

УДК 517.957

А. Н. Соболевский

Периодические решения уравнения Гамильтона–Якоби с периодической неоднородностью и теория Обри–Мезера

Доказано, что одномерное уравнение Гамильтона–Якоби с периодической неоднородностью допускает семейство обобщенных решений, каждое из которых представимо в виде суммы линейной и периодической функции; дано условие единственности решения такого вида в терминах теории Обри–Мезера.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) + U(t, x) = 0, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}$, а функции $H_0(p)$, $p \in \mathbb{R}$, и $U(t, x)$ удовлетворяют следующим предположениям.

- (H₁) Функция $H_0(p)$ непрерывно дифференцируема, а ее производная $H'_0(p)$ строго монотонно возрастает: $H'_0(p_2) > H'_0(p_1)$, если $p_2 > p_1$, и является локально липшицевой: для любого $P > 0$ существует такое $C > 0$, что для всех $p_1, p_2 \in [-P, P]$ имеет место $|H'_0(p_1) - H'_0(p_2)| \leq C|p_1 - p_2|$.
- (H₂) Для любого $N > 0$ существует такое $P > 0$, что для всякого $p \in \mathbb{R}$ из $|p| > P$ следует $H_0(p) > N|p|$.
- (H₃) Функция $U(t, x)$ непрерывно дифференцируема, а ее частная производная $\partial U(t, x)/\partial x$ непрерывна по Липшицу.
- (H₄) Функция $U(t, x)$ является периодической по переменным t и x с периодом 1: $U(t+1, x) = U(t, x+1) = U(t, x)$ при всех $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

Здесь и ниже символ $(')$ обозначает обыкновенную производную.

В случае, когда $U(t, x) = 0$, уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство классических решений вида $S^a(t, x) = ax - H_0(a)t$. В настоящей статье установлен следующий результат.

ТЕОРЕМА I. Пусть функции $H_0(p)$ и $U(t, x)$ удовлетворяют предположениям (H₁)–(H₄); тогда для любого $a \in \mathbb{R}$ уравнение (1) имеет обобщенное вязкостное решение в смысле М. Г. Крандалла и П. Л. Лионса [1] вида

$$S^a(t, x) = ax - H(a)t + s^a(t, x), \quad (2)$$

где $s^a(t, x)$ есть непрерывная периодическая функция, а $H(a)$ — выпуклая функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\min_{(t, x) \in \mathbb{R}^2} U(t, x) \leq H(a) - H_0(a) \leq \max_{(t, x) \in \mathbb{R}^2} U(t, x). \quad (3)$$

В §2 вводится явное представление обобщенного вязкостного решения задачи Коши для уравнения (1) с помощью хорошо известной формулы Лакса—Олейник. В остальной части статьи эта формула заменяет общее определение обобщенного вязкостного решения.

Пусть $a_0 \in \mathbb{R}$ и $S^{a_0}(t, x)$ есть некоторое обобщенное вязкостное решение уравнения (1), имеющее вид (2) при $a = a_0$. Для любого $c \in \mathbb{R}$ функция $S^{a_0}(t, x) + c$ также является обобщенным вязкостным решением уравнения (1) вида (2). В следующей теореме указано условие, достаточное для справедливости обратного утверждения.

ТЕОРЕМА II. Пусть $s^a(t, x)$ есть непрерывная периодическая функция, существование которой было установлено в теореме I, а $\omega(a)$ — соответствующее ей число вращения (см. §6). Если число $\omega(a)$ иррационально, то функция $s^a(t, x)$ определена единственным образом с точностью до аддитивной константы.

Настоящая статья строится по следующему плану. В §2 и §3 доказаны некоторые вспомогательные результаты; §4 посвящен доказательству теоремы I. В §5 и §6 введено многозначное отображение, связанное с решением вида (2), и изучена связь между свойствами этого отображения и теорией Обри—Мезера [2]–[4]. В §7 завершено доказательство теоремы II.

Результаты настоящей статьи были анонсированы в [5]; они усиливают и дополняют некоторые результаты [6].

Аналогичные результаты независимо от автора были получены Weinan E [7]. Следует отметить, что подход Weinan E ближе к точке зрения Мезера [4], в то время как подход, принятый в настоящей статье, — к точке зрения Обри (ср. [2], [3]).

Автор выражает благодарность Я. Г. Синаю за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§2. Функционал действия и функция действия

Преобразованием Лежандра функции $H_0(p)$ называется такая непрерывно дифференцируемая функция $L_0(v)$, что $L'_0(H'_0(p)) = p$. Если функция $H_0(p)$ удовлетворяет предположениям (H_1) и (H_2) , то функция $L_0(v)$ принимает конечные значения при всех $v \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям, получаемым из (H_1) и (H_2) заменой H_0 на L_0 , за исключением свойства локальной липшицевости производной. Уравнению (1) отвечает лагранжиан $L(t, x, v)$ вида $L(t, x, v) = L_0(v) - U(t, x)$.

Пусть $x, y, s, t \in \mathbb{R}$, причем $s < t$. Множество всех абсолютно непрерывных функций $\xi: [s, t] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $\xi(s) = x$, $\xi(t) = y$ и таких, что функция $L(\cdot, \xi(\cdot), \xi'(\cdot))$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[s, t]$, будем называть множеством допустимых траекторий (или, сокращенно, траекторий) и обозначать $\Omega(s, y; t, x)$. Функционал, определяемый на $\Omega(s, y; t, x)$ формулой

$$\mathcal{L}(s, y; t, x)[\xi] = \int_s^t L(\tau, \xi(\tau), \xi'(\tau)) d\tau = \int_s^t [L_0(\xi'(\tau)) - U(\tau, \xi(\tau))] d\tau,$$

есть *функционал действия*, соответствующий лагранжиану $L(t, x, v)$. Из предположений (H_1) – (H_4) следует, что данный функционал ограничен снизу. Будем называть точную нижнюю грань $\mathcal{L}(s, y; t, x)$ на $\Omega(s, y; t, x)$ *функцией действия* и обозначать ее $L(s, y; t, x)$.

Следующий результат является классическим в вариационном исчислении (см., например, [8]).

ЛЕММА 1. Пусть функции $H_0(p)$ и $U(t, x)$ удовлетворяют предположениям (H_1) – (H_4) ; тогда в $\Omega(s, y; t, x)$ существует такая траектория ξ_0 , что $\mathcal{L}(s, y; t, x)[\xi_0] = L(s, y; t, x)$. Если $\xi_0 \in \Omega(s, y; t, x)$ – минимизирующая траектория функционала действия, то ξ_0 непрерывно дифференцируема на отрезке $[s, t]$ и существует такая функция $\lambda: [s, t] \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^1 , что

$$\lambda(\tau) = L'_0(\xi'_0(\tau)), \quad \lambda'(\tau) = -\frac{\partial U(\tau, \xi_0(\tau))}{\partial \xi_0}, \quad s < \tau < t. \quad (4)$$

Для любых $R, s, t, x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $R > 0$, $s < t$ и $|x - y| \leq R(t - s)$, существует такая положительная константа $C_1 = C_1(R, s, t)$, что $|\xi'_0(\tau)| \leq C_1$ при всех $s \leq \tau \leq t$ для любой минимизирующей траектории $\xi_0 \in \Omega(s, y; t, x)$.

