УДК 519.17

ГРАНИЧНЫЕ КЛАССЫ ДЛЯ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ

© 2008 г.
Д.С. Малышев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

dsmalyshev@rambler.ru

Поступила в редакцию 01.09.2008

Рассматривается понятие граничного класса, которое является полезным инструментом для анализа вычислительной сложности задач на графах. Исследуются два конкретных класса графов, и приводятся задачи, для которых эти классы являются граничными.

Ключевые слова: вычислительная сложность, граничный класс.

Введение

Данная работа является продолжением работы [1]. В этой работе исследовалась сложность различных задач на графах для наследственных классов графов, т.е. классов графов, замкнутых относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный класс **X** определяется множеством своих запрещённых порождённых подграфов **S**, при этом принята запись **X**=*Free*(**S**). Если **S** является минимальным по включению, то пишем **S**=*Forb*(**X**). Если *Forb*(**X**) конечно, то класс **X** называется конечно определённым.

В работе [2] было введено понятие П-простого класса графов как наследственного класса с полиномиально разрешимой задачей П, а также понятие П-сложного класса как наследственного класса графов с NP-полной задачей П. В [1] понятие П-сложного класса было уточнено, и теперь под П-сложным классом понимается наследственный класс, не являющийся П-простым. Класс графов называется П-предельным, если он является пересечением убывающей последовательности П-сложных классов. Минимальный по включению П-предельный класс называется П-граничным. Следующее утверждение раскрывает значение понятия П-граничного класса и может быть доказано аналогично теореме 4 работы [3].

Теорема 1. *Если* $P \neq NP$, *то конечно определённый класс графов* **X** *является* П*-сложным тогда и только тогда*, *когда* **X** *содержит какой-нибудь* П*-граничный* класс.

В [1] рассматривалась общая задача о наибольшем подграфе и были получены достаточные условия граничности некоторого конкретного класса для этой задачи. Интерес к исследованию случаев граничности этого класса подсказан результатами работы [2], из которых следует его граничность для 9 задач на графах. Речь идёт о классе **T** – классе графов, у которых каждая компонента связности является деревом не более чем с 3 листьями. В [1] доказано, что если $P \neq NP$, то **T** является граничным для задачи о наибольшем планарном подграфе и для задачи о наибольшем двудольном подграфе. Утверждения данной работы и некоторые цитируемые результаты также справедливы при выполнении гипотезы $P \neq NP$. В дальнейшем всегда предполагается выполнение этого условия, поэтому мы не будем его включать явно в формулировки соответствующих результатов.

В настоящей работе помимо класса **T** рассматривается класс **D** – класс графов, каждая компонента связности которых либо является простым путём, либо получается установлением биекции между вершинами треугольника и тремя концевыми вершинами трёх путей с последующим отождествлением вершин из одной биективной пары. Интерес к классу **D** подсказан результатами работы [2], из которых следует граничность класса **D** для 4 задач на графах. В данной работе доказывается несколько условий граничности класса **D** и одно достаточное условие граничности классов **T** и **D**. В работе также рассматривается общая задача о наибольшем порождённом подграфе и доказывается достаточное условие граничности **D** для этой задачи. Наконец, в работе приводятся некоторые новые случаи граничности классов **T** и **D**.

Графом рёбер графа G (обозначение $L(G)$) называется граф, множество вершин которого соответствует рёбрам G, причём любые две вершины являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им рёбра в G являются смежными. Рёберным графом G называется граф, изоморфный графу рёбер $L(H)$ некоторого графа H. Множество графов, изоморфных графам рёбер графов класса $\mathbf{X}$, обозначается $L(\mathbf{X})$.

kG обозначает граф, получаемый объединением k непересекающихся копий графа G, $T_{i,j,k}$ – дерево с тремя листьями, находящимися от вершины степени 3 на расстояниях i, j, k соответственно, $D_{i,j,k}=L(T_{i+1,j+1,k+1})$, *мост* B_k – граф, получаемый соединением вершин степени 2 у двух копий графа $K_{1,2}$ путём длины k, *гантель* H_k – граф рёбер графа B_{k+1}.

Условия граничности классов T и D

В работе [1] был доказан следующий критерий граничности.

