

УДК 537.86

Е.М. Громов, В.В. Тютин

**КОМПЕНСАЦИЯ ИНДУЦИРОВАННОГО РАМАНОВСКОГО РАССЕЙЯНИЯ
ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ КОРОТКИХ СОЛИТОНОВ
В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Рассмотрена динамика коротких солитонов огибающей в рамках уравнения Шредингера третьего порядка с учетом индуцированного рамановского рассеяния и неоднородности линейной дисперсии второго и третьего порядков, кубичной нелинейности и нелинейной дисперсии. В отсутствие неоднородности дисперсии третьего порядка и нелинейной дисперсии показана возможность компенсации рамановского смещения волнового числа солитонов в длинноволновую область возрастающей дисперсией второго порядка, увеличивающей это волновое число. В адиабатическом приближении найдены устойчивые режимы распространения солитонов. Проанализировано влияние неоднородности линейной дисперсии третьего порядка и нелинейной дисперсии на компенсацию эффекта индуцированного рамановского рассеяния при распространении коротких солитонов. Показано, что при учете либо достаточно медленного увеличения линейной дисперсии третьего порядка, либо уменьшения нелинейной дисперсии эффект компенсации индуцированного рамановского рассеяния при распространении коротких солитонов сохраняется.

Ключевые слова: индуцированное рассеяние Рамана, неоднородность, нелинейность, короткие солитоны огибающей.

Введение

Интерес к солитонам обусловлен возможностью их распространения на значительные расстояния с сохранением формы и переноса энергии и информации без значительных потерь. Солитонные решения возникают во многих нелинейных моделях различных областей физики при исследовании распространения интенсивных волновых полей в нелинейных диспергирующих средах: оптических импульсов в волоконных линиях связи, поверхностных волн на воде [1–3]. В оптике значительное внимание уделяется солитонам в оптических волокнах [4]. Распространение высокочастотных волновых пакетов достаточно большой протяженности может быть описано нелинейным уравнением Шредингера (NSE) [5–6], учитывающим линейную дисперсию второго порядка и кубичную нелинейность (*self-phase modulation*). Солитонное решение в этом уравнении возникает в результате баланса дисперсионного разбегания и нелинейного сжатия волнового пакета.

Уменьшение протяженности высокочастотных волновых пакетов приводит к необходимости учета в модельных нелинейных уравнениях членов более высокого (третьего) порядка малости, соответствующих как линейным абберационным эффектам (линейная дисперсия третьего порядка), так и нелинейным эффектам укручения (*stepping*) [7] и индуцированного рассеяния Рамана (*stimulated Raman-scattering*) [8]. Это приводит к нелинейному уравнению Шредингера третьего порядка (TNSE) [9–15] как базовому уравнению третьего приближения теории дисперсии нелинейных волн. В пренебрежении индуцированным рассеянием в этом уравнении солитонное решение возникает в результате баланса линейного абберационного искажения волнового импульса и нелинейных изменений, обусловленных нелинейной дисперсией (*self-stepping*). Известно, что учет индуцированного рамановского рассеяния приводит к смещению волнового числа солитонов в длинноволновую область [8]. В тоже время увеличение дисперсии второго порядка приводит к смещению волнового числа солитонов в коротковолновую область [16]. Совместное действие эффектов индуцированного рамановского рассеяния и неоднородной дисперсии второго порядка может стабилизиро-

вать волновое число солитона и привести к стационарному режиму распространения солитонов без изменения волнового числа.

В данной работе рассмотрена динамика коротких солитонов огибающей в рамках нелинейного уравнения Шредингера третьего порядка с учетом как индуцированного рамановского рассеяния, так и неоднородности дисперсии второго и третьего порядков, нелинейной дисперсией и кубичной нелинейности.

Основное уравнение

Рассмотрим динамику высокочастотного волнового поля $U(\xi, t)\exp(i\omega t - ik\xi)$ малой протяженностью (в несколько длин волн $kL \gtrsim 1$, k - волновое число, L - пространственная протяженность волнового поля) и малой длительности (в несколько периодов $\omega T \gtrsim 1$, ω - частота, T - протяженность волнового поля во времени) в рамках TNSE с переменными коэффициентами:

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + 2i\beta(\xi) \frac{\partial(|U|^2 U)}{\partial \xi} + \mu U \frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi} + q(\xi) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha(\xi) U |U|^2 + i\gamma(\xi) \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0, \quad (1)$$

где $q = -\partial^2 \omega / \partial k^2$ - коэффициент линейной дисперсии второго порядка; $\omega = \omega(k, |U|^2)$ - нелинейное дисперсионное соотношение; $\alpha = \partial \omega / \partial(|U|^2)$ - коэффициент кубичной нелинейности (*self-phase modulation*); $\gamma = -\partial^3 \omega / (3\partial k^3)$ - коэффициент линейной дисперсии третьего порядка (*third-order linear dispersion*); β - коэффициент нелинейной дисперсии (*self-stepping*), μ - коэффициент индуцированного рассеяния Рамана (*stimulated Raman-scattering*). В однородных средах при $\frac{dq}{d\xi} = \frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{d\gamma}{d\xi} = \frac{d\beta}{d\xi} = 0$ и пренебрежении индуцированным рассеянием $\mu = 0$ уравнение (1) имеет солитонное решение

$$U(\xi, t) = \frac{A}{\cosh(A\varepsilon\xi)} \exp(i\Omega t + iK\xi),$$

где A - амплитуда солитона; $\varepsilon = \sqrt{\beta/\gamma}$, $K = (q\beta - \alpha\gamma) / 2\beta\gamma$ - добавочное волновое число; $V = (\beta A^2 + Kq - 3\gamma K^2 / 2) / 2$ - скорость движения солитона; $\Omega = \alpha A^2 + \frac{\alpha\gamma}{2\beta} K^2$ - добавочная частота солитона.