Пусть $a \in \mathbb{R}$, а $s_0(x)$ – непрерывная периодическая функция. Обобщенное вязкостное решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными, имеющими вид

$$S_0(x) = ax + s_0(x), \quad (5)$$

может быть выражено в явном виде при помощи *формулы Лакса–Олейник* (см., например, [9; разд. 11.1]):

$$S(t, x) = \inf_{y \in \mathbb{R}} (S_0(y) + L(0, y; t, x)). \quad (6)$$

ЛЕММА 2. Функция действия $L(s, y; t, x)$ является диагонально периодической, т.е.

$$L(s, y + 1; t, x + 1) = L(s + 1, y; t + 1, x) = L(s, y; t, x).$$

Утверждение леммы следует из периодичности функции $U(t, x)$ по t и x .

ЛЕММА 3. Для всех действительных r, s, t, x, y таких, что $s < r < t$, имеет место соотношение

$$L(s, y; t, x) = \min_{z \in \mathbb{R}} (L(s, y; r, z) + L(r, z; t, x)). \quad (7)$$

Эта лемма есть вариант известного принципа оптимальности Беллмана.

ЛЕММА 4. Функция действия $L(s, y; t, x)$ допускает оценки

$$-M \leq \frac{1}{t-s} L(s, y; t, x) - L_0\left(\frac{x-y}{t-s}\right) \leq -m,$$

где $m = \min_{(t,x) \in \mathbb{R}^2} U(t, x)$, $M = \max_{(t,x) \in \mathbb{R}^2} U(t, x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функционал

$$\widehat{\mathcal{L}}(s, y; t, x)[\xi] = \int_s^t L_0(\xi'(\tau)) d\tau.$$

Траектория $\widehat{\xi}(\tau) = x(\tau - s)/(t - s) + y(t - \tau)/(t - s)$, $s \leq \tau \leq t$, является минимизирующей для функционала $\widehat{\mathcal{L}}(s, y; t, x)$ в классе $\Omega(s, y; t, x)$, причем

$$\widehat{\mathcal{L}}(s, y; t, x)[\widehat{\xi}] = (t - s)L_0\left(\frac{x - y}{t - s}\right).$$

Пусть ξ_0 является минимизирующей траекторией для функционала $\mathcal{L}(s, y; t, x)$ в классе $\Omega(s, y; t, x)$, т.е. $\mathcal{L}(s, y; t, x)[\xi_0] = L(s, y; t, x)$. Оценим разность

$$L(s, y; t, x) - (t - s)L_0\left(\frac{x - y}{t - s}\right)$$

сверху и снизу. Имеем

$$\begin{aligned} & L(s, y; t, x) - (t - s)L_0\left(\frac{x - y}{t - s}\right) \\ &= \mathcal{L}(s, y; t, x)[\xi_0] - \widehat{\mathcal{L}}(s, y; t, x)[\widehat{\xi}] \\ &= - \int_s^t U(\tau, \xi_0(\tau)) d\tau + \widehat{\mathcal{L}}(s, y; t, x)[\xi_0] - \widehat{\mathcal{L}}(s, y; t, x)[\widehat{\xi}] \\ &\geq (t - s)\left(- \max_{(t, x) \in \mathbb{R}^2} U(t, x)\right), \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} & L(s, y; t, x) - (t - s)L_0\left(\frac{x - y}{t - s}\right) \\ &= \mathcal{L}(s, y; t, x)[\xi_0] - \widehat{\mathcal{L}}(s, y; t, x)[\widehat{\xi}] \\ &\leq \mathcal{L}(s, y; t, x)[\widehat{\xi}] - \widehat{\mathcal{L}}(s, y; t, x)[\widehat{\xi}] \\ &= - \int_s^t U(\tau, \widehat{\xi}(\tau)) d\tau \leq (t - s)\left(- \min_{(t, x) \in \mathbb{R}^2} U(t, x)\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 5. *Функция действия $L(s, y; t, x)$ является локально непрерывной по Липшицу: если $R, x_1, x_2, y_1, y_2, s, t \in \mathbb{R}$, $R > 0$, $s < t$ и $|x_i - y_j| \leq R(t - s)$, $i, j = 1, 2$, то существует такая константа $C = C(R, s, t) > 0$, что*

$$|L(s, y_1; t, x_1) - L(s, y_2; t, x_2)| \leq C(|y_1 - y_2| + |x_1 - x_2|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что

$$|L(s, y; t, x_1) - L(s, y; t, x_2)| \leq C|x_1 - x_2|, \quad (8)$$

где $|x_i - y| \leq R(t - s)$, $i = 1, 2$. Неравенство, относящееся к первой паре аргументов функции действия $L(s, y; t, x)$, доказывается аналогично; в совокупности оба неравенства дают утверждение леммы.

Пусть траектория $\xi_0 \in \Omega(s, y; t, x_1)$ является минимизирующей для функционала $\mathcal{L}(s, y; t, x_1)$. Рассмотрим траекторию $\xi(\tau) = \xi_0(\tau) + (x_2 - x_1)(\tau - s)/(t - s)$ при $s \leq \tau \leq t$. Ясно, что $\xi \in \Omega(s, y; t, x_2)$. Оценивая сверху разность $L(s, y; t, x_2) - L(s, y; t, x_1)$, получим

$$\begin{aligned} & L(s, y; t, x_2) - L(s, y; t, x_1) \\ & \leq \mathcal{L}(s, y; t, x_2)[\xi] - \mathcal{L}(s, y; t, x_1)[\xi_0] \\ & = \int_s^t \left[L_0 \left(\xi_0'(\tau) + \frac{x_2 - x_1}{t - s} \right) - L_0(\xi_0'(\tau)) \right] d\tau \\ & \quad - \int_s^t \left[U \left(\tau, \xi_0(\tau) + \frac{x_2 - x_1}{t - s}(\tau - s) \right) - U(\tau, \xi_0(\tau)) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Функции $U(t, x)$ и $L_0(v)$ принадлежат классу гладкости C^1 ; кроме того, из предположений (H_3) и (H_4) следует, что $|\partial U(t, x)/\partial x| \leq M_1$ для некоторой положительной константы M_1 . По формуле Тейлора получаем, что

$$\begin{aligned} & L(s, y; t, x_2) - L(s, y; t, x_1) \\ & \leq \frac{|x_2 - x_1|}{t - s} (t - s) \max_{\tau \in [s, t], |\theta| \leq 1} \left| L_0' \left(\xi_0'(\tau) + \theta \frac{x_2 - x_1}{t - s} \right) \right| \\ & \quad + \frac{|x_2 - x_1|}{t - s} \frac{(t - s)^2}{2} M_1. \end{aligned}$$

По лемме 1 $|\xi_0'(\tau)| \leq C_1 = C_1(R, s, t)$ при всех $\tau \in [s, t]$. Из предположений (H_1) и (H_2) и определения $L_0(v)$ вытекает, что $L_0'(v)$ конечна при всех $v \in \mathbb{R}$; следовательно, для некоторой положительной константы $C = C(M_1, R, s, t)$ выполнено неравенство

$$L(s, y; t, x_2) - L(s, y; t, x_1) \leq C|x_2 - x_1|.$$

Противоположное неравенство $L(s, y; t, x_2) - L(s, y; t, x_1) \geq -C|x_2 - x_1|$ получается аналогично.

В частности, из доказанной леммы следует, что функция действия $L(s, y; t, x)$ непрерывна; из леммы 4 поэтому вытекает, что точная нижняя грань в формуле Лакса–Олейник (6) достигается. В дальнейшем во всех формулах, выводимых из (6), будет использоваться обозначение $\min$, а не $\inf$.