Теорема 2. *П-предельный класс* $\mathbf{A}$ *является граничным тогда и только тогда, когда для любого* $G\in\mathbf{A}$ *существует такое конечное множество графов* $\mathbf{X}\subseteq Forb(\mathbf{A})$, *что класс* $Free(\mathbf{X}\cup\{G\})$ *является П-простым.*

В той же работе [1] для $k\geq 1, p\geq 1, b\geq 3$ рассматривался класс

$$\mathbf{U}(k,p,b) = Free(\{B_i\colon 1\leq i\leq b\}\cup \cup\{C_i\colon 3\leq i\leq b\}\cup\{K_{1,4},kT_{p,p,p}\})$$

и было доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Класс* T *является П-граничным тогда и только тогда, когда для любых k и p существует такое b, что класс* $\mathbf{U}(k,p,b)$ *является П-простым.*

Вершина степени 3 называется *внутренней*, если не существует пути, соединяющего эту вершину с вершиной степени 1, в котором все промежуточные вершины имеют степень 2. Класс графов $\mathbf{U}(k)$ – множество графов, у которых степени всех вершин не превосходят 3, а расстояния между вершинами степени 3 и длины циклов не менее k. Класс $\mathbf{V}(k)$ – множество графов, у которых степени всех вершин не превосходят 3 и имеется не более чем k внутренних вершин. В [1] доказано следующее достаточное условие граничности класса $\mathbf{T}$.

Лемма 1. *Если при любом k класс* $\mathbf{U}(k)$ *является П-сложным, а класс* $\mathbf{V}(k)$ *является П-простым, то класс* $\mathbf{T}$ *является П-граничным.*

Легко проверить, что множество $Forb(\mathbf{D})$ состоит из циклов длины не менее чем 4, всех гантелей и графов $K_{1,3}$, K_4, K_4-e, $L(B_1)$. Для $k\geq 1, p\geq 1, b\geq 4$ через $\mathbf{W}(k,p,b)$ обозначим множество графов $Free(\{H_i\colon 1\leq i\leq b-1\}\cup\{C_i\colon 4\leq i\leq b\}\cup\{K_{1,3}, K_4, K_4\text{-}e, L(B_1), kD_{p,p,p}\})$.

В применении к классу $\mathbf{D}$ теорема 2 даёт следующий критерий.

Теорема 4. *Класс* $\mathbf{D}$ *является П-граничным тогда и только тогда, когда он является П-предельным и для любых натуральных k и p найдётся такое b, что класс* $\mathbf{W}(k,p,b)$ *является П-простым.*

Доказательство. Допустим, класс $\mathbf{D}$ является П-граничным. Так как граф $G=kD_{p,p,p}\in\mathbf{D}$, то по теореме 2 для любых k и p существует такое конечное множество графов $\mathbf{X}\subseteq Forb(\mathbf{D})$, что класс $Free(\mathbf{X}\cup\{kD_{p,p,p}\})$ является П-простым. Пусть b – максимум длин гантелей и циклов, содержащихся в $\mathbf{X}$ (полагаем b=0, если $\mathbf{X}$ не содержит гантелей и циклов). Тогда $\mathbf{W}(k,p,b)\subseteq Free(\mathbf{X}\cup\{kD_{p,p,p}\})$ и класс $\mathbf{W}(k,p,b)$ будет являться П-простым.

Допустим, что для любых натуральных k и p найдется такое b, что класс $\mathbf{W}(k,p,b)$ является П-простым. Очевидно, что любой граф $G\in\mathbf{D}$ при некоторых k и p является порождённым подграфом графа $kD_{p,p,p}$. Заметим также, что при любых k,p,b для некоторого $\mathbf{X}\subset Forb(\mathbf{D})$ имеет место равенство $\mathbf{W}(k,p,b) = Free(\mathbf{X}\cup\{kD_{p,p,p}\})$. Таким образом, для любого $G\in\mathbf{D}$ при некотором $\mathbf{X}\subset Forb(\mathbf{D})$ и некоторых k, p, b имеет место включение $Free(\mathbf{X}\cup\{G\})\subseteq\mathbf{W}(k,p,b)$. Теорема доказана.

