^*+q^*))_+$, погашаемой перестраховщиком.

Замечание 1. Задачу нахождения «лучшего» дележа из множества оптимальных дележей страхования $\mathcal{I}^*$ можно переформулировать иначе, чтобы критерием этого выбора стала ожидаемая полезность не клиента, а другого участника: перестраховщика. Например, такая задача максимизации полезности от дележа индивидуального риска имеет вид $\max_{I\in\mathcal{I}^*}\{E\,u_\Pi(W)\}$, где u_Π – возрастающая строго вогнутая функция полезности перестраховщика, $W=(1+\alpha_\Pi)(M-E[X_1\wedge a^*])-I(X_1)+X_1\wedge a^*$. Рассуждениями, полностью аналогичными приведенным в теореме 3, легко показать, что решением является $I^{**}(x)=x\wedge(a^*+r^*)$, где r^* определяется уравнением $\int\limits_0^{a^*+r^*}\bar{F}(t)dt=M$. Риск перестраховщика тогда равен $I^{**}(X_1)-X_1\wedge a^*=((X_1-a^*)\wedge r^*)_+$.

Замечание 2. Касаясь возможных модификаций рассмотренной в статье модели, можно отметить два направления. Первое состоит в том, чтобы рассматривать задачу оптимизации полезности страховщика при ограничении на средний риск перестраховщика, а не клиента. Такое изменение позволит учесть нежелание перестраховщика принимать слишком большие риски и, с другой стороны, установить страховщику допустимую для него цену перестрахования (если премия P_Π определяется, как и ранее, по формуле среднего значения). Другой вариант – это использование «жесткого» ограничения, выполняющегося с вероятностью единица, на риск клиента (либо перестраховщика) вместо ограничения на его среднее значение.

6. Заключение

В статье решена задача поиска оптимального дележа риска, с одной стороны, между страховщиком и группой клиентов и, с другой стороны, между страховщиком и перестраховщиком. В последнем случае использована схема индивидуального престрахования, в которой перестраховывается каждый отдельный риск (per-claim reinsurance). Новизна постановки задачи заключается в том, что страховщиком одновременно решаются задачи выбора стратегий страхования и перестрахования. Показано, что при естественном ограничении сверху на средний риск страхователя оптимальным оказывается "stop-loss" перестрахование каждого риска, а оптимальные дележи страхования образуют целый класс функций. При этом лучший с точки зрения страхователя дележ в этом классе имеет специальную форму: комбинация "stop-loss" страхования и франшизы. Найдены уравнения оптимальности для параметров стратегий страхования и перестрахования как в модели без ограничений, так и в модели, учитывающей ограничение на средний риск страхователя. Вывод условий оптимальности, в отличие от традиционного подхода, опирается на методы теории моментов (лемма Неймана-Пирсона). Практическое использование результатов предполагает оптимизацию выбора схемы дележа "больших" рисков (включая и тарифы страхования), связанных с огромными потенциальными ущербами. Это, в первую очередь, риски, обусловленные природными и техногенными катастрофами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Обозначим через $\{I_n, A_n\}$ максимизирующую последовательность в задаче (1), т.е.

$$\lim_{n\to\infty} J[I_n, A_n] = J^* \stackrel{def}{=} \sup_{(I,A)} J[I, A].$$

По теореме Хэлли существует подпоследовательность пар $\{I_k(X_1), A_k(I_k(X_1))\}$, слабо сходящаяся к некоторому пределу (ρ, ε). Для доказательства того, что (ρ и ε) есть собственные случайные величины или, иначе, $P\{\rho < \infty, \varepsilon < \infty\} = 1$, достаточно заметить, что в силу определения функций дележа $I_k(X_1) \leq X_1$ и $A_k(I_k(X_1)) \leq X_1$ п.н. Поскольку ρ измерима относительно сигма-алгебры $\sigma(X_1)$, порожденной X_1, и $0 \leq \rho \leq X_1$, то эта случайная величина может быть представлена как $\rho = I^*(X_1)$ для некоторой борелевской функции $0 \leq I^*(x) \leq x$. Аналогично другой предел может быть представлен в виде $\varepsilon = A^*(I^*(X_1))$, где $A^*(x)$ – дележ перестрахования. Равенство $J^* = J[I^*, A^*]$ теперь следует из слабой сходимости $\{I_k(X_1), A_k(I_k(X_1))\}$, непрерывности функции полезности u_0 и конечности ожидаемой полезности $J[I^*, A^*]$. $\square$

Список литературы

[1] *Голубин А.Ю.* Математические модели в теории страхования: построение и оптимизация. М.: АНКИЛ, 2003.

[2] *Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J.* Actuarial Mathematics. Itaca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986.

[3] *Arrow K.J.* Essays in the Theory of Risk Bearing. Chicago: Wyley and Sons, 1971.

[4] *Raviv A.* The Design of an Optimal Insurance Policy // Amer. Economic Review. 1979. P. 84-96.

[5] *Golubin A.Y.* An Optimal Insurance Policy in the Individual Risk Model Seen as a Bargaining Game // Game Theory and Applications. 2007. V. 11. P. 75-86.