ЛЕММА 6. Пусть $x_1, x_2, y_1, y_2, s, r, t \in \mathbb{R}$, $s < r < t$ и существует такое $z_0 \in \mathbb{R}$, что для всех $z \in \mathbb{R}$

$$L(s, y_i; r, z) + L(r, z; t, x_i) \geq L(s, y_i; r, z_0) + L(r, z_0; t, x_i), \quad i = 1, 2.$$

Тогда либо одновременно $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, либо $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, утверждение тривиально. Предположим, что $x_1 \neq x_2$ или $y_1 \neq y_2$. Пусть $\xi_i^< \in \Omega(s, y_i; r, z_0)$ и $\xi_i^> \in \Omega(r, z_0; t, x_i)$ являются минимизирующими траекториями функционалов $\mathcal{L}(s, y_i; r, z_0)$ и $\mathcal{L}(r, z_0; t, x_i)$, $i = 1, 2$. Из условия настоящей леммы и принципа оптимальности Беллмана (лемма 3) следует, что для $i = 1, 2$

$$L(s, y_i; r, z_0) + L(r, z_0; t, x_i) = L(s, y_i; t, x_i).$$

Поэтому при $i = 1, 2$ траектории

$$\xi_i(\tau) = \begin{cases} \xi_i^<(\tau), & s \leq \tau \leq r, \\ \xi_i^>(\tau), & r \leq \tau \leq t \end{cases}$$

($\xi_i \in \Omega(s, y_i; t, x_i)$) являются минимизирующими для функционалов $\mathcal{L}(s, y_i; t, x_i)$. По лемме 1 траектории ξ_i , $i = 1, 2$, непрерывно дифференцируемы; следовательно, $(\xi_i^<)'(r-0) = (\xi_i^>)'(r+0) = \xi_i'(r)$, $i = 1, 2$.

Покажем, что $\xi_1'(r) \neq \xi_2'(r)$. По лемме 1 минимизирующим траекториям ξ_i отвечают непрерывно дифференцируемые функции λ_i , $i = 1, 2$. Допустим, что $\xi_1'(r) = \xi_2'(r)$; тогда из (4) вытекает, что $\lambda_1(r) = \lambda_2(r)$. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4) на отрезке $[s, t]$ с начальными данными $\xi_0(r) = \xi_1(r) = \xi_2(r)$ и $\lambda(r) = \lambda_1(r) = \lambda_2(r)$. Из предположений (H_3) и (H_4) следует, что функция $\partial U(t, x)/\partial x$ непрерывна по Липшицу и ограничена по абсолютной величине константой $M_1 > 0$; тогда из второго уравнения в (4) вытекает, что при всех $\tau \in [s, t]$ выполнено неравенство $|\lambda(\tau) - \lambda(r)| \leq M_1(t - s)$. Поэтому из предположения (H_1) следует, что для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\xi_0'(\tau) = H_0'(\lambda(\tau)), \quad \lambda'(\tau) = -\frac{\partial U(\tau, \xi_0(\tau))}{\partial \xi_0}, \quad s < \tau < t,$$

равносильной (4), выполнены условия теоремы единственности. Следовательно, $\xi_1(\tau) = \xi_2(\tau)$ при всех $\tau \in [s, t]$ и, в частности, $y_1 = \xi_1(s) = \xi_2(s) = y_2$ и $x_1 = \xi_1(t) = \xi_2(t) = x_2$. Полученное противоречие доказывает, что $\xi_1'(r) \neq \xi_2'(r)$.

Докажем теперь, что существует такое число $\delta > 0$, что $s < r - \delta$, $r + \delta < t$ и $\xi_1(\tau) \neq \xi_2(\tau)$ при $\tau \in (r - \delta, r + \delta)$, $\tau \neq r$. Действительно, пусть это не так и существует такая последовательность $\{t_n\}$, что $s < t_n < t$, $t_n \neq r$, $\xi_1(t_n) = \xi_2(t_n)$ при всех $n = 1, 2, \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = r$. Следовательно,

$$\xi_1'(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1(t_n) - \xi_1(r)}{t_n - r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_2(t_n) - \xi_2(r)}{t_n - r} = \xi_2'(r),$$

что противоречит доказанному выше.

Допустим теперь, что $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geq 0$; для определенности предположим, что $x_1 \leq x_2$ и $y_1 < y_2$. Для $i = 1, 2$ определим траектории $\bar{\xi}_i \in \Omega(s, y_i; t, x_i)$ выражениями $\bar{\xi}_1(\tau) = \min\{\xi_1(\tau); \xi_2(\tau)\}$ и $\bar{\xi}_2(\tau) = \max\{\xi_1(\tau); \xi_2(\tau)\}$. Из доказанного вытекает, что каждая из траекторий $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ совпадает с ξ_1 и ξ_2 на конечном множестве интервалов конечной длины. Проверим, что траектории $\bar{\xi}_i$, $i = 1, 2$, являются минимизирующими для соответствующих функционалов. Имеем

$$\mathcal{L}(s, y_i; t, x_i)[\bar{\xi}_i] \geq \mathcal{L}(s, y_i; t, x_i)[\xi_i] = L(s, y_i; t, x_i), \quad i = 1, 2,$$

а также

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(s, y_1; t, x_1)[\bar{\xi}_1] + \mathcal{L}(s, y_2; t, x_2)[\bar{\xi}_2] &= \mathcal{L}(s, y_1; t, x_1)[\xi_1] + \mathcal{L}(s, y_2; t, x_2)[\xi_2] \\ &= L(s, y_1; t, x_1) + L(s, y_2; t, x_2).\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{L}(s, y_i; t, x_i)[\bar{\xi}_i] = L(s, y_i; t, x_i)$, $i = 1, 2$.

По лемме 1 траектории $\bar{\xi}_i$, $i = 1, 2$, являются непрерывно дифференцируемыми. Отсюда вытекает, что односторонние производные $\bar{\xi}'_i(r-0)$ и $\bar{\xi}'_i(r+0)$, где $i = 1, 2$, существуют и равны друг другу. Но это означает, что $\xi'_1(r-0) = \xi'_2(r+0)$ и $\xi'_2(r-0) = \xi'_1(r+0)$, так как r есть изолированный момент пересечения траекторий ξ_1 и ξ_2 . Поэтому $\xi'_1(r) = \xi'_2(r)$ в противоречии с доказанным выше.

Лемма 6 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $x_1, x_2, y_1, y_2, s, t \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ и $s < t$; тогда выполнено неравенство

$$L(s, y_1; t, x_1) + L(s, y_2; t, x_2) < L(s, y_2; t, x_1) + L(s, y_1; t, x_2). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi_1 \in \Omega(s, y_1; t, x_2)$ и $\xi_2 \in \Omega(s, y_2; t, x_1)$ являются минимизирующими траекториями для функционалов $\mathcal{L}(s, y_1; t, x_2)$ и $\mathcal{L}(s, y_2; t, x_1)$ соответственно. Заметим, что $\xi_1(s) < \xi_2(s)$ и $\xi_1(t) > \xi_2(t)$; поэтому существуют такие значения r и z_0 , что $s < r < t$ и $\xi_1(r) = \xi_2(r) = z_0$. Следовательно, $L(s, y_1; r, z_0) + L(r, z_0; t, x_2) = L(s, y_1; t, x_2)$, $L(s, y_2; r, z_0) + L(r, z_0; t, x_1) = L(s, y_2; t, x_1)$; с другой стороны, в силу принципа оптимальности Беллмана (лемма 3)

$$\begin{aligned}L(s, y_1; t, x_1) &\leq L(s, y_1; r, z_0) + L(r, z_0; t, x_1), \\ L(s, y_2; t, x_2) &\leq L(s, y_2; r, z_0) + L(r, z_0; t, x_2).\end{aligned}$$

Поэтому $L(s, y_1; t, x_1) + L(s, y_2; t, x_2) \leq L(s, y_1; t, x_2) + L(s, y_2; t, x_1)$. Допустим, что это нестрогое неравенство на самом деле является равенством. Тогда, вновь пользуясь леммой 3, для всех $z \in \mathbb{R}$ получаем

$$\begin{aligned}L(s, y_1; t, x_1) &= L(s, y_1; r, z_0) + L(r, z_0; t, x_1) \leq L(s, y_1; r, z) + L(r, z; t, x_1), \\ L(s, y_2; t, x_2) &= L(s, y_2; r, z_0) + L(r, z_0; t, x_2) \leq L(s, y_2; r, z) + L(r, z; t, x_2).\end{aligned}$$

Но по предыдущей лемме отсюда следует, что $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$. Полученное противоречие завершает доказательство.