Лемма 2 [4]. *Пусть* G_1 *и* G_2 *– связные графы, причём графы* $L(G_1)$ и $L(G_2)$ *являются изоморфными. Тогда графы* G_1 *и* G_2 *изоморфны всегда, кроме случая, когда один из них* $K_{1,3}$, *а другой* K_3.

Лемма 3. *При любых* $k\geq 1, p\geq 1, b\geq 4$ *справедливо равенство* $\mathbf{W}(k,p,b)=L(\mathbf{U}(k,p+1,b))$.

Доказательство. При любых $i\geq 2, k\geq 1, p\geq 1$ справедливы равенства $L(B_i)=H_{i-1}$, $L(C_{i+1})=C_{i+1}$, $L(kT_{p+1,p+1,p+1})=kD_{p,p,p}$. Ясно, что $L(K_{1,4})=K_4$, $L(D_{0,0,1})=K_4$-e. Пусть $G\in L(\mathbf{U}(k,p+1,b))$, тогда из указанных равенств, предыдущей леммы и того, что граф $K_{1,3}$ не является рёберным графом, следует, что $G\in\mathbf{W}(k,p,b)$. Таким образом, справедливо включение $\mathbf{W}(k,p,b)\supseteq L(\mathbf{U}(k,p+1,b))$. Покажем, что обратное включение также справедливо.

Пусть $G\in\mathbf{W}(k,p,b)$. Ясно, что степень каждой вершины этого графа не превосходит 3. Из теоремы 8.4 монографии [5] следует, что G является рёберным графом. Пусть $G=L(H)$. Если $G=K_3$, то $H=K_{1,3}\in\mathbf{U}(k,p+1,b)$. Если $G\neq K_3$, то из предыдущей леммы следует, что граф H определяется единственным образом. Из указанных равенств и той же леммы 2 следует, что $H\in\mathbf{U}(k,p+1,b)$. Поэтому справедливо включение $\mathbf{W}(k,p,b)\subseteq L(\mathbf{U}(k,p+1,b))$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если для любого k класс* $L(\mathbf{U}(k))$ *является П-сложным, а класс* $L(\mathbf{V}(k)\cap\cap Free(C_3,B_1))$ *является П-простым, то класс* $\mathbf{D}$ *является П-граничным.*

Доказательство. Легко проверить, что при любом k класс графов $L(\mathbf{U}(k))$ является наследственным. Так как $L(\mathbf{U}(1))\supset L(\mathbf{U}(2))\supset \ldots$ и $\bigcap L(\mathbf{U}(k))=\mathbf{D}$, то класс $\mathbf{D}$ является П-предельным. Для $k\geq 1$ и $p\geq 1$ положим $b=2p+6$ и покажем, что $\mathbf{W}(k,p,b)\subseteq L(\mathbf{V}(k)\cap Free(C_3,B_1))$. Рассмотрим произвольный $G\in \mathbf{W}(k,p,b)$ и такой граф $H\in \mathbf{U}(k,p+1,b)$, что $G=L(H)$. Ясно, что степень каждой вершины в графе H не превосходит 3. Расстояние между любыми двумя вершинами степени 3 в графе H не менее $2p+4$, т.к. в противном случае образуется либо мост длины не более $2p+3$, либо порождённый цикл длины не более $2p+6$. Предположим, что H содержит k внутренних вершин. Каждая из этих внутренних вершин принадлежит порождённому подграфу $T_{p+1,p+1,p+1}$, причём из предыдущих рассуждений следует, что эти подграфы не имеют общих вершин и нет ребёр, соединяющих вершины из разных подграфов. Но тогда эти k подграфов образуют порождённый $kT_{p+1,p+1,p+1}$, поэтому граф G содержит порождённый $kD_{p,p,p}$. Получаем противоречие. Таким образом, $H\in \mathbf{V}(k)\cap Free(C_3,B_1)$. Значит, для любых k и p при $b=2p+6$ класс $\mathbf{W}(k,p,b)$ является П-простым. Из теоремы 4 следует, что класс $\mathbf{D}$ является П-граничным. Лемма доказана.