[6] *Schlesinger H.* The Optimal Level of Deductibility in Insurance Contracts // J. Risk and Insurance. 1981. V. 48. P. 465-481.

[7] *Hipp C., Vogt M.* Optimal Dynamical XL Reinsurance // ASTIN Bulletin. 2003. V. 33. P. 193-207.

[8] *Schmidli H.* On Minimizing the Ruin Probability by Investment and Reinsurance // Annals of Applied Probability. 2002. V. 12. P. 890-907.

[9] *Голубин А.Ю.* О выпуклой задаче оптимизации в пространстве мер с моментными ограничениями // А и Т. 2000. Т. 61. Вып. 8. С. 1270-1279.

[10] *Бенинг В.Е., Ротарь В.И.* Введение в математическую теорию страхования // Обозр. прикл. и промышл. математики. 1994. Т. 1. Вып. 5. С. 698-779.

[11] *Beard R.E., Pentikainen T., Pessonen E.* Risk Theory. London: Chapman and Hall, 1978.

[12] *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.

[13] *Golubin A.Y.* Optimal Insurance and Reinsurance Policies in the Risk Process // ASTIN Bulletin. 2008. V. 38(2). P. 170-179.

[14] *Ширяев А.Н.* Актуарное и финансовое дело: современное состояние и перспективы развития // Обозр. прикл. и промышл. математики. 1994. Т. 1. Вып. 5. С. 780-820.

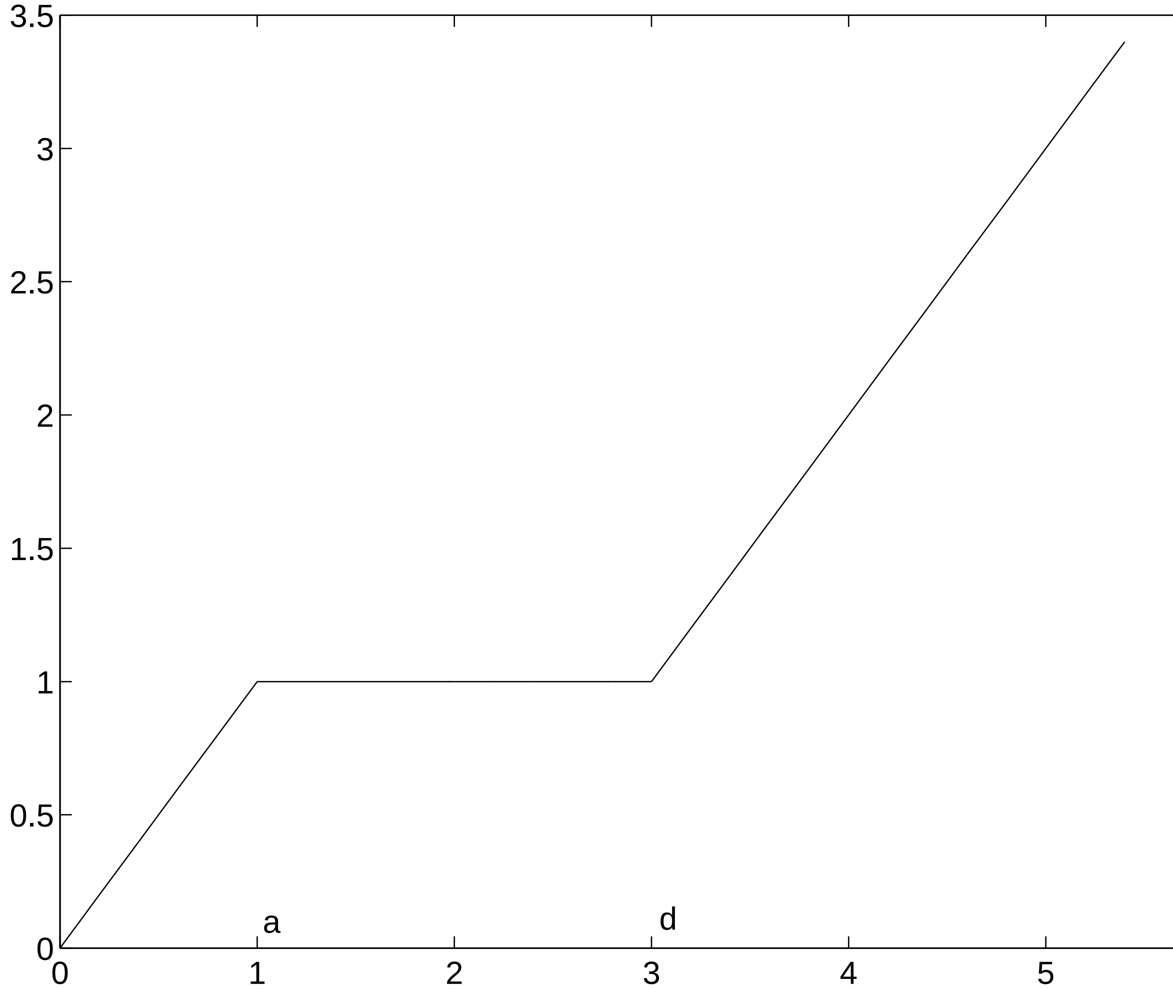

Рис. 1: Оптимальный дележ страхования $I^{**}(x)$.