§ 3. Редукция к функциональному уравнению

Пусть a — действительное число, $s_0(x)$ — непрерывная периодическая функция, а $S(t, x)$ является обобщенным вязкостным решением задачи Коши для уравнения (1) с начальной функцией $S_0(x) = ax + s_0(x)$. Лагранжиан $L(t, x, v) = L_0(v) - U(t, x)$ есть периодическая по t функция; поэтому естественно рассмотреть решение

$S(t, x)$ в целые моменты времени $t = n = 1, 2, \dots$. Пользуясь формулой Лакса–Олейник (6), получаем

$$S(n, x) - ax = \min_{y \in \mathbb{R}} (s_0(y) + L(0, y; n, x) + a(y - x)) = s_n(x; a, s_0).$$

В дальнейшем $s_n(x; a, s_0)$ всюду рассматривается как функция переменной x , а значение величины a каждый раз предполагается фиксированным.

Функция $s_n(x; a, s_0)$ ограничена снизу как функция x . По лемме 2 она периодична; следовательно, $s_n(x; a, s_0) = \min_{k \in \mathbb{Z}} s_n(x - k; a, s_0)$. Подставляя в эту формулу определение функции $s_n(x - k; a, s_0)$ и пользуясь леммой 2, получаем с учетом периодичности $s_0(y)$, что

$$s_n(x; a, s_0) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \min_{y \in \mathbb{R}} (s_0(y) + L(0, y + k; n, x) + a(y + k - x)).$$

Следовательно, при всех $n > 0$ и $y, x \in \mathbb{R}$ величина $L(0, y + k; n, x) + a(y + k - x)$, рассматриваемая как функция $k \in \mathbb{Z}$, ограничена снизу. Обозначим

$$L_n^a(y, x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} (L(0, y + k; n, x) + a(y + k - x)), \quad (10)$$

где точная нижняя грань достигается, поскольку функция $L(s, y; t, x)$ непрерывна и неограниченно возрастает при $|x - y| \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$s_n(x; a, s_0) = \min_{y \in \mathbb{R}} (s_0(y) + L_n^a(y, x)). \quad (11)$$

ЛЕММА 7. *Для любого $n = 1, 2, \dots$ функция $L_n^a(y, x)$ является периодической по переменным x, y и непрерывной по Липшицу по x ; ее константа Липшица $C^*(a)$ не зависит от выбора n и $y \in \mathbb{R}$. Для всех n_1, n_2 таких, что $n_1 > 0, n_2 > 0$,*

$$L_{n_1+n_2}^a(y, x) = \min_{z \in \mathbb{R}} (L_{n_1}^a(y, z) + L_{n_2}^a(z, x)). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $l, m \in \mathbb{Z}$ имеем $L_n^a(y + l, x + m) = L_n^a(y, x)$; следовательно, функция $L_n^a(y, x)$ является периодической.

Пользуясь определением $L_n^a(y, x)$ (10) при $n = n_1 + n_2$ и принципом оптимальности Беллмана (7) при $s = 0, r = n_1$ и $t = n_1 + n_2$, с учетом леммы 2 получаем

$$L_{n_1+n_2}^a(y, x) = \min_{z \in \mathbb{R}} (L_{n_1}^a(y, z) + L(0, z; n_2, x) + a(z - x)).$$

Пользуясь периодичностью $L_{n_1}^a(y, z)$ по z , получаем (12).

Проверим, что функция $L_n^a(y, x)$ при $n = 1$ непрерывна по Липшицу по переменной x . Поскольку $L_1^a(y, x)$ является поточечным минимумом семейства непрерывных функций, она полунепрерывна сверху. Обозначим наибольшее значение функции $L_1^a(y, x)$ на компактном множестве $Q = \{(y, x) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ через N . Так как функция $L_0(x)$ возрастает при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой линейной функции, существует такое число $R > 0$, что неравенство $L_0(x - y - k) +$

$a(y + k - x) > N + \max_{(t,x) \in \mathbb{R}^2} U(t, x)$ выполнено при всех $(y, x) \in Q$, если $|k| > R$. Поэтому из леммы 4 вытекает, что для любых $(y, x) \in Q$

$$L_1^a(y, x) = \min_{k \in \mathbb{Z}, |k| < R} (L(0, y + k; 1, x) + a(y + k - x)).$$

С другой стороны, пользуясь леммой 5, можно заключить, что все функции $L(0, y + k; 1, x) + a(y + k - x)$ при $|k| < R$ непрерывны по Липшицу на компакте Q с общей для всех константой $C^*(a) \leq C(R + 1, 0, 1) + |a|$. Поэтому функция $L_1^a(y, x)$ непрерывна по Липшицу на Q (и следовательно, в силу периодичности, на всей плоскости $\mathbb{R}^2$) с той же константой.

Наконец, из соотношения (12) при любом $n \geq 2$ вытекает, что

$$L_n^a(y, x) = \min_{z \in \mathbb{R}} (L_{n-1}^a(y, z) + L_1^a(z, x)),$$

т.е. для любого $y \in \mathbb{R}$ функция $L_n^a(y, \cdot)$ является поточечным минимумом семейства функций, непрерывных по Липшицу с одной и той же константой $C^*(a)$. Поэтому функция $L_n^a(y, \cdot)$ так же является непрерывной по Липшицу с константой $C^*(a)$ при всех $n = 1, 2, \dots$.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого $n = 1, 2, \dots$ функция $s_n(x; a, s_0)$, определенная формулой (11), является периодической и непрерывной по Липшицу с константой $C^*(a)$, а ее колебание ограничено той же константой:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} s_n(x; a, s_0) - \min_{x \in \mathbb{R}} s_n(x; a, s_0) \leq C^*(a), \quad (13)$$

причем для всех $t \in \mathbb{Z}$ таких, что $t > n$,

$$s_t(x; a, s_0) = \min_{y \in \mathbb{R}} (s_{t-n}(y; a, s_0) + L_n^a(y, x)). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (11) функция $s_n(x; a, s_0)$ есть поточечный минимум семейства функций, непрерывных по Липшицу с общей константой $C^*(a)$ и потому сама непрерывна по Липшицу с той же константой. С учетом периодичности отсюда вытекает оценка (13). Равенство (14) следует из соотношения (12) при $n_1 = t - n, n_2 = n$.