Древесной декомпозицией графа G называется пара (T,W), где T – дерево и с каждой вершиной t этого дерева связано множество $W_t\subseteq V(G)$ так, что выполняются следующие условия:

1) $V(G)=\bigcup\limits_{t\in V(T)} W_t$.

2) Для каждого ребра $(u,v)\in E(G)$ существует некоторая вершина t дерева T, что u и v принадлежат W_t.

3) Для каждой вершины $u\in V(G)$ множество $\{t\in V(T)\colon u\in W_t\}$ образует связное поддерево в дереве T.

Шириной древесной декомпозиции (T,W) называется величина $tw(T,W)=\max\limits_{t\in V(T)}|W_t|-1$ и древесной шириной графа G называется величина $\min(tw(T,W))$, где минимум берётся по всевозможным древесным декомпозициям (T,W) графа G.

В [6] доказано следующее утверждение.

Лемма 5. *Существует такое число t, что для любых графов $G_1\in \mathbf{T}$ и $G_2\in \mathbf{D}$ древесная ширина в классе графов $Free(G_1,G_2)$ ограничена числом t.*

Пусть $\mathbf{Deg}(3)$ – класс всех графов со степенями вершин не более чем 3.

Лемма 6. *Если класс $\mathbf{T}$ (или $\mathbf{D}$) является П-предельным и для любого t задача П полиномиально разрешима для графов класса $\mathbf{Deg}(3)$, имеющих древесную ширину, не превосходящую t, то класс $\mathbf{T}$ (или $\mathbf{D}$) является П-граничным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф $G\in \mathbf{T}$. Графы $K_{1,4}$ и C_3 принадлежат множеству $Forb(\mathbf{T})$. В классе графов $Free(G,K_{1,4},C_3)$ степени вершин не превосходят 3 и древесная ширина ограничена числом t, поэтому класс $Free(G,K_{1,4},C_3)$ является П-простым. Из теоремы 2 следует, что $\mathbf{T}$ является П-граничным.

Рассмотрим произвольный граф $G\in \mathbf{D}$. Графы $K_{1,3}$, K_4, K_4-e, $L(B_1)$ принадлежат множеству $Forb(\mathbf{D})$. В классе графов $Free(G, K_{1,3}, K_4, K_4\text{-}e, L(B_1))$ степени вершин не превосходят 3 и древесная ширина ограничена числом t, поэтому класс $Free(G, K_{1,3}, K_4, K_4\text{-}e, L(B_1))$ является П-простым. Из теоремы 2 следует, что $\mathbf{D}$ является П-граничным. Лемма доказана.

Задача о наибольшем порождённом подграфе

Пусть $\mathbf{X}$ – некоторый класс графов. Подграф некоторого графа G, принадлежащий $\mathbf{X}$, назовём $\mathbf{X}$-подграфом, а подграф графа G с наибольшим количеством рёбер будем называть наибольшим $\mathbf{X}$-подграфом. В уже упоминавшейся работе [1] рассматривалась задача о наибольшем $\mathbf{X}$-подграфе (задача SUBGRAPH[$\mathbf{X}$]), состоящая в определении по заданному графу G и числу k существования $\mathbf{X}$-подграфа графа G, число рёбер которого не менее k. В данном разделе настоящей работы рассматривается задача о наибольшем порождённом $\mathbf{X}$-подграфе.

Обозначим через $n_{\mathbf{x}}(G)$ количество вершин в наибольшем порождённом $\mathbf{X}$-подграфе графа G. Если G не содержит ни одного $\mathbf{X}$-подграфа, то положим $n_{\mathbf{x}}(G)=0$. Задача о наибольшем порождённом $\mathbf{X}$-подграфе, называемая в дальнейшем задачей ISUBGRAPH[$\mathbf{X}$], состоит в том, чтобы по задаваемым графу G и числу k определить, выполняется ли неравенство $n_{\mathbf{x}}(G)\geq k$.

Ребро в графе называется перешейком, если при его удалении увеличивается количество компонент связности. Операция добавления перешейка состоит в добавлении ребра, соединяющего вершины из разных компонент связности. Операция s-подразбиения ребра состоит в замене этого ребра путём длины $s+1$. Операция s-слияния состоит в замене пути длины $s+1$, в котором все промежуточные вершины имеют степень 2, одним ребром. Понятно, что операция s-слияния является обратной к операции s-подразбиения.