Изменение энергии волнового пакета в неоднородной среде

Умножим (1) на величину U^* , комплексно сопряженную к U , и сложим полученное уравнение с комплексно ему сопряженным. Интегрируя полученное уравнение по ξ от $-\infty$ до ∞ при нулевых условиях на бесконечности $U|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, получим для скорости изменения энергии волнового пакета

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = & -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{d\xi} \left(U^* \frac{\partial U}{\partial \xi} - U \frac{\partial U^*}{\partial \xi} \right) d\xi - \\ & - 3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{d\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial U^*}{\partial \xi} d\xi + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\beta}{d\xi} |U|^4 d\xi. \end{aligned} \quad (2)$$

Первое и второе слагаемые в правой части (2) отвечают изменению энергии волнового пакета, обусловленному неоднородностью линейной дисперсии второго и третьего порядков соответственно, третье - неоднородностью нелинейной дисперсии.

Изменение импульса волнового пакета в неоднородной среде

Продифференцируем (1) по ξ и умножим полученное уравнение на U^* . Складывая полученное уравнение с комплексно ему сопряженным и интегрируя полученное соотношение по ξ от $-\infty$ до ∞ при нулевых условиях на бесконечности $U|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, получим для скорости изменения импульса волнового пакета

$$\begin{aligned} 2i \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(U^* \frac{\partial U}{\partial \xi} - U \frac{\partial U^*}{\partial \xi} \right) d\xi &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{d\xi} |U|^4 d\xi - \\ 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{d\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial U^*}{\partial \xi} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{d\xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U^*}{\partial \xi^2} - \frac{\partial U^*}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) d\xi &- \\ 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \beta \left(U^* \frac{\partial U}{\partial \xi} - U \frac{\partial U^*}{\partial \xi} \right) \frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} d\xi. & \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначая $U = |U| \exp(i\varphi)$, вводя волновое число пакета $\partial\varphi/\partial\xi = k$ и полагая масштабы неоднородностей изменения параметров среды и волнового числа пакета много большими масштаба неоднородности огибающей пакета $L_{q,\gamma,\alpha,\beta,k} \gg L_{|U|}$, получим для соотношений (2) и (3) вид

$$\begin{aligned} N \frac{dk}{dt} &= -\frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 \left(\frac{\partial |U|}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2} \left(\frac{dq}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial |U|}{\partial \xi} \right)^2 d\xi - Nk^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} |U|^4 d\xi + 2 \left(\frac{d\gamma}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} k^3 N - \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} k \int_{-\infty}^{\infty} |U|^4 d\xi, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dq}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} k N - 3 \left(\frac{d\gamma}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial |U|}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + k^2 N \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{d\beta}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} |U|^4 d\xi, \quad (5)$$

где $N = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 d\xi$ – энергия волнового пакета; $\bar{\xi} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |U|^2 d\xi$ – координата центра «массы»

волнового пакета. Первое слагаемое в правой части (4) отвечает уменьшению волнового числа пакета, обусловленному индуцированным рамановским рассеянием, остальные слагаемые – изменению волнового числа пакета, обусловленному неоднородностью, второе – линейной дисперсии второго порядка, третье – кубичной нелинейности, четвертое – линейной дисперсии третьего порядка, пятое – нелинейной дисперсии. Так, для волновых пакетов амплитуды A и протяженности Δ состояние равновесия системы (4)–(5), определяемое условиями

$\dot{k} = \dot{N} = 0$, можно оценить следующим образом:

$$\mu A^2 \approx \left(\frac{dq}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} (1 - \Delta^2 k^2) + \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} A^2 \Delta^2 + 4 \left(\frac{d\gamma}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} k^3 \Delta^2 - \left(\frac{d\beta}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} k A^2 \Delta^2, \quad (6)$$

$$\left(\frac{dq}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} k \approx 6 \left(\frac{d\gamma}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} \left(\frac{1}{\Delta^2} + k^2 \right) - 3 \left(\frac{d\beta}{d\xi} \right)_{\bar{\xi}} A^2. \quad (7)$$

В частности, при изменении лишь линейной дисперсии второго порядка $(dq/d\xi)_{\bar{\xi}} \neq 0$ (в этом случае $(d\gamma/d\xi)_{\bar{\xi}} = (d\beta/d\xi)_{\bar{\xi}} = (d\alpha/d\xi)_{\bar{\xi}} = 0$) условия компенсации индуцированного рамановского рассеяния (6)–(7) примут более простой вид:

$$\begin{cases} \mu A^2 \approx \left(\frac{dq}{d\xi} \right)_{\xi}, \\ k = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Отсюда следует, что возрастающая линейная дисперсия второго порядка компенсирует эффект индуцированного рамановского рассеяния при определенной амплитуде волнового пакета и нулевом значении волнового числа пакета.

