*Динамические системы, 2015, том 5(33), №1-2, 43–49*

УДК 517.938

# О типах ячеек Ω-устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях[1]

**В. Е. Круглов*, Т. М. Митрякова*, О. В. Починка****

*Нижегородский Государственный Университет имени Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород 603950.
**Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики
Нижний Новгород. *E-mail: KruglovSlava21@mail.ru, tatiana.mitryakova@yandex.ru, olga-pochinka@yandex.ru*

**Аннотация.** В классических работах А.А. Андронова, Л.С. Понтрягина, Е.А. Леонтович, А.Г. Майера, М. Пейшото топологическая классификация потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях следовала из канонического описания динамики в областях (ячейках), на которые эти траектории делят несущее многообразие. В настоящей работе описаны все допустимые ячейки для класса Ω-устойчивых потоков без периодических траекторий на ориентируемых поверхностях. Полученное описание позволяет представить динамику рассматриваемых потоков комбинаторным образом.

**Ключевые слова:** поток, Ω-устойчивость, ячейка

## 1. Введение и формулировка результатов

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях состоит в выделении на несущем многообразии областей с предсказуемым поведением траекторий — *ячеек*. Такой взгляд на непрерывные динамические системы восходит к классической работе А.А. Андронова и Л.С. Понтрягина [1] 1937 года, в которой они рассмотрели систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = v(x)$, где $v(x)$ — $C^1$-векторное поле, заданное в круге на плоскости, граница которого является кривой без контакта, и нашли критерий грубости этой системы.

В работах Е.А. Леонтович-Андроновой и А.Г. Майера [4], [5] рассматривался более общий класс динамических систем и их классификация также была основана на идеях о выделении множества специальных траекторий, относительное положение которых (схема Леонтович-Майера) полностью определяет качественную структуру разбиения фазового пространства динамической системы на траектории. Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения – незамкнутая рекуррентная траектория. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была доказана А.Г. Майером [6] в 1939 году. В 1971 в работе [10] М. Пейшото обобщил схему Леонтович-Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков опять-таки изучив все допустимые ячейки для них. В 1976 году Д. Нейманом и Т. О'Брайеном [7]

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»), Российского фонда научных исследований (гранты N 13-01-12452 офи-м и 15-01-03689-а) и Российского Научного фонда (грант 14-41-00044).

на произвольных поверхностях были рассмотрены, так называемые *регулярные потоки* – потоки без нетривиальных периодических траекторий, которые включают в себя описанные выше потоки как частный случай. Они ввели полный топологический инвариант для регулярных потоков – *орбитальный комплекс*, который представляет из себя пространство орбит потока, оснащенное некоторой дополнительной информацией.

В настоящей работе описываются все допустимые ячейки для класса $G$, состоящего из $\Omega$-устойчивых потоков без периодических траекторий на ориентируемых поверхностях. Класс $G$ входит в множество регулярных потоков, рассмотренных в [7], однако подход к топологической классификации таких потоков со стороны ячеек, позволит в дальнейшем описать их динамику комбинаторным образом, подобно [3], и решить для них проблему реализации, подобно [8]. Более детально.

Пусть $S$ — *ориентируемая поверхность*, т.е. сфера с ручками или без (см. Рис. 1). *Гладким потоком* на поверхности $S$ называется гладкое отображение $f : S \times \mathbb{R} \to S$ с групповыми свойствами:
1) $f(x, 0) = x \ \forall x \in S$;
2) $f(f(x, t), s) = f(x, t + s) \ \forall x \in S, \ \forall s, t \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем будем полагать $f^t(x) = f(x, t)$, $x \in S$, $t \in \mathbb{R}$.