Пусть $S^a(t, x)$ есть обобщенное вязкостное решение уравнения (1) вида (2). При $t > 0$ эта функция служит (обобщенным вязкостным) решением задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $S_0(x) = S^a(0, x)$. Поэтому

$$S^a(t, x) = \min_{y \in \mathbb{R}} (S^a(0, y) + L(0, y; t, x)), \quad t > 0.$$

Введем обозначение $s^a(x) = S^a(0, x) - ax = s^a(0, x)$. Из (2) следует, что $S^a(1, x) - ax + H(a) = s^a(x)$. Следовательно,

$$\min_{y \in \mathbb{R}} (s^a(y) + a(y - x) + L(0, y; 1, x)) + H(a) = s^a(x).$$

Пользуясь введенными выше обозначениями, перепишем последнее равенство в виде функционального уравнения:

$$s^a(x) = \min_{y \in \mathbb{R}} (s^a(y) + L_1^a(y, x)) + H(a). \quad (15)$$

С другой стороны, пусть $s^a(x)$ есть непрерывная периодическая функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (15); тогда обобщенное вязкостное решение (6) задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными $S_0(x) = ax + s^a(x)$, очевидно, имеет вид (2). Таким образом, для доказательства теоремы I достаточно показать, что при любом $a \in \mathbb{R}$ существуют $H(a) \in \mathbb{R}$ и непрерывная периодическая функция $s^a(x)$, удовлетворяющие функциональному уравнению (15).

§ 4. Доказательство теоремы I

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Обозначим

$$H_n(a) = \max_{(y,x) \in \mathbb{R}^2} \left(-\frac{1}{n} L_n^a(y, x) \right) = \max_{(y,x) \in \mathbb{R}^2} \left(-\frac{1}{n} L(0, y; n, x) + a \frac{x-y}{n} \right). \quad (16)$$

ЛЕММА 8. Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует такое $H(a) \in \mathbb{R}$, что

$$|H_n(a) - H(a)| \leq \frac{C^*(a)}{n}, \quad (17)$$

где $C^*(a)$ есть константа Липшица функции $L_n^a(y, \cdot)$ при любых y , $n = 1, 2, \dots$. Функция $a \mapsto H(a)$ является выпуклой и допускает оценки

$$t \leq H(a) - H_0(a) \leq M, \quad (18)$$

где величины t и M были определены при формулировке леммы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_0(x) = 0$, $s_n(x) = s_n(x; a, s_0)$ (см. (11)). Из (14) следует, что для любых целых чисел $0 < n_0 < n$

$$s_n(x) = \min_{y \in \mathbb{R}} (s_{n-n_0}(y) + L_{n_0}^a(y, x)). \quad (19)$$

Легко видеть, что $\min_{x \in \mathbb{R}} s_{n_0}(x) = \min_{(y,x) \in \mathbb{R}^2} L_{n_0}^a(y, x) = -n_0 H_{n_0}(a)$ при любом $n_0 = 1, 2, \dots$. В силу следствия из леммы 7 функция $s_{n_0}(x)$ удовлетворяет двойному неравенству $-n_0 H_{n_0}(a) \leq s_{n_0}(x) \leq -n_0 H_{n_0}(a) + C^*(a)$. Сопоставляя его с соотношениями (19) и (16), получаем

$$\begin{aligned} -n H_n(a) &\leq s_n(x) \leq -(n - n_0) H_{n-n_0}(a) + C^*(a) - n_0 H_{n_0}(a), \\ -(n - n_0) H_{n-n_0}(a) - n_0 H_{n_0}(a) &\leq s_n(x) \leq -n H_n(a) + C^*(a). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|n H_n(a) - n_0 H_{n_0}(a) - (n - n_0) H_{n-n_0}(a)| \leq C^*(a).$$

Представим n в виде $n = pn_0 + q$, где $p \geq 1$ и $0 \leq q < n_0$. Индукцией по p легко проверить, что

$$|nH_n(a) - pn_0H_{n_0}(a) - qH_q(a)| \leq pC^*(a),$$

или

$$\left| H_n(a) - H_{n_0}(a) + \frac{q}{n}(H_{n_0}(a) - H_q(a)) \right| \leq \frac{p}{n} C^*(a) \leq \frac{1}{n_0} C^*(a). \quad (20)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно мало; тогда можно выбрать целое $n_0 > 0$ так, чтобы $0 < C^*(a)/n_0 < \varepsilon$, и такое целое $N > 0$, что при $n > N$ и любом целом q , $0 \leq q < n_0$, справедливо неравенство $|q(H_{n_0}(a) - H_q(a))|/n < \varepsilon$. Следовательно, если только $n_1 = p_1n_0 + q_1 > N$, $n_2 = p_2n_0 + q_2 > N$, то $|H_{n_1}(a) - H_{n_2}(a)| \leq 4\varepsilon$, так что последовательность $\{H_n(a)\}$, $n = 1, 2, \dots$, является фундаментальной. Обозначим ее предел через $H(a)$; переходя к пределу в (20) при $n \rightarrow \infty$, получаем неравенство (17) при $n = n_0$.

Покажем, что функция $a \mapsto H(a)$ является выпуклой. Пусть $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha, \beta < 1$ и $\alpha + \beta = 1$. Пользуясь определением (16) функции $H_n(a)$, получаем

$$\begin{aligned} H_n(\alpha a_1 + \beta a_2) &= -\frac{1}{n} \min_{(y,x) \in \mathbb{R}^2} (L(0, y; n, x) + (\alpha a_1 + \beta a_2)(y - x)) \\ &= -\frac{1}{n} \min_{(y,x) \in \mathbb{R}^2} [\alpha(L(0, y; n, x) + a_1(y - x)) + \beta(L(0, y; n, x) + a_2(y - x))] \\ &\leq \alpha H_n(a_1) + \beta H_n(a_2). \end{aligned}$$

В пределе при $n \rightarrow \infty$ отсюда следует, что функция $H(a)$ является выпуклой.

Наконец, из леммы 4 вытекает, что

$$-M \leq \frac{1}{n} L(0, y; n, x) - L_0\left(\frac{x-y}{n}\right) \leq -m.$$

Поэтому

$$m + a \frac{x-y}{n} - L_0\left(\frac{x-y}{n}\right) \leq a \frac{x-y}{n} - \frac{1}{n} L(0, y; n, x) \leq M + a \frac{x-y}{n} - L_0\left(\frac{x-y}{n}\right).$$

Применяя операцию $\max_{(y,x) \in \mathbb{R}^2}$ и обозначая $(x-y)/n = v$, получаем

$$m + \max_{v \in \mathbb{R}} (av - L_0(v)) \leq H_n(a) \leq M + \max_{v \in \mathbb{R}} (av - L_0(v)).$$

Но $\max_{v \in \mathbb{R}} (av - L_0(v)) = H_0(a)$ по известной формуле преобразования Лежандра–Фенхеля. В пределе при $n \rightarrow \infty$ получаем (18).

Пусть $a \in \mathbb{R}$, а $s_0(x)$ – некоторая непрерывная периодическая функция. Покажем, что существует предел

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (s_n(x; a, s_0) + nH(a)) = s^a(x), \quad (21)$$

причем функция $s^a(x)$ является решением функционального уравнения (15), т.е. решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $S_0(x) = ax + s^a(x)$ имеет вид (2). Дополняя эти факты утверждением леммы 8, мы получим заключение теоремы I.

Используя определения $s_n(x; a, s_0)$ (11) и $H_n(a)$ (16), получаем

$$\min_{y \in \mathbb{R}} s_0(y) - nH_n(a) \leq s_n(x; a, s_0) \leq \max_{y \in \mathbb{R}} s_0(y) - nH_n(a).$$

Прибавляя $nH(a)$ и пользуясь (17), будем иметь

$$\min_{y \in \mathbb{R}} s_0(y) - C^*(a) \leq s_n(x; a, s_0) + nH(a) \leq \max_{y \in \mathbb{R}} s_0(y) + C^*(a). \quad (22)$$

Положим

$$\bar{s}_n(x) = \inf_{m \geq n} (s_m(x; a, s_0) + mH(a)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Для любого $x \in \mathbb{R}$ последовательность значений $\{\bar{s}_n(x)\}$ является неубывающей; из неравенств (22) следует также, что она ограничена равномерно по x и n . В силу следствия из леммы 7 все функции $\bar{s}_n(x)$ являются непрерывными по Липшицу с константой $C^*(a)$; следовательно, функции последовательности $\{\bar{s}_n(x)\}$ равномерно непрерывны. Поэтому существует предельная функция

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (s_n(x; a, s_0) + nH(a)) = s^a(x),$$

которая является периодической и непрерывной по Липшицу с константой $C^*(a)$.