Адиабатическое приближение динамики солитонов

Для более детального анализа системы (4)–(5) рассмотрим динамику солитоноподобных волновых пакетов, огибающая которых описывается *cosh-like* функцией, а амплитуда A и протяженность Δ пакетов связаны солитоноподобным соотношением $A\Delta = 1/\varepsilon = \text{const}$. В этом случае представим решение системы (4)–(5) в виде

$$|U(\xi, t)| = \frac{A(t)}{\cosh(A(t)\varepsilon\xi)}. \quad (9)$$

В качестве примера взаимного действия эффектов индуцированного рамановского рассеяния и неоднородности среды на динамику волновых пакетов рассмотрим в дальнейшем дисперсию и нелинейность, меняющимися по линейным законам: $(dq/d\xi)_{\xi} = q' = \text{const}$, $(d\alpha/d\xi)_{\xi} = \alpha' = \text{const}$, $(d\gamma/d\xi)_{\xi} = \gamma' = \text{const}$, $(d\beta/d\xi)_{\xi} = \beta' = \text{const}$. В этом случае система (4)–(5) с учетом (9) примет вид

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{16}{15}\varepsilon^2\mu A^4 + q' \left(\frac{2}{3}\varepsilon^2 A^2 - \frac{1}{2}k^2 \right) + \frac{1}{3}\alpha' A^2 + 2\gamma' k^3 - \frac{1}{3}\beta' k A^2, \quad (10)$$

$$\frac{dA}{dt} = q' k A - \gamma' (3k^2 + 4\varepsilon^2 A^2) A + \beta' A^3. \quad (11)$$

Первое слагаемое в правой части (10) приводит к понижению волнового числа солитона и обусловлено индуцированным рамановским рассеянием, остальные – к изменению волнового числа, обусловленному неоднородностью параметров среды, второе – дисперсии второго порядка, третье – кубичной нелинейности, четвертое – дисперсии третьего порядка, пятое – нелинейной дисперсии. При $q' > 0$ и $\alpha' = \gamma' = \beta' = 0$ система (10)–(11) имеет состоящие равновесия при $k = 0$ и ненулевой амплитуде солитона $A_*^2 = \frac{5}{8} \frac{q'}{\mu}$, что указывает на возможность стабилизации эффекта индуцированного рамановского рассеяния

возрастающей линейной дисперсией второго порядка.

В связи с этим, далее рассмотрим систему (10)–(11) при $q' \neq 0$, т.е. в этом случае солитоноподобный волновой пакет распространяется без изменения огибающей и волнового числа.

В этом случае система (10)–(11) после замены $\tau = tq'/2$, и $a = \sigma\varepsilon^2 A^2 > 0$ примет вид

$$\frac{dk}{d\tau} = -pa^2 + a - k^2 + \delta k^3 - rka, \quad (12)$$

$$\frac{da}{d\tau} = 4ka - 3\delta k^2 a - 4\frac{\delta}{\sigma} a^2 + rka^2, \quad (13)$$

где $p = \frac{32}{15} \frac{\mu}{q'\varepsilon^2\sigma^2}$ – параметр отношения индуцированного рамановского рассеяния к градиенту дисперсии второго порядка; $\delta = 4 \frac{\gamma'}{q'}$ – параметр отношения градиентов линейной дисперсии третьего и второго порядков; $r = \frac{\beta'}{q'}$ – параметр отношения градиентов нелинейной

дисперсии и дисперсии второго порядка; $\sigma = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \frac{\alpha'}{q'\epsilon^2}$ – параметр отношения градиентов кубической нелинейности и дисперсии второго порядка.

Проанализируем влияние неоднородностей различных параметров среды на устойчивость решения системы (12)–(13).

Неоднородность дисперсии второго порядка и кубической нелинейности

При однородной линейной дисперсии третьего порядка и нелинейной дисперсии (в отсутствии как неоднородности дисперсии третьего порядка, так и нелинейной дисперсии $\delta = r = 0$) система (12) – (13) примет вид

$$\frac{dk}{d\tau} = -pa^2 + a - k^2, \tag{14}$$

$$\frac{da}{d\tau} = 4ka. \tag{15}$$

При $p > 0$ система (14) – (15) имеет два состояния равновесия:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ k_0 = 0 \end{cases} \text{ – седло, } \begin{cases} a_0 = \frac{1}{p} > 0, \\ k_0 = 0 \end{cases} \text{ – центр.} \tag{16}$$

Линеаризация системы (14)–(15) в окрестности центра $a_0 = 1/p, k_0 = 0$ приводит к уравнению осциллятора для волнового числа:

$$\frac{d^2k}{d\tau^2} + \frac{4}{p}k = 0. \tag{17}$$

Частота колебаний волнового числа k из (17) равна $\omega = 2/\sqrt{p}$.

При произвольном отклонении от состояния равновесия $a_0 = 1/p, k_0 = 0$ фазовые траектории системы (14) – (15) имеют вид

$$\sqrt{a} \cdot k^2 + \frac{p}{5}\sqrt{a^5} - \frac{1}{3}\sqrt{a^3} = C = \sqrt{a_0} \cdot k_0^2 + \frac{p}{5}\sqrt{a_0^5} - \frac{1}{3}\sqrt{a_0^3}, \tag{18}$$

где $a_0 = a(0), k_0 = k(0)$ – значения амплитуды и волнового числа солитона в начальный момент времени. На рис. 1 приведены фазовые траектории системы (14)–(15), описанные выражением (18) при $p = 1$ и различных значениях C .