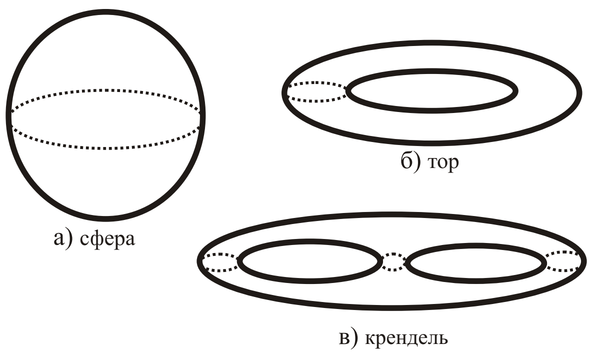


Рис. 1. Примеры поверхности $S$

*Траекторией* или *орбитой* точки $x \in S$ называется множество $O_x = \{f^t, t \in \mathbb{R}\}$. Полагают, что траектории потока ориентированы в соответствии с возрастанием параметра $t$. Точка $x$ называется *неподвижной точкой* или *состоянием равновесия*, если $O_x = \{x\}$. Точка $x \in S$ называется *блуждающей точкой* потока $f^t$, если существует окрытая окрестность $U_x$ точки $x$ такая, что $f^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $t > 1$. В противном случае точка $x$ называется *неблуждающей*. Множество всех блуждающих (неблуждающих) точек потока $f^t$ называется его *блуждающим множеством* (*неблуждающим множеством*). Неблуждающее множество потока $f^t$ обозначается $\Omega_{f^t}$. Неподвижная точка $x$ потока $f^t$ является *гиперболической*, если собственные значения линеаризации потока в окрестности точки $x$ не имеют нулевых действительных частей.

Положим $d$ – метрика на $S$. Тогда гиперболичность неподвижной точки $x$ влечет существование у нее *устойчивого* и *неустойчивого многообразий*, определяемых следующим образом:
$W^s_x = \{y \in S : d(x, f^t(y)) \to 0$ при $t \to +\infty\}$,
$W^u_x = \{y \in S : d(x, f^t(y)) \to 0$ при $t \to -\infty\}$.

*Устойчивой* (*неустойчивой*) *сепаратрисой* неподвижной точки $x$ называется компонента связности $l_x^s$ ($l_x^u$) множества $W_x^s \setminus \{x\}$ ($W_x^u \setminus \{x\}$).

Поток $f^t$ называется $\Omega$-*устойчивым*, если существует окрестность $U(f^t)$ в $C^1(S \times \mathbb{R}, S)$ такая, что если $f'^t \in U(f^t)$, то $f^t|_{\Omega_{f^t}}$ и $f'^t|_{\Omega_{f'^t}}$ топологически эквивалентны посредством гомеоморфизма несущего многообразия.

Из критерия $\Omega$-устойчивости [11] следует, что потоки класса $G$ имеют неблуждающее множество, состоящее из конечного числа гиперболических неподвижных точек и не имеют *циклов*, то есть наборов неподвижных точек $x_1, \dots, x_k, x_{k+1} = x_1$ со свойством

$$W_{x_i}^s \cap W_{x_{i+1}}^u \neq \emptyset, \; i = 1, \dots, k.$$

При этом в классе $G$ системы могут быть как структурно устойчивыми, так и нет, а определяется это отсутствием или наличием *связок* – сепаратрис, идущих из седла в седло. Условие $\Omega$-устойчивости влечет тот факт, что связки потока из класса $G$ не образуют замкнутых кривых.

Простейшим примером структурно устойчивой системы из класса $G$ служит поток на сфере, имеющий четыре неподвижные точки: источник $\alpha$, седло $\sigma$ и два стока $\omega_1$ и $\omega_2$ (см. Рис. 2).