Проверим, что функция $s^a(x)$ есть решение функционального уравнения (15). Имеем

$$\begin{aligned} & \min_{y \in \mathbb{R}} (\bar{s}_n(y) + L_1^a(y, x)) + H(a) \\ &= \min_{y \in \mathbb{R}} \left(\inf_{m \geq n} \left(\min_{z \in \mathbb{R}} (s_0(z) + L_m^a(z, y) + L_1^a(y, x) + (m+1)H(a)) \right) \right). \end{aligned}$$

Но из определения $H_n(a)$ и леммы 8 следует, что величина $L_m^a(z, y) + mH(a)$ оценивается снизу константой $-C^*(a)$ при всех $m = 1, 2, \dots$. Поэтому можно переставить местами операции взятия минимума по $y \in \mathbb{R}$ и точной нижней грани по $m \geq n$:

$$\min_{y \in \mathbb{R}} (\bar{s}_n(y) + L_1^a(y, x)) + H(a) = \bar{s}_{n+1}(x).$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем (15).

§ 5. Мнозначное отображение, связанное с $s^a(x)$

Пусть $a \in \mathbb{R}$, а $s^a(x)$ есть непрерывная периодическая функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (15) при данном a . Обозначим $L_a(y, x) = L(0, y; 1, x) + a(y - x) + H(a)$. Определим $Y^a(x)$ как многозначное отображение действительной прямой в совокупность своих подмножеств по следующему правилу:

$$Y^a(x) = \arg \min_{y \in \mathbb{R}} (s^a(y) + L_a(y, x)). \quad (23)$$

Очевидно, $y \in Y^a(x)$ тогда и только тогда, когда

$$s^a(y) + L_a(y, x) = s^a(x) = \min_{z \in \mathbb{R}} (s^a(z) + L_a(z, x)). \quad (24)$$

Определим сумму Минковского двух произвольных подмножеств $X, Y \subset \mathbb{R}$ как $X + Y = \{z \in \mathbb{R} : z = x + y, x \in X, y \in Y\}$. Если $Y = \{y\}$, обозначим $X + \{y\}$ через $X + y$.

ЛЕММА 9. Для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$Y^a(x + 1) = Y^a(x) + 1. \quad (25)$$

Если существует такое $x_0 \in \mathbb{R}$, что $x \in Y^a(x_0)$, то множество $Y^a(x)$ содержит только одну точку. Если $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, $y_1 \in Y^a(x_1)$ и $y_2 \in Y^a(x_2)$, то $y_1 < y_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (25) вытекает из периодичности функции $s^a(x)$ и диагональной периодичности $L_a(y, x)$ (лемма 2).

Пусть $x_1 < x_2$ и $y_i \in Y^a(x_i)$, $i = 1, 2$. В силу (24)

$$\begin{aligned} s^a(y_1) + L(0, y_1; 1, x_1) + ay_1 &\leq s^a(y_2) + L(0, y_2; 1, x_1) + ay_2, \\ s^a(y_2) + L(0, y_2; 1, x_2) + ay_2 &\leq s^a(y_1) + L(0, y_1; 1, x_2) + ay_1, \end{aligned}$$

т. е.

$$L(0, y_1; 1, x_1) + L(0, y_2; 1, x_2) \leq L(0, y_2; 1, x_1) + L(0, y_1; 1, x_2).$$

Поэтому из следствия леммы 6 вытекает, что $y_1 \leq y_2$.

Предположим, что $y_1 = y_2 = y$. Выберем какое-либо $y_0 \in Y^a(y)$. Из (24) следует, что

$$s^a(x_i) = s^a(y_0) + L(0, y_0; 1, y) + L(1, y; 2, x_i) + a(y_0 - x_i) + 2H(a), \quad i = 1, 2.$$

С другой стороны, пользуясь (15), получаем

$$\begin{aligned} s^a(x_i) &= \min_{z \in \mathbb{R}} \min_{t \in \mathbb{R}} (s^a(t) + L(0, t; 1, z) + L(1, z; 2, x_i) + a(t - x_i) + 2H(a)) \\ &\leq \min_{z \in \mathbb{R}} (s^a(y_0) + L(0, y_0; 1, z) + L(1, z; 2, x_i) + a(y_0 - x_i) + 2H(a)), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда из леммы 6 следует, что $x_1 = x_2$; это противоречие показывает, что на самом деле $y_1 < y_2$.

Наконец, предположим, что $x \in Y^a(x_0)$ для некоторого x_0 и $y_1, y_2 \in Y^a(x)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $y_1 = y_2$. Поэтому множество $Y^a(x)$ состоит из единственной точки.

ЛЕММА 10. Пусть $M_0 = \mathbb{R}$, и пусть $M_n = Y^a(M_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$ и существует такое замкнутое непустое множество M^a , что:

- (i) $M^a = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$;
- (ii) для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$, для которого $M^a \subset U + \mathbb{Z}$, существует такой номер $N > 0$, что если числовая последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет включениям $y_{n+1} \in Y^a(y_n)$ при $n = 0, 1, \dots$, то $y_n \in U + \mathbb{Z}$ при всех $n \geq N$;
- (iii) ограничение $Y^a|_{M^a}$ отображения Y^a на множество M^a является взаимно однозначным непрерывным отображением с непрерывным обратным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, все множества M_n , $n = 1, 2, \dots$, непусты, а множество $M_0 = \mathbb{R}$ содержит M_1 . Пусть $M_n \subset M_{n-1}$ при некотором $n \geq 1$; тогда $M_{n+1} = Y^a(M_n) \subset Y^a(M_{n-1}) = M_n$.

Покажем, что все множества M_n , $n = 0, 1, \dots$, замкнуты. Заметим, что $M_0 = \mathbb{R}$ замкнуто. Пусть множество M_n , $n \geq 0$, замкнуто, а последовательность $\{y_k\}$, лежащая в M_{n+1} , $k = 1, 2, \dots$, имеет предел $\bar{y} \in \mathbb{R}$. Из леммы 9 следует, что для любого k существует единственный прообраз $x_k = (Y^a)^{-1}(y_k) \in M_n$ и все x_k содержатся в ограниченном интервале действительной оси. Поэтому существует подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$, сходящаяся к пределу $\bar{x} \in M_n$. Пользуясь (24), получаем $s^a(y_{k_l}) + L_a(y_{k_l}, x_{k_l}) = s^a(x_{k_l})$. Так как функции $s^a(x)$ и $L_a(y, x)$ непрерывны, отсюда вытекает, что $s^a(\bar{y}) + L_a(\bar{y}, \bar{x}) = s^a(\bar{x})$. Но из (24) следует, что последнее равенство равносильно включению $\bar{y} \in Y^a(\bar{x})$. Следовательно, $\bar{y} \in Y^a(M_n) = M_{n+1}$, так что множество M_{n+1} замкнуто.

Рассмотрим на действительной прямой $\mathbb{R}$ такую топологию $\mathcal{T}$, в которой множество $V \subset \mathbb{R}$ является открытым в том и только том случае, когда оно представимо в виде $V = U + \mathbb{Z}$, где множество U открыто в обычном смысле. Заметим, что прямая $\mathbb{R}$ в такой топологии компактна. Из (25) следует, что дополнения U_n множеств M_n открыты в топологии $\mathcal{T}$, причем по доказанному $U_n \subset U_{n+1}$.