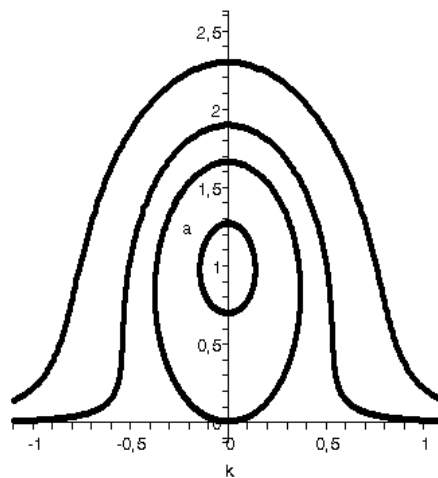


Рис. 1. Фазовые траектории (18) системы (14)–(15) при $p = 1$ и различных значениях C

На рис. 1 движение по фазовым траекториям происходит против часовой стрелки. Траектории 1 и 2 (считая сверху вниз) отвечают значениям $C_1 > C_2 > 0$, траектория 3 (большой эллипс) – $C = 0$, траектория 4 (малый эллипс) – $C < 0$

Траектории 1 и 2 являются незамкнутыми и отвечает значению $C > 0$, сепаратрисная траектория 3 (большой эллипс) отвечает значению $C = 0$, траектория 4 (малый эллипс) замкнутая и отвечает значению $C < 0$. Уравнение сепаратрисы на рис. 1 из (18) при $C = 0$ описывается уравнением

$$\left(a - \frac{5}{6p}\right)^2 + \frac{k^2}{p} = \frac{5}{36p^2}. \quad (19)$$

При $p > 0$ соотношение (19) описывает эллипс. Внутри эллипса (19) реализуются локализованные траектории пакетов. В этом случае изменение волнового числа (и амплитуды) пакета носит периодический характер: смещение волнового числа вниз по спектру, обусловленное индуцированным рамановским рассеянием, компенсируется возрастающей дисперсией второго порядка, приводящего к увеличению волнового числа солитона. В этом случае солитоноподобный волновой пакет движется в неоднородной среде с периодическим изменением амплитуды (а также скорости и волнового числа). Максимальное значение начального волнового числа k_0 , при котором возможны локализованные траектории из (19), составляет

$(k_0)_{\max} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{p}}$. Наибольший интервал значений начальных амплитуд солитона для реализации

локализованных траекторий достигается при $k_0 = 0$ и составляет $0 \leq a_0 \leq \frac{5}{3p}$.

Вне эллипса (19) реализуются нелокализованные траектории 1, 2, отвечающие значениям $C > 0$. В этом случае изменение волнового числа пакета носит непериодический характер: возрастающая линейная дисперсия второго порядка не компенсирует эффекта индуцированного рамановского рассеяния, что приводит в итоге к уменьшению волнового числа пакета. В таких случаях солитоноподобный волновой пакет в неоднородной среде со временем уменьшается по амплитуде до нуля, т.е. полностью распадается за счет рамановского рассеяния. При малых положительных значениях C реализуется немонотонный режим уменьшения волнового числа (траектория 1 на рис. 1), а при достаточно больших положительных значениях C – монотонный режим уменьшения (траектория 2 на рис. 1).

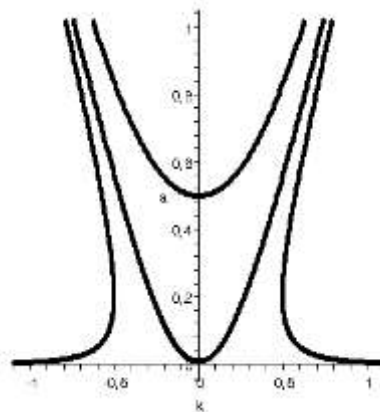


Рис. 2. Фазовые траектории (18) системы (14)–(15) при $p = -1$ и различных значениях C

При $p < 0$ система (14)–(15) имеет единственное состояние равновесия $a_0 = k_0 = 0$ – седло. На рис. 2 приведены фазовые траектории (18) системы (14) – (15) при $p = -1$ и раз-

личных значениях C . Траектории 1 отвечают значению $C > 0$, 2 – $C = 0$, 3 – $C < 0$. При $C > 0$ волновое число пакета меняется немонотонным образом, а при $C \leq 0$ меняется монотонно. Уравнение сепаратрисы 2 на рис. 2, разделяющей эти два режима, из (18) при $C = 0$ описывается уравнением (19), которое при $p < 0$ соответствует уравнению гиперболы.

На рис. 2 движение по фазовым траекториям происходит против часовой стрелки. Траектории 1 (асимптотически прижимающиеся к горизонтальной оси) отвечают значениям $C > 0$, траектория 2 (проходящая через начало координат) – $C = 0$, траектория 3 (пересекающая вертикальную ось выше начала координат) – $C < 0$.

В этом случае (так как отсутствует устойчивое состояние равновесия) не может существовать стационарный солитоноподобный волновой пакет в неоднородной среде.

Учет неоднородности нелинейной дисперсии и дисперсии третьего порядка меняет характер динамики коротких солитонов. В начале учтем неоднородность нелинейной дисперсии.