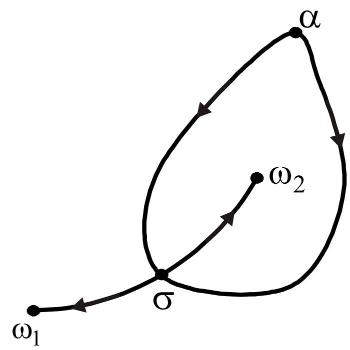


Рис. 2. Простейший пример структурно устойчивого потока из класа $G$

В качестве простейшего примера потока, не являющегося структурно устойчивым, можно привести поток, имеющий шесть неподвижных точек: источники $\alpha_1, \alpha_2$, стоки $\omega_1$, $\omega_2$ и седла $\sigma_1, \sigma_2$ такие, что неустойчивая сепаратриса $\sigma_1$ совпадает с устойчивой сепаратрисой $\sigma_2$ (см. Рис. 3).

Обозначим через $\Omega_{f^t}^0$, $\Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$ множество всех стоков, сёдел, источников потока $f^t$, соответственно. Положим

$$\tilde{S} = S \setminus (\Omega_{f^t}^0 \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^s \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^u \cup \Omega_{f^t}^2).$$

Компонента связности множества $\tilde{S}$ называется *ячейкой.* Если множество $\Omega_{f^t}^1$ пусто, то поток $f^t$ имеет в точности две неподвижные точки: источник и сток, и одну ячейку, замыкание которой совпадает со всем несущим многообразием, которое в этом случае является сферой. Поэтому везде далее мы будем предполагать, что поток $f^t$ имеет хотя бы одну седловую точку.

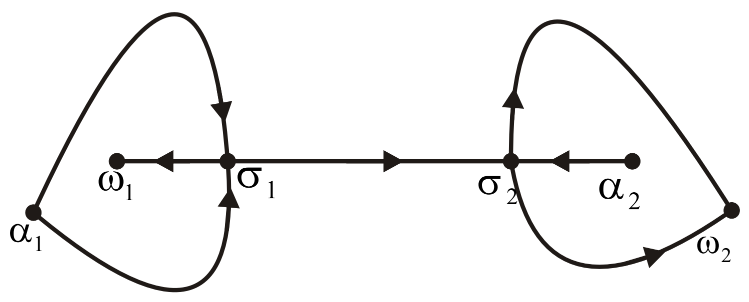


Рис. 3. Простейший пример потока из класа $G$, не являющегося структурно устойчивым

Основным результатом работы являются следующая теорема:

**Теорема.** *Пусть $f^t \in G$ и $J$ — ячейка потока $f^t$. Тогда*

*1) $J$ гомеоморфна открытому диску;*

*2) граница ячейки $J$ состоит из замыканий сепаратрис седловых точек;*

*3) cl $J$ имеет один из типов, изображённых на рисунке 4, где $\alpha$ — источник; $\omega$ – сток; $\sigma$ и $\rho$ с различными индексами — седла; при этом $\sigma_1^+$ может совпадать с $\sigma_1^-$; множества $\mathcal{P}^- = \{\rho_1^-, ..., \rho_i^-, ..., \rho_n^-\}$, $\mathcal{P}^+ = \{\rho_1^+, ..., \rho_j^+, ..., \rho_m^+\}$ могут быть пересекающимися и каждое из них может быть пустым; сепаратрисы, содержащие сток $\omega$ (источник $\alpha$) в своем замыкании не могут совпадать.*