Очевидно, множество $M^a = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ замкнуто. Предположим, что оно пусто; тогда множества U_n , $n = 1, 2, \dots$, покрывают всю действительную прямую $\mathbb{R}$. Поскольку в топологии $\mathcal{T}$ множество $\mathbb{R}$ компактно, существует такой номер $N > 0$, что $\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^N U_n = U_N$. Поэтому $M_N = \emptyset$; полученное противоречие показывает, что M^a непусто.

Пусть теперь $V \in \mathcal{T}$ таково, что $M^a \subset V$. Аналогично предыдущему убеждаемся, что существует такой номер N , что $\mathbb{R} = V \cup U_N$. С другой стороны, для всякой последовательности $\{y_n\}$, удовлетворяющей включениям $y_{n+1} \in Y^a(y_n)$, $n = 0, 1, \dots$, имеем $y_n \in M_n$. Поэтому при всех $n > N$ получаем, что $y_n \in V$.

Обозначим через $Y^a|_{M_n} : M_n \rightarrow M_{n+1}$ ограничение многозначного отображения Y^a на M_n , $n \geq 1$. Из леммы 9 следует, что отображение $Y^a|_{M_n}$ однозначно, строго монотонно как функция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и потому взаимно однозначно. Более того, оно является гомеоморфизмом (как в обыкновенной топологии, так и в топологии $\mathcal{T}$). В самом деле, пусть последовательности $\{x_k\} \subset M_n$ и $\{y_k\} \subset M_{n+1}$ связаны соотношениями $Y^a(x_k) = y_k$ при всех $k = 1, 2, \dots$. Если y_k сходятся к $\bar{y}$, то из строгой монотонности $Y^a|_{M_n}$ вытекает, что x_k также сходятся к един-

ственной предельной точке $\bar{x}$, так что отображение $Y^a|_{M_n}$ обладает непрерывным обратным. Напротив, пусть x_k сходится к $\bar{x}$; тогда множество $\{y_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничено. Пусть $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$, $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$, суть две предельные точки последовательности $\{y_k\}$; тогда $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2\} \subset Y^a(\bar{x})$, так как функции $s^a(x)$ и $L_a(y, x)$ непрерывны. Но отображение $Y^a|_{M_n}$ является однозначным; полученное противоречие показывает, что оно непрерывно.

По доказанному множество M^a есть замкнутое подмножество любого из множеств M_n , $n = 1, 2, \dots$; кроме того, $Y^a(M^a) = M^a$. Следовательно, ограничение отображения $Y^a|_{M_n}$ на M^a является гомеоморфизмом.

Будем говорить, что M^a есть *инвариантное множество* многозначного отображения Y^a .

§6. Связь с теорией Обри–Мезера

Напомним некоторые результаты теории Обри–Мезера, необходимые для доказательства теоремы II (см., например, обзор [10]).

Предположим, что функция $L(y, x)$ всюду конечна и непрерывна на своей области определения $\mathbb{R}^2$, диагонально периодически в смысле леммы 2, неограниченно возрастает при $|x - y| \rightarrow \infty$ и для всех $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) если $x_1 < x_2$ и $y_1 < y_2$, то $L(y_1, x_1) + L(y_2, x_2) \leq L(y_2, x_1) + L(y_1, x_2)$;
- 2) если $z_0 \in \mathbb{R}$ таково, что $L(y_i, z) + L(z, x_i) \geq L(y_i, z_0) + L(z_0, x_i)$, $i = 1, 2$, при всех $z \in \mathbb{R}$, то либо $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, либо $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$.

Пусть последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, обладает следующим свойством: для всех $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$, $N_1 < N_2$, и любого набора $\{y_j\}$, $j = N_1, N_1 + 1, \dots, N_2$, такого, что $y_{N_1} = x_{N_1}$ и $y_{N_2} = x_{N_2}$, выполнено неравенство

$$\sum_{j=N_1}^{N_2-1} L(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=N_1}^{N_2-1} L(y_j, y_{j+1});$$

тогда $\{x_n\}$ называется *L-минимальной конфигурацией*.

ЛЕММА 11 (см., например, [10]). Пусть функция $L(y, x)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям, а $\{x_n\}$ есть L-минимальная конфигурация; тогда существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{x_n - x_0}{n} = \omega(\{x_n\}) \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

Если $\omega = \omega(\{x_n\})$ иррационально, то найдется функция $\varphi_\omega(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

- (i) $\varphi_\omega(t)$ непрерывна справа и строго монотонна;
- (ii) $\varphi_\omega(t+1) = \varphi_\omega(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$;
- (iii) если $x_0 = \varphi_\omega(t_0 \pm 0)$, то конфигурация $\{x_n\}$, определяемая соотношением $x_n = \varphi_\omega(t_0 + n\omega \pm 0)$, L-минимальна;
- (iv) какова бы ни была окрестность $V \in \mathcal{T}$ замыкания образа $\varphi_\omega(\mathbb{R})$, $x_n \in V$ для любой L-минимальной конфигурации $\{x_n\}$ при достаточно больших $|n|$.

Число $\omega(\{x_k\})$ называется *числом вращения* конфигурации $\{x_k\}$.

Заметим, что функция $L_a(y, x)$, определенная в предыдущем параграфе, удовлетворяет всем условиям, сформулированным для функции $L(y, x)$.

ЛЕММА 12. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $s^a(x)$ – непрерывная периодическая функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (15), $Y^a(x)$ – соответствующее ей многозначное отображение, M^a – его инвариантное множество и $x \in M^a$. Тогда последовательность $x_k = (Y^a)^{-k}(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, является L_a -минимальной конфигурацией. Если для некоторого $y \in M^a$ определить последовательность $y_k = (Y^a)^{-k}(y)$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\omega(\{x_k\}) = \omega(\{y_k\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (24) следует, что

$$s^a(x_{n+1}) = s^a(x_n) + L_a(x_n, x_{n+1}).$$

Следовательно,

$$s^a(x_{N_2}) - s^a(x_{N_1}) = \sum_{k=N_1}^{N_2-1} L_a(x_k, x_{k+1}).$$

С другой стороны,

$$s^a(x_{N_2}) = \min_{y_{N_1}, y_{N_1+1}, \dots, y_{N_2-1}} \left(s^a(y_{N_1}) + \sum_{k=N_1}^{N_2-1} L_a(y_k, y_{k+1}) \right),$$

где $y_{N_2} = x_{N_2}$. Поэтому для любого набора $\{y_j\}$, $j = N_1, N_1 + 1, \dots, N_2$, такого, что $x_{N_1} = y_{N_1}$ и $x_{N_2} = y_{N_2}$, имеем

$$s^a(x_{N_2}) - s^a(x_{N_1}) \leq \sum_{k=N_1}^{N_2-1} L_a(y_k, y_{k+1}).$$

Следовательно, двусторонняя последовательность $\{x_n\}$ является L_a -минимальной конфигурацией.

Пусть теперь $y_k = (Y^a)^{-k}(y)$ для некоторого $y \in M^a$. Выберем $p \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $x \leq y + p \leq x + 1$. По лемме 9 отсюда следует, что $(Y^a)^{-k}(x) \leq (Y^a)^{-k}(y + p) \leq (Y^a)^{-k}(x + 1)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Пользуясь (26), получаем, что $\omega(\{x_k\}) = \omega(\{y_k\})$.