Неоднородность дисперсии второго порядка и нелинейной дисперсии

При $\delta = 0$ система (12)–(13) примет вид

$$\frac{dk}{d\tau} = -pa^2 + a - k^2 - rka, \tag{20}$$

$$\frac{da}{d\tau} = 4ka + ra^2. \tag{21}$$

Система (20)–(21) имеет два состояния равновесия:

$$\begin{cases} a = 0 \\ k = 0 \end{cases} \text{ – седло,} \tag{22}$$

$$\begin{cases} a = \frac{16}{16p - 3r^2} > 0 \\ k = \frac{4r}{3r^2 - 16p} \end{cases} \text{ – фокус.} \tag{23}$$

Из условия $a > 0$ следует, что фокус (23) существует при достаточно слабой неоднородности нелинейной дисперсии $r^2 < 16p/3$. При $r < 0$ фокус является устойчивым, что соответствует стабилизации эффекта индуцированного рамановского рассеяния при распространении солитонов в среде с уменьшающейся нелинейной дисперсией. На рис. 3 приведены фазовые плоскости системы (20)–(21) при $p = 1$ и различных отрицательных значениях r (траектории седла (22) не показаны). Рис. 3, *a* соответствует значению $r = -0.5$, рис. 3, *б* – $r = -2.0$, рис. 3, *в* – $r = -3.0$. Рис. 3, *a*, *б* описывают два состояниям равновесия.

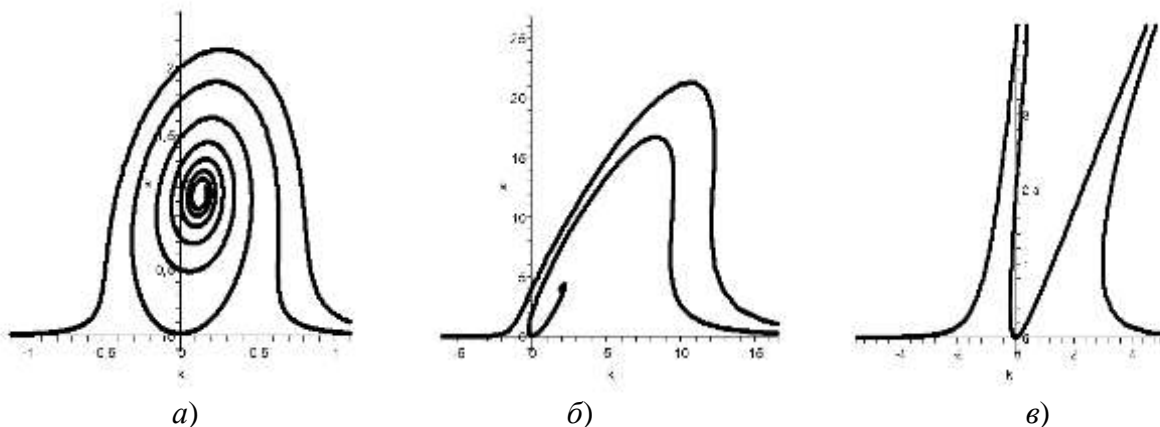


Рис. 3. Фазовые плоскости системы (20)–(21) при $p = 1$ и различных отрицательных значениях r . Движение по фазовым траекториям происходит против часовой стрелки: $a - r = -0.5$; $б - r = -2.0$; $в - r = -3.0$

В этих случаях в зависимости от начальных условий возможна стабилизация эффекта индуцированного рамановского рассеяния возрастающей дисперсией второго порядка и убывающей нелинейной дисперсией (траектории, входящие в устойчивый фокус на рис. 3, а, б), т.е. при амплитуде и волновом числе, соответствующим устойчивому фокусу, солитон движется в присутствии вынужденного рамановского рассеяния в неоднородной среде без изменения своих параметров, т.е., стабилизация солитона в присутствии вынужденного рамановского рассеяния возможна при наличии в фазовом пространстве системы (12)–(13) устойчивого состояния равновесия с ненулевой амплитудой a . При значении параметра неоднородности нелинейной дисперсии меньше критического значения $r < r_c = -4\sqrt{p/3}$ устойчивое состояние равновесия (23) исчезает (за счет слипания устойчивого фокуса и седла), что делает невозможным стабилизацию индуцированного рассеяния при распространении солитонов в среде с сильно убывающей нелинейной дисперсией. При $p=1$ это значение составляет $r_c \approx -2.3$. Рис. 3, в соответствует значению $r = -3.0$, при котором реализуется одно состояние равновесия и компенсация индуцированного рамановского рассеяния невозможна.

Фазовые плоскости системы (20)–(21) при положительных значениях r могут быть получены из фазовых плоскостей системы при отрицательных значениях r заменой $k \rightarrow -k$ и изменением направления движения по фазовым траекториям на противоположное. Это следует из инвариантности системы (20)–(21) относительно одновременных преобразований $r \rightarrow -r, k \rightarrow -k, \tau \rightarrow -\tau$. В частности, при положительных значениях параметра r состояние равновесия (23) системы (20)–(21) – неустойчивый фокус, а (22) остается седлом. На рис. 4 в качестве примера приведена фазовая плоскость системы (20)–(21) при $p=1$ и $r=0.5$.

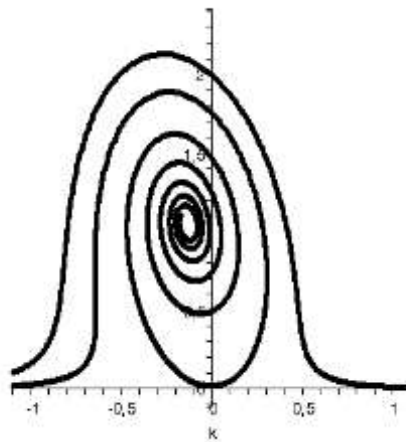


Рис. 4. Фазовая плоскость системы (20)–(21) при $p=1$ и $r=0.5$.