Лемма 7. *Пусть $\mathbf{X}$ – наследственный класс графов, замкнутый относительно добавления изолированных вершин, добавления перешейков,*

s-подразбиения и s-слияния. Если граф G' получен из графа G s-подразбиением некоторого ребра, то $n_{\mathbf{X}}(G')= n_{\mathbf{X}}(G)+s$.

Доказательство. Предположим, что граф G' получен из G заменой ребра $e=(a,b)$ путём P длины $s+1$. Пусть H – наибольший порождённый $\mathbf{X}$-подграф графа G. Построим порождённый подграф H' графа G' следующим образом. Если $e \in E(H)$, то в граф H' включаем весь путь P, если $e \notin H$ и $a \in V(H)$ (или $b \in V(H)$), то в граф H' включаем весь путь P, кроме его концевой вершины b (или a), если $a \notin V(H)$ и $b \notin V(H)$, то в граф H' включаем весь путь P, кроме его концевых вершин. Граф H' получается из H либо s-подразбиением, либо добавлением изолированных вершин и перешейков, поэтому $H' \in \mathbf{X}$. Таким образом, $n_{\mathbf{X}}(G') \geq n_{\mathbf{X}}(G)+s$.

Докажем выполнение обратного неравенства. Пусть H' – наибольший $\mathbf{X}$-подграф графа G'. Так как класс $\mathbf{X}$ замкнут относительно добавления изолированных вершин и перешейков, то H' содержит либо все вершины пути P, либо все, кроме одной, либо все, кроме концевых вершин пути P. В первом случае заменяем P одним ребром. Во втором и третьем случаях удаляем все промежуточные вершины пути P, причём если $a \in V(H')$ и $b \in V(H')$, то удаляем любую из этих двух вершин. Ясно, что получаемый граф H принадлежит классу $\mathbf{X}$, т.к. может быть получен из графа H' либо s-слиянием, либо удалениями вершин. Таким образом, $n_{\mathbf{X}}(G) \geq n_{\mathbf{X}}(G')-s$.

Из обоих неравенств получаем, что $n_{\mathbf{X}}(G')=n_{\mathbf{X}}(G)+s$. Лемма доказана.

Операция *присоединения треугольника* в графе G состоит в добавлении к графу G вершины a и двух рёбер, соединяющих вершину a с двумя соседними вершинами b и c степени не более 2, которые не принадлежат ни одному треугольнику графа G.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{X}$ – *наследственный класс графов, замкнутый относительно присоединения треугольников, добавления изолированных вершин, добавления перешейков, s-подразбиения ребер, не принадлежащих треугольникам, и s-слияния при некотором s. Если существует алгоритм проверки принадлежности графа классу $\mathbf{X}$ и класс $L(\mathbf{U}(2))$ является* ISUBGRAPH[$\mathbf{X}$]-*сложным, то класс $\mathbf{D}$ является* ISUBGRAPH[$\mathbf{X}$]-*граничным.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое натуральное число k и рассмотрим произвольный граф $G \in L(\mathbf{U}(2))$. Выполним sk-подразбиение всех рёбер графа G, которые не принадлежат треугольникам, и получим некоторый граф $G' \in L(\mathbf{U}(2+ks))$. Из предыдущей леммы следует, что $n_{\mathbf{X}}(G')=n_{\mathbf{X}}(G)+ksm^*$, где m^* – количество ребер графа G, не принадлежащих его треугольникам. Поэтому при любом k задача ISUBGRAPH[$\mathbf{X}$] в классе $L(\mathbf{U}(2))$ полиномиально эквивалентна той же задаче в классе $L(\mathbf{U}(2+ks))$. Таким образом, класс $L(\mathbf{U}(k))$ является ISUBGRAPH[$\mathbf{X}$]-сложным при любом натуральном k.