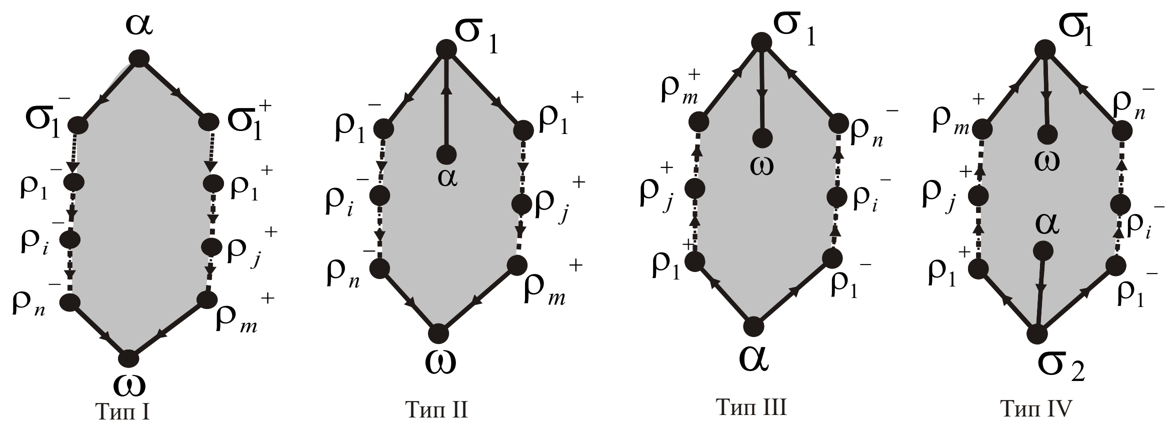


Рис. 4. Типы ячеек потоков из класса $G$

Так поток на рисунке 2 имеет ячейки типов I и III, а на рисунке 3 — типов I, II и III.

## 2. Вспомогательные факты

Пусть $f^t : S \to S$ поток из класса $G$. В этом разделе мы сформулируем необходимые для доказательства основной теоремы факты. Их доказательства следуют из аналогичных фактов для дискретных динамических систем, доказанных в [2].

**Предложение 1.** Пусть $f^t \in G$. Тогда

1) $S = \bigcup\limits_{p\in\Omega_{f^t}} W^u_p = \bigcup\limits_{p\in\Omega_{f^t}} W^s_p$;

2) $W^u_p$ ($W^s_p$) является гладким подмногообразием многообразия $S$, диффеоморфным $\mathbb{R}^i$ ($\mathbb{R}^{2-i}$) для любой неподвижной точки $p \in \Omega^i_{f^t}$;

**Предложение 2.** Пусть поток $f^t \in G$. Тогда для любого источника $\alpha$ (стока $\omega$) потока $f^t$ существует хотя бы одна устойчивая (неустойчивая) сепаратриса $l^s_\sigma$ ($l^u_\sigma$) седловой точки $\sigma$ такая, что $cl(l^s_\sigma)\backslash(l^s_\sigma) = \{\sigma, \alpha\}$ ($cl(l^u_\sigma)\backslash(l^u_\sigma) = \{\sigma, \omega\}$).

## 3. Разбиение несущей поверхности на ячейки

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

**Лемма.** *Пусть $f^t \in G$. Тогда*

*$(i)$ Для $p \in \Omega^0_{f^t}$ выполняется $cl(l^u_p) = \{p\}$;*
*$(ii)$ Для $p \in \Omega^1_{f^t}$ выполняется*

$$cl(l^u_p)\backslash(l^u_p \cup \{p\}) = \begin{cases} \sigma \in \Omega^1_{f^t} \text{ и } l^u_p = l^s_\sigma, \\ \omega \in \Omega^0_{f^t} \text{ и } l^u_p \subset W^s_\omega; \end{cases}$$

*$(iii)$ Для $p \in \Omega^2_{f^t}$ выполняется $cl(l^u_p)\backslash(l^u_p \cup \{p\}) = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_p} cl(l^u_\sigma)$, где $\Omega_p$ непустое подмножество множества $\Omega^1_{f^t}$.*

*Доказательство.* Докажем $(i)$. В случае, когда $p$ – сток, выполняется $W^u_p = \{p\}$, следовательно, $cl(l^u_p) = \{p\}$.

Рассмотрим случай $(ii)$: $p$ – седловая точка. Пусть $x \in cl(l^u_p)$. По пункту 1) Предложения 1 любая точка $l^u_p$ является точкой $W^s_r$ для некоторой неподвижной точки $r$. Для $r$ возможны три варианта: а) $r$ – сток; б) $r$ – седло; в) $r$ – источник.