Движение по фазовым траекториям происходит против часовой стрелки.
Устойчивых состояний равновесия нет

Отсюда следует, что при распространении солитонов в среде с возрастающей нелинейной дисперсией $\beta' > 0$ компенсация эффекта индуцированного рамановского рассеяния невозможна: волновое число пакета на больших временах уходит на $-\infty$, хотя в окрестности фокуса (23) фазовая точка может находиться достаточно долго.

Неоднородность дисперсии второго и третьего порядков

При $r=0$ система (12)–(13) примет вид:

$$\frac{dk}{d\tau} = -pa^2 + a - k^2 + \delta k^3, \quad (24)$$

$$\frac{da}{d\tau} = 4ka - 3\delta k^2 a - 4\frac{\delta}{\sigma} a^2, \quad (25)$$

Система (24)–(25) имеет два состояния равновесия при $a = 0$:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ k_0 = 0 \end{cases} - \text{седло}, \quad \begin{cases} a_0 = 0, \\ k_0 = \frac{1}{\delta} \end{cases} - \text{узел}. \quad (26)$$

При $\delta > 0$ узел (26) неустойчивый, а при $\delta < 0$ – устойчивый. При $a \neq 0$ для состояний равновесия системы (24) – (25) получим систему

$$\begin{cases} -pa^2 + a - k^2 + \delta k^3 = 0, \\ a = \frac{\sigma}{\delta} k \left(1 - \frac{3}{4} \delta k \right). \end{cases}$$

Здесь возможны еще два состояния равновесия, одно из которых – седло, а другое может быть фокусом. При $|\delta| \ll 1$ и $a \neq 0$ система (24)–(25) имеет состояние равновесия

$$a_0 = \frac{1}{p} - \left(\frac{\delta}{\sigma p} \right)^2, \quad k_0 = \frac{\delta}{\sigma p}, \quad (27)$$

переходящее в центр $a_0 = 1/p, k_0 = 0$ при исчезновении неоднородности дисперсии третьего порядка ($\delta = 0$). При малых положительных значениях δ состояние равновесия (27) – устойчивый фокус. Отсюда следует, что учет малой неоднородности линейной дисперсии третьего порядка при ее возрастании ($\delta > 0$) сохраняет возможность компенсации эффекта индуцированного рамановского рассеяния. На рис. 5 приведены фазовые плоскости системы (24)–(25) при $p = 1, \sigma = 1$ и различных положительных значениях δ (траектории седла (26) не указаны).

При $a = 0$ имеется два состояния равновесия (26), а при $a \neq 0$ и малых положительных значениях δ имеем еще два состояния равновесия: устойчивый фокус и седло (рис. 5, а, б). Видно, что увеличение параметра δ приводит к увеличению области начальных значений, при которых неоднородность среды компенсирует эффект индуцированного рамановского рассеяния (рис. 5, а–в). В тоже время увеличение δ приводит к сближению фокуса и седла (рис. 5, а–г) и при $\delta = 0.78$ фокус и седло сливаются (рис. 5, д). При больших значениях δ система (24)–(25) не имеет устойчивых состояний равновесия (рис. 5, е).

Фазовые плоскости системы (24)–(25) при отрицательных значениях δ могут быть получены из фазовых плоскостей системы при положительных значениях δ заменой $k \rightarrow -k$ и изменением направления движения по фазовым траекториям на противоположное. Это следует из инвариантности системы (24)–(25) относительно одновременных преобразований $\delta \rightarrow -\delta, k \rightarrow -k, \tau \rightarrow -\tau$. В частности, при малых отрицательных значениях параметра δ состояние равновесия (27) системы (24)–(25) – неустойчивый фокус. На рис. 6 в качестве примера приведена фазовая плоскость системы (24)–(25) при $p = 1, \sigma = 1$ и $\delta = -0.3$.

Отсюда следует, что при неоднородной линейной дисперсии третьего порядка при $\gamma' < 0$ компенсация эффекта индуцированного рамановского рассеяния невозможна: волновое число пакета на больших временах либо уходит на $-\infty$, либо стремится к конечной величине $1/\delta$ при $a \rightarrow 0$, соответствующей на рис. 6 устойчивому узлу. Следует отметить, что хотя упомянутый узел – устойчивый, но соответствующая ему амплитуда солитона $a = 0$, т.е. реально солитон не существует.

Было проанализировано влияние неоднородной дисперсии третьего порядка на стабилизацию эффекта индуцированного рамановского рассеяния без учета неоднородности нелинейной дисперсии. Далее проанализируем влияние неоднородной нелинейной дисперсии на

стабилизацию эффекта индуцированного рамановского рассеяния без учета неоднородной дисперсии третьего порядка.