Покажем, что класс $L(\mathbf{V}(k) \cap Free(C_3,B_1))$ является ISUBGRAPH[$\mathbf{X}$]-простым при любом k. Пусть $G \in L(\mathbf{V}(k) \cap Free(C_3,B_1))$. Если есть вершина степени 1, то она обязательно принадлежит любому наибольшему порождённому $\mathbf{X}$-подграфу графа G (ввиду замкнутости класса $\mathbf{X}$ относительно добавления изолированных вершин и перешейков). Если в G существует треугольник, одна из вершин которого имеет степень 2, то ввиду замкнутости класса $\mathbf{X}$ относительно присоединения треугольников, добавления изолированных вершин и перешейков такая вершина степени 2 принадлежит любому наибольшему порождённому $\mathbf{X}$-подграфу графа G. Таким образом, можно считать, что в графе G любая вершина имеет степень 2 или 3, причём все вершины степени 3 являются внутренними. Можно также считать, что к графу G неприменима операция s-слияния (т.к. по лемме 7 задача о наибольшем порождённом $\mathbf{X}$-подграфе полиномиально сводима к таким графам). Значит, задача ISUBGRAPH[$\mathbf{X}$] полиномиально сводится к той же задаче для графов из класса $\mathbf{Y}(k,s) \subseteq L(\mathbf{V}(k) \cap Free(C_3,B_1))$, которые не имеют вершин степени 1, у которых все треугольники образуются внутренними вершинами и к которым неприменима операция s-слияния. Легко проверить, что класс $\mathbf{Y}(k,s)$ состоит из графов, являющихся рёберными графами графов, получаемых из кубических графов не более чем с k вершинами подразбиением каждого ребра не более чем s раз. Понятно, что количество вершин в любом графе из $\mathbf{Y}(k,s)$ не превосходит $\frac{(3s-1)k}{2}$, т.е. при фиксированных k и s множество $\mathbf{Y}(k,s)$ является конечным.

Следовательно, по лемме 4 класс $\mathbf{D}$ является граничным. Теорема доказана.

Лемма 8. Пусть $H \in \mathbf{U}(4)$, причём $G=L(H)$. *Тогда граф G является планарным тогда и только тогда, когда граф H является планарным; граф G является совершенным тогда и только тогда, когда H является двудольным.*

Доказательство. Так как класс $\mathbf{U}(4)$ не содержит треугольников, то из леммы 2 следует, что граф $H \in \mathbf{U}(4)$ определяется единственным образом по графу G. Понятно, что степени вершин в графах G и H не превосходят 3, поэтому оба графа не содержат подграфов, гомеоморфных K_5. Легко проверить, что рёберный граф графа $K_{3,3}$ не является планарным (т.к. содержит порождённый подграф $K_{3,3}$), поэтому рёберный граф любого графа, гомеоморфного $K_{3,3}$, также не является планарным. Но тогда из леммы 2 следует, что если граф G является планарным, то граф H также является планарным. Обратное утверждение легко проверяется непосредственным построением плоской укладки графа G по плоской укладке графа H.

Известно, что класс совершенных графов совпадает с классом $Free(\{C_{2k+1}, \overline{\tilde{N}_{2k+1}}, k>1\})$ [7]. Ясно, что граф G не содержит порождённых подграфов $\overline{\tilde{N}_{2k+1}}$ при $k>1$. Так как при любом $i \geq 3$ имеет место равенство $L(C_i)=C_i$, то из той же леммы 2 следует, что граф G является совершенным тогда и только тогда, когда граф H является двудольным. Лемма доказана.

Теорема 6. *Для задачи о наибольшем порождённом планарном подграфе, задачи о наибольшем порождённом совершенном подграфе класс* **D** *является граничным*.

Доказательство. Пусть **Planar** – класс планарных графов, **Bipartite** – класс двудольных графов, **Perfect** – класс совершенных графов. В работе [1] показано, что класс **U**(4) является SUBGRAPH[**Planar**]-сложным и SUBGRAPH[**Bipartite**]-сложным. Понятно, что для любого графа H граф $G=L(H)$ может быть построен из H за полиномиальное время. Обратно, граф H может быть построен из G за полиномиальное время [9].