а) Рассмотрим сток $r = \omega$, такой что $x \in W^s_\omega$. Поскольку $\omega$ – сток и $l^u_p = \mathcal{O}_x$, то $l^u_p \subset W^s_\omega$. Таким образом $cl(l^u_p)\backslash(l^u_p \cup \{p\}) = \{\omega\}$.

б) Рассмотрим седловую точку $r = \sigma$, для которой выполняется $x \in W^s_\sigma$. В этом случае $l^u_p = l^s_\sigma$. Таким образом $cl(l^u_p)\backslash(l^u_p \cup \{p\}) = \{\sigma\}$.

в) Допустим, что существует источник $r = \alpha$ такой, что $x \in W^s_\alpha$. Поскольку $W^s_\alpha = \{\alpha\}$, получаем $\alpha \in l^u_p$, что невозможно, поскольку $l^u_p$ состоит из блуждающих точек. Следовательно, случай в) невозможен.

Рассмотрим случай $(iii)$: $p = \alpha$ – источник.

Из пункта 1) Предложения 1 следует, что множество $A = cl(l^u_\alpha)\backslash(l^u_\alpha \cup \{\alpha\})$ есть $f^t$-инвариантное подмножество множества $W^u_{\Omega^1_{f^t}} \cup \Omega^0_{f^t}$. Тогда для доказательства утверждения достаточно показать, что а) если $\sigma \in A$ для некоторого $\sigma \in \Omega^1_{f^t}$, то $l^u_\sigma \subset A$ и б) если $\omega \in A$ для некоторого $\omega \in \Omega^0_{f^t}$, то существует $\sigma \in \Omega^1_{f^t}$ такое, что $\omega \in cl(l^u_\sigma)$ и $l^u_\sigma \subset A$.

В случае а), поскольку $\sigma \in A$, то существует последовательность $x_n \in l^u_\alpha$ такая, что $x_n \to \sigma$ для $n \to +\infty$. Тогда $\mathcal{O}_{x_n} \subset l^u_\alpha$ и, в силу эквивалентности потока в окрестности гиперболической седловой точки его линейной части (см., например, [9]), множество $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{x_n}$ содержит в своем замыкании $l^u_\sigma$.

В случае б), если $\omega \in A$, то существует последовательность $x_n \in l^u_\alpha$ такая, что $x_n \to \omega$ для $n \to +\infty$. Согласно Предложению 2, существует конечное число седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Omega^1_{ft}$ такое, что $\omega \in cl(l^u_{\sigma_i})$ для $i = 1, \dots, k$. Тогда среди них существуют седловые точки $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}$ (возможно совпадающие) такие, что последовательность $x_n$ принадлежит компоненте связности $D$ множества $W^s_\omega \setminus (\omega \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k} l^u_{\sigma_i})$. Откуда следует, что $D \subset l^u_\alpha$. Таким образом, $l^u_{\sigma_{i_1}} \subset A$ и $l^u_{\sigma_{i_2}} \subset A$. □

Аналогичную лемму можно доказать для устойчивых сепаратрис.

## 4. Доказательство теоремы

Покажем, что любая ячейка потока из класса $G$ имеет один из типов, изображённых на рисунке 4.

*Доказательство.* В силу предложения 1, $\tilde{S} = (\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega^2_{ft}} l^u_\alpha) \setminus (\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^1_{ft}} l^s_\sigma)$. Тогда любая компонента связности $D$ множества $\tilde{S}$ является компонентой связности множества $l^u_\alpha \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{k} l^s_{\sigma_i})$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Omega^1_{ft}$ седловые точки такие, что $\alpha \in cl(l^s_{\sigma_i})$ для $i = 1, \dots, k$. Таким образом любая ячейка $cl(D)$ содержит в своем замыкании единственный источник $\alpha$, устойчивые седловые сепаратрисы $l^s_{\sigma_{i_1}}, l^s_{\sigma_{i_2}} \subset l^u_\alpha$ (возможно совпадающие) и, в силу Леммы 3, конечное (возможно нулевое) число связок.