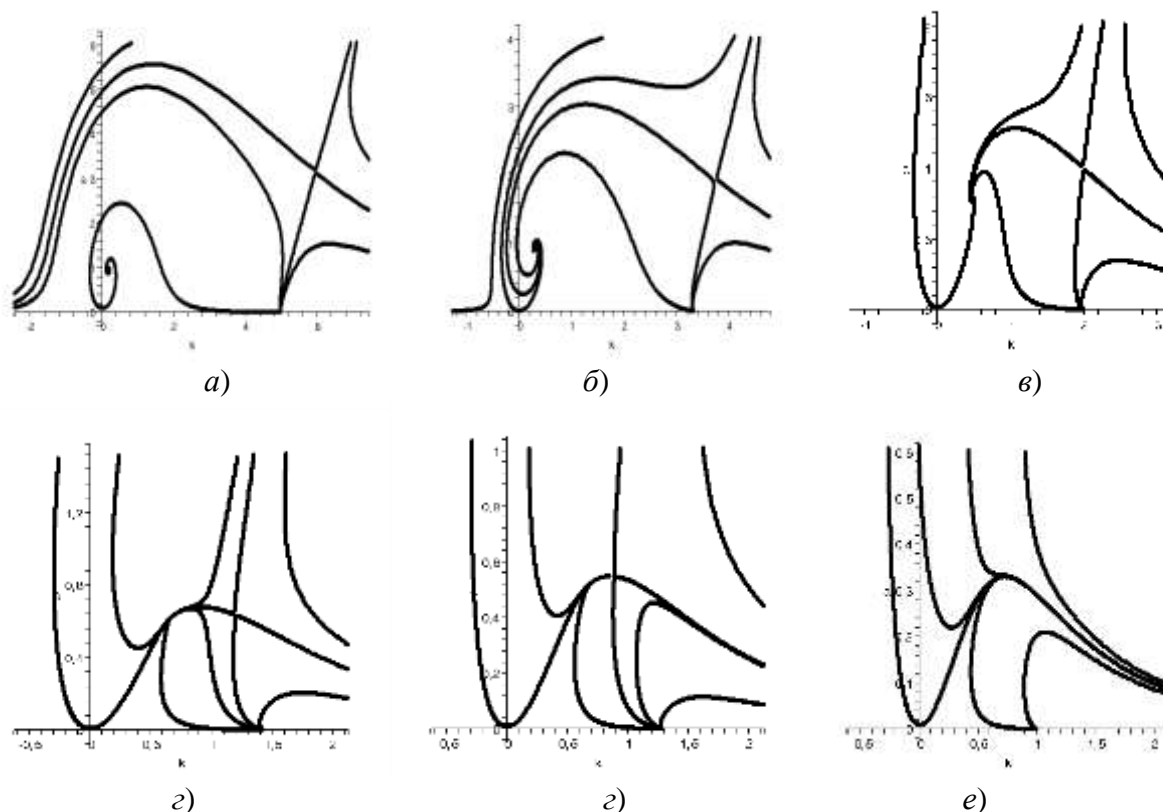


Рис. 5. Фазовые плоскости системы (24)–(25) при $p = 1, \sigma = 1$ и различных положительных значениях δ . Движение по фазовым траекториям происходит против часовой стрелки: $a - \delta = 0.2$; $b - \delta = 0.3$; $в - \delta = 0.5$; $г - \delta = 0.7$; $д - \delta = 0.78$; $e - \delta = 1.0$

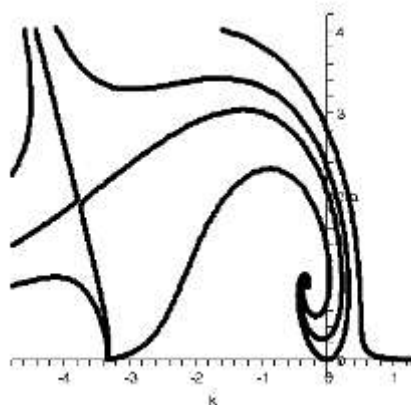


Рис. 6. Фазовая плоскость системы (24)–(25) при $p = 1, \sigma = 1$ и $\delta = -0.3$. Движение по фазовым траекториям происходит против часовой стрелки. Состояния равновесия при ненулевой амплитуде солитона $a \neq 0$ неустойчивы

Неоднородность дисперсии третьего порядка и нелинейной дисперсии

При неоднородности дисперсии третьего порядка и нелинейной дисперсии (в этом случае $q' = \alpha' = 0$) система (10)–(11) принимает вид

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{16}{15} \varepsilon^2 \mu A^4 - \frac{1}{3} \beta' k A^2 + 2\gamma' k^3, \tag{28}$$

$$\frac{dA}{dt} = -3\gamma'k^2A - 4\gamma'\varepsilon^2A^3 + \beta'A^3. \quad (29)$$

Система (28) – (29) заменой $a = \varepsilon^2A^2$ и $\tau = 2\gamma't$ может быть сведена к виду

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda a^2 + k^3 - \frac{1}{6}vka, \quad (30)$$

$$\frac{da}{dt} = -3k^2a - 4a^2 + va^2, \quad (31)$$

где $v = \frac{\beta'}{\gamma'\varepsilon^2}$ – параметр отношения градиентов нелинейной дисперсии и линейной дисперсии

третьего порядка; $\lambda = \frac{8}{15} \frac{\mu}{\gamma'\varepsilon^2}$ – параметр отношения индуцированного рамановского рассеяния к градиенту линейной дисперсии третьего порядка. Система (30)–(31) всегда имеет состояние равновесия в начале координат $a = 0, k = 0$ – седло. Кроме этого седла, система (30)–(31) имеет два состояния равновесия (неустойчивый фокус и седло) при $v > 4$, одно состояние равновесия (неустойчивый седлофокус) при $v = 4$ и не имеет состояний равновесия при $v < 4$.