Из предыдущей леммы следует, что задача SUBGRAPH[**Planar**] в классе **U**(4) и задача ISUBGRAPH[**Planar**] в классе L(**U**(4)) являются полиномиально эквивалентными. Следовательно, класс L(**U**(2)) является ISUBGRAPH [**Planar**]-сложным. Остальные условия теоремы 5 для задачи о наибольшем порождённом планарном подграфе также выполняются, если положить s=1.

Из леммы 8 следует, что задача SUBGRAPH[**Bipartite**] в классе **U**(4) и задача ISUBGRAPH[**Perfect**] в классе L(**U**(4)) являются полиномиально эквивалентными. Следовательно, класс L(**U**(2)) является ISUBGRAPH[**Perfect**]-сложным. Остальные условия теоремы 5 для задачи ISUBGRAPH[**Perfect**] также выполняются, если положить s=2. Теорема доказана.

Нетрудно привести пример бесконечного множества задач о наибольшем порождённом подграфе, для которых классы **T** и **D** являются граничными одновременно. Пусть **M** – множество всех графов, гомеоморфных графу $K_{1,3}$, а $\mathbf{N}_t$ – множество графов, получаемых из графа K_5 t-подразбиением каждого ребра. Рассмотрим задачу ISUBGRAPH[$Free(\mathbf{M} \cup \mathbf{N}_t)$]. Понятно, что при любом t в классе **Deg**(3) задачи ISUBGRAPH[$Free(\mathbf{M} \cup \mathbf{N}_t)$] и ISUBGRAPH[**Planar**] совпадают. Из результатов работы [1] и предыдущих двух теорем следует, что для любого k классы **U**(k) и L(**U**(k)) являются ISUBGRAPH[**Planar**]-сложными, поэтому при любом t классы **T** и **D** являются ISUBGRAPH[$Free(\mathbf{M} \cup \mathbf{N}_t)$]-предельными. В той же работе [1] и в предыдущей теореме показано, что классы **T** и **D** являются ISUBGRAPH[**Planar**]-граничными. Тогда из теорем 3 и 4 следует, что при любом фиксированном t классы **T** и **D** являются ISUBGRAPH[$Free(\mathbf{M} \cup \mathbf{N}_t)$]-граничными.

Новые случаи граничности классов T и D

Независимым рёберным доминирующим множеством (EIDS) графа $G=(V,E)$ называется такое множество попарно не смежных рёбер $E' \subseteq E$, что любое ребро из множества E-E' инцидентно хотя бы одному ребру из E'. EIDS графа G с наименьшим количеством рёбер называется наименьшим EIDS. Количество рёбер в наименьшем EIDS графа G будем обозначать $eids(G)$.

Задача о независимом ребёрном доминирующем множестве (EIDSP), названная в [9] задачей о минимальном по мощности максимальном паросочетании, состоит в том, чтобы по заданным графу G и числу k определить, выполняется ли неравенство $eids(G) \geq k$.

Лемма 9. *Пусть граф* G' *получен из графа* G 3-*подразбиением произвольного ребра, тогда* $eids(G')=eids(G)+1$.

Пусть при 3-подразбиении ребра $e=(a,b)$ в граф G были введены три новые вершины a_1, c_1, b_1, где $(a,a_1) \in E(G')$, $(a_1,c_1) \in E(G')$, $(c_1,b_1) \in E(G')$, $(b_1,b) \in E(G')$. Пусть $M(G)$ – некоторое минимальное EIDS графа G. Построим некоторое EIDS графа G'. Если $e \in M(G)$, то удаляем e из $M(G)$ и добавляем ребра (a,a_1) и (b_1,b). Если $e \notin M(G)$, то в $M(G)$ имеется ребро, инцидентное либо a, либо b, в первом случае к $M(G)$ добавляем ребро (c_1,b_1), во втором случае к $M(G)$ добавляем ребро (a_1,c_1). После выполнения операций получается некоторое EIDS графа G', состоящее из $eids(G)$+1 ребер, отсюда $eids(G') \leq eids(G)+1$.

Докажем выполнение обратного неравенства. Пусть $M(G')$ – минимальное EIDS графа G'. Построим некоторое EIDS графа G. Ясно, что в $M(G')$ обязательно содержится хотя бы одно из рёбер (a,a_1), (a_1,c_1), (c_1,b_1), (b_1,b). Тогда возможны только следующие случаи:

1. Если $(a,a_1)\in M(G')$ и $(b_1,b)\in M(G')$, то удаляем из $M(G')$ ребра (a,a_1) и (b_1,b) и добавляем ребро e.