Аналогично, поскольку $\tilde{S} = (\bigcup\limits_{\omega\in\Omega^0_{ft}} l^s_\omega) \setminus (\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^1_{ft}} l^u_\sigma)$, то любая ячейка $cl(D)$ содержит в своем замыкании единственный сток $\omega$, неустойчивые седловые сепаратрисы $l^u_{\sigma_{j_1}}, l^u_{\sigma_{j_2}} \subset l^s_\omega$ (возможно совпадающие) и конечное(возможно нулевое) число связок.

Перебирая все возможные наборы сепаратрис в границе ячейки, получаем все типы ячеек, изображённые на рисунке 4. □

### Список цитируемых источников


1. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // Доклады Академии наук СССР. — 1937. — Т.14(5). — С. 247–250.

   Andronov A.A., Pontryagin L.S. Rough systems // Doklady Akademii Nauk. – 1937, Vol.14(5).– P.247–250.

2. *Гринес В.З., Починка О.В.* Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях // Успехи математических наук. — 2013. — Т.68:1(409). —С. 129–188

   Grines V.Z., Pochinka O.V. Morse-Smale cascades on 3-manifolds // Russian Mathematical Surveys.–2013. – T.68:1(409).– P. 117–174.

3. *Починка О. В., Круглов В. Е.* Многоцветный граф как полный топологический инвариант потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях //Журнал Средневолжского математического общества. – 2015. – Т.17, N 1. – С. 65-71.

   Pochinka O.V., Kruglov V.E. Multi-color graph as a complete topological invariants of flows with finite number of singular trajectories on surfaces // Zhurnal srednevolzhskogo mathematicheskogo obschestva.– 2015.– Vol.17, N 1.– P.65-71.

4. *Леонтович Е.А., Майер А.Г.* О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории// Докл. Акад. АН СССР.– 1937.– Т.14 (5).–С.251-257

   Leontovich E.A., Mayer A.G. On trajectories defining the qualitative structure of decomposition of the sphere into trajectories // Doklady Akademii Nauk.– 1937.–Vol.14 (5).–P. 251-257.

5. *Леонтович Е.А., Майер А.Г.* О схеме, определяющей топологическую структуры разбиения на траектории // Докл. Акад. АН СССР.– 1955.–Т.103 (4).– С.557-560

   Leontovich E.A., Mayer A.G. On the scheme defining the topological structure of the partition on the trajectory // Doklady Akademii Nauk.– 1955.– Vol.103 (4).– P. 557-560.

6. *Майер А.Г.* Грубые преобразования окружности в окружность // Уч. Зап. ГГУ.– 1939.– Т.12.– С.215-229

   Mayer A.G. A rough transformation of a circle into a circle // Uch. Zap. Gor'kovskogo Univ.– 1939.– Vol.12.– P.215-229

7. *Neumann D. and O'Brien T.* Global structure of continuous flows on 2-manifolds // J. DifF. Eq. – 1976.– Vol.22, N1.– P.89–110.

8. *Ошемков А.А., Шарко В.В.* О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Матем. сб . –1998.–Т.189:8.–С.93–140

   Oshemkov A.A., Sharko V.V. Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds // Mat.Sb. –1998.–Vol.189:8.–P.93–140

9. *Палис Ж., Де Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем.– Пер. с англ.–Мир, 1998.– 301 с.

   Palis J., De Melo W. Geometric theory of dynamical systems. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982.

10. *Peixoto M.* On the classification of flows on two-manifolds // Dynamical systems / Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador-Bahia, Brasil. 1971. M. Peixoto (ed.) N.Y. London: Acad. press. – 1973.– P.389-419.

11. *Pugh C., Shub M.* Ω-stability for flows // Inven. Math.– 1970.–Vol.11.– P.150-158.

*Получена 25.06.2015*