§ 7. Доказательство теоремы II

Пусть $a \in \mathbb{R}$, $s^a(x)$ – непрерывная периодическая функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (15), а M^a – инвариантное множество соответствующего многозначного отображения $Y^a(x)$. Подмножество $M \subset M^a$ инвариантного множества называется *минимальным инвариантным множеством* отображения $Y^a|_{M^a}$, если M замкнуто в топологии $\mathcal{T}$, определенной при доказательстве леммы 10, $Y^a(M) = M$ и множество M не содержит ни одного собственного замкнутого подмножества, которое обладало бы теми же свойствами.

Пусть $x \in M^a$; последовательность $\{(Y^a)^k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots$, называется *орбитой* точки x . Можно показать, что подмножество $M \subset M^a$ минимально в том и

только том случае, если орбита каждой точки $x \in M$ всюду плотна в M в топологии $\mathcal{T}$.

ЛЕММА 13. Пусть $s_1^a(x)$ и $s_2^a(x)$ – непрерывные периодические функции, удовлетворяющие функциональному уравнению (15), а $Y^a(x)$ – многозначное отображение, соответствующее $s_1^a(x)$; тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $y \in Y^a(x)$, выполнено неравенство

$$s_1^a(x) - s_2^a(x) \geq s_1^a(y) - s_2^a(y). \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (24) следует, что $s_1^a(x) = s_1^a(y) + L_a(y, x)$. Пользуясь (11), получаем

$$\begin{aligned} s_1^a(x) - s_2^a(x) &= s_1^a(y) + L_a(y, x) - s_2^a(x) \\ &= s_2^a(y) + L_a(y, x) - s_2^a(x) + s_1^a(y) - s_2^a(y) \geq s_1^a(y) - s_2^a(y). \end{aligned}$$

Пусть функции $s_1^a(x)$ и $s_2^a(x)$ удовлетворяют предположениям леммы 13, $Y_1^a(x)$ и $Y_2^a(x)$ суть соответствующие им многозначные отображения, а M_1^a и M_2^a – их инвариантные множества. Из леммы 12 вытекает, что соответствующие числа вращения ω_1 и ω_2 определяются единственным образом. Множество M_1^a компактно в топологии $\mathcal{T}$; с учетом периодичности отображения $Y_1^a(x)$ (25) отсюда следует, что Y_1^a является гомеоморфизмом компакта M_1^a в этой топологии. По известной теореме Биркгофа [11] множество M_1^a содержит по крайней мере одно минимальное множество отображения Y_1^a ; обозначим такое множество через M_1 .

Функции $s_1^a(x)$ и $s_2^a(x)$ непрерывны в топологии $\mathcal{T}$ благодаря своей периодичности. Пусть в точке $x_0 \in M_1$ разность $s_1^a(x) - s_2^a(x)$ достигает своего минимального значения на замкнутом множестве M_1 , а $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, есть орбита этой точки. По предыдущей лемме

$$s_1^a(x_0) - s_2^a(x_0) \leq s_1^a(x_k) - s_2^a(x_k) \leq s_1^a(x_0) - s_2^a(x_0).$$

Поскольку замыкание орбиты $\{x_k\}$ совпадает со всем множеством M_1 , разность $s_1^a(x) - s_2^a(x)$ должна оставаться постоянной всюду на этом множестве. Но в таком случае из соотношения (24) следует, что на множестве M_1 отображения $Y_1^a(x)$ и $Y_2^a(x)$ совпадают. В частности, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ или, что то же самое, число вращения ω зависит только от величины a . Кроме этого, если множество M является минимальным множеством отображения, соответствующего некоторой непрерывной периодической функции $s^a(x)$, удовлетворяющей (15), то оно является минимальным также и для любой другой непрерывной периодической функции, удовлетворяющей (15) с тем же a .

Пусть теперь число вращения $\omega = \omega(a)$ иррационально. Согласно леммам 12 и 11 (iv), замыкание $\overline{M}$ множества $\varphi_\omega(\mathbb{R})$ содержит предельные точки в топологии $\mathcal{T}$ замкнутого множества M^a и потому $\overline{M} \cap M^a$ непусто. Далее, если $x_0 \in M^a$ и существует такое t_0 , что $x_0 = \varphi_\omega(t_0 \pm 0) \in \overline{M}$, то по лемме 11 (iii) замыкание орбиты точки x_0 в топологии $\mathcal{T}$ совпадает с $\overline{M}$, так что $\overline{M} \subseteq M^a$. Но тогда п. (iv) леммы 11 означает, что $\overline{M}$ есть единственное минимальное инвариантное подмножество M^a независимо от выбора решения $s^a(x)$ функционального уравнения (15).

Докажем, что при иррациональном числе вращения $\omega = \omega(a)$ любые две непрерывные периодические функции $s_1^a(x)$ и $s_2^a(x)$, удовлетворяющие (15), отличаются друг от друга на константу. Без потери общности предположим, что $s_1^a(x) - s_2^a(x) = 0$ на $\overline{M}$. Пусть в точке x_0 разность $s_1^a(x) - s_2^a(x)$ достигает своего минимального значения на M_1^a ; ее орбиту обозначим $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$. Рассуждая как раньше, получаем, что $s_1^a(x_k) - s_2^a(x_k) = s_1^a(x_0) - s_2^a(x_0)$ при всех $k \geq 1$. С другой стороны, из леммы 11 (iv) следует, что для любой окрестности $V \in \mathcal{T}$ множества $\overline{M}$ существует такой номер N , что $x_k \in V$ для всех $k > N$. Поэтому из непрерывности функций $s_1^a(x)$ и $s_2^a(x)$ вытекает, что $s_1^a(x_0) - s_2^a(x_0) = 0$; следовательно, $s_1^a(x) \geq s_2^a(x)$ при всех $x \in M_1^a$. Аналогично можно показать, что $s_1^a(x) \leq s_2^a(x)$ на M_1^a , так что $s_1^a(x) = s_2^a(x)$ на M_1^a . Аналогичное рассуждение, опирающееся на лемму 10 (iii), показывает, что $s_1^a(x) = s_2^a(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Итак, при иррациональном числе вращения $\omega(a)$ функциональное уравнение (15) имеет в классе непрерывных периодических функций единственное решение $s^a(x)$ с точностью до аддитивной константы. Поэтому решение (6) задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными $S_0(x) = ax + s^a(x)$, имеющее вид (2), определено единственным образом с точностью до аддитивной константы. Тем самым доказательство теоремы II завершено.

Список литературы

1. Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. P. 1–42.
2. Aubry S. The twist map, the extended Frenkel–Kontorova model and the devil's staircase // Physica D. 1983. V. 7. P. 240–258.
3. Aubry S., Le Daeron P. Y. The discrete Frenkel–Kontorova model and its extensions. I. Exact results for the ground states // Physica D. 1983. V. 8. P. 381–422.
4. Mather J. N. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus // Topology. 1982. V. 21. P. 457–467.
5. Соболевский А. Н. О периодических решениях уравнения Гамильтона–Якоби с периодической силой // УМН. 1998. Т. 53. № 6. С. 265–266.
6. Jauslin H. R., Kreiss H. O., Moser J. On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions // Preprint, 1997.
7. E W. Aubry–Mather theory and periodic solutions of the forced Burgers equation // Comm. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. № 7. P. 811–828.
8. Cesari L. Optimization – theory and applications. Problems with ordinary differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983.
9. Lions P.-L. Generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. Boston: Pitman, 1982.
10. Mather J. N., Forni G. Action minimizing orbits in Hamiltonian systems // Lecture Notes in Math. 1994. V. 1589. P. 92–186.
11. Birkhoff G. D. Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques // Bull. Soc. Math. France. 1912. V. 40.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ans@srdlan.npi.msu.su

Поступила в редакцию
18.02.1999