2а. Если $(a,a_1)\in M(G')$, $(c_1,b_1)\in M(G')$ и $M(G')$ не содержит ребер, инцидентных вершине b, то удаляем из $M(G')$ ребра (a,a_1) и (c_1,b_1) и добавляем ребро e.

2б. Если $(a,a_1)\in M(G')$, $(c_1,b_1)\in M(G')$ и $M(G')$ содержит ребра, инцидентные вершине b, то во множестве инцидентных вершине a рёбер (кроме (a,a_1)) находим ребро e^*, не инцидентное ни одному ребру из $M(G')$-$\{(a,a_1)\}$. Такое ребро существует, т.к. в противном случае множество $M(G')$ не является минимальным – из него можно удалить ребра (a,a_1), (c_1,b_1) и добавить ребро (a_1,c_1). Удаляем из $M(G')$ ребра (a,a_1), (c_1,b_1) и добавляем ребро e^*.

3. Если $(a_1,c_1)\in M(G')$, $(b_1,b)\in M(G')$, то этот случай симметричен случаям 2а и 2б.

4. Если среди ребер (a,a_1), (a_1,c_1), (c_1,b_1), (b_1,b) в $M(G')$ входит только одно ребро, то удаляем это ребро из $M(G')$.

После выполнения операций получается некоторое EIDS графа G', состоящее из $eids(G)+1$ ребер, отсюда $eids(G)\leq eids(G')-1$. Из обоих неравенств получаем, что $eids(G')=eids(G)+1$. Лемма доказана.

Задача о разбиении на клики (PCP) для данного графа G состоит в разбиении его множества вершин на минимально количество подмножеств, каждое из которых порождает в G клику.

Теорема 7. *Класс* **T** *является* EIDSP-*граничным*, *а класс* **D** *является* PCP-*граничным*.

Доказательство. Класс **Deg**(3) является EIDSP-сложным [9]. Из предыдущей леммы легко следует, что при любом натуральном k класс $\mathbf{U}(k)$ является EIDSP-сложным. Таким образом, класс **T** является EIDSP-предельным.

В доказательстве теоремы 11 работы [2] показано, что при любом натуральном k класс $L(\mathbf{U}(k))$ является PCP-сложным. Отсюда следует, что класс **D** является PCP-предельным.

Для любого натурального t в классе графов с древесной шириной, не превосходящей t, EIDSP [10], PCP [10] полиномиально разрешимы. Отсюда и из леммы 6 следует EIDSP-граничность класса **T** и PCP-граничность класса **D**.

Список литературы

1. Алексеев В.Е., Малышев Д.С. Критерий граничности и его применения // Дискретный анализ и исследование операций (принято к публикации).
2. Alekseev V.E., Boliac R., Korobitsyn D.V., Lozin V.V. NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theoretical Computer Science. 2007. V. 389. P. 219–236.
3. Alekseev V.E. On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. 2004. V. 132. P. 17–26.
4. Whitney H. Congruent graphs and the connectivity of graphs // Amer. J. Math. 1932. V. 54. P. 150–168.
5. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1982.
6. Lozin V.V., Rautenbach D. On the band-, tree- and clique-width of graphs with bounded vertex degree // SIAM J. Discrete Math. 2004. V. 18. P. 195–206.
7. Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R. The strong perfect graph theorem // Annal. of Math. 2006. V. 164. P. 51–229.
8. Roussopoulos N. A max{m,n} algorithm for determining the graph H from its line graph G // Information Processing Letters. 1973. V. 2. № 4. P. 108–112.
9. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
10. Bodlaender H.L. Dynamic programming on graphs with bounded treewidth // LNCS. 1988. V. 317. P. 105–118.

BOUNDARY CLASSES FOR GRAPH PROBLEMS

D.S. Malyshev

The notion of a boundary class is considered. This notion is a helpful tool to analyze the computational complexity of graph problems. Two particular graph classes are considered and some problems for which these classes are boundary are given.