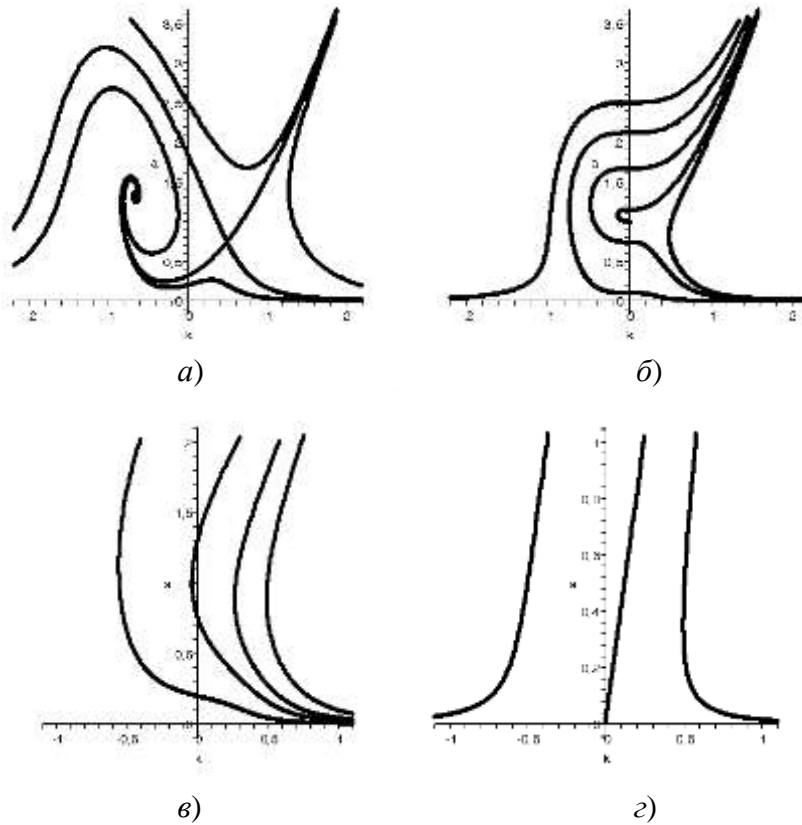


Рис. 7. Фазовая плоскость системы (30)–(31) при $\lambda = 1$ и различных значениях ν .

Движение по фазовым траекториям происходит против часовой стрелки:

$a - \nu = 5.0$ (состояния равновесия – неустойчивый фокус и седло);

$b - \nu = 4.0$ (состояние равновесия – неустойчивый седлофокус);

$v - \nu = 3.0$ (нет состояний равновесия); $z - \nu = 0$ (нет состояний равновесия)

На рис. 7 показано фазовое пространство системы (30)–(31) при $\lambda = 1$ и при разных значениях ν (траектории седла в начале координат не показаны), так как в этих случаях не существует устойчивых состояний равновесия, то здесь невозможна стабилизация вынужденного рамановского рассеяния.

Неоднородность кубической нелинейности

При неоднородности лишь кубической нелинейности (в этом случае $q' = \gamma' = \beta' = 0$) система (10)–(11) сводится к одному уравнению первого порядка:

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{16}{15}\varepsilon^2\mu A_0^4 + \frac{1}{3}\alpha'A_0^2, \quad (32)$$

где $A_0 = A(0)$. При $\alpha' > 0$ уравнение (32) имеет состояние равновесия при отличной от нуля амплитуде солитона $A_*^2 = \frac{5}{16}\frac{\alpha'}{\varepsilon^2\mu}$. Данное состояние является неустойчивым: при превышении амплитудой солитона критического значения $A_0 > A_*$ индуцированное рамановское рассеяние доминирует над эффектом неоднородности кубической нелинейности, волновое число пакета монотонно уменьшается $\dot{k} < 0$, при $A_0 < A_*$ эффект неоднородности кубической нелинейности преобладает над индуцированным рамановским рассеянием, волновое число пакета монотонно растет $\dot{k} > 0$. Однако решение (32) может находиться в окрестности этого неустойчивого состояния равновесия в течение продолжительного времени, т.е. в этом случае стабилизация индуцированного рамановского рассеяния за счет неоднородности кубической нелинейности невозможна. И невозможно существование стационарного солитона, имеющего постоянные параметры.

Выводы

В данной работе рассмотрена динамика коротких солитонов огибающей в рамках уравнений Шредингера третьего порядка с учетом индуцированного рамановского рассеяния и неоднородной линейной дисперсии второго и третьего порядков, кубической нелинейности и нелинейной дисперсии. Рассмотрение проведено в адиабатическом приближении, при котором волновой пакет распространяется с сохранением своей формы. При отсутствии неоднородности линейной дисперсии третьего порядка и нелинейной дисперсии показана возможность компенсации рамановского смещения волнового числа солитонов в длинноволновую область возрастающей дисперсией второго порядка, увеличивающей это волновое число. В этом случае фазовые траектории изменения параметров солитонов найдены в явном виде. Проанализирована роль неоднородности как линейной дисперсии третьего порядка, так и нелинейной дисперсии. Показано, что при учете либо возрастающей линейной дисперсии третьего порядка, либо убывающей нелинейной дисперсии устойчивый режим распространения солитонов с постоянным волновым числом сохраняется. При уменьшении линейной дисперсии третьего порядка либо увеличении нелинейной дисперсии компенсация эффекта индуцированного рамановского рассеяния невозможна.

Работа проведена при поддержке РФФИ (грант N 12-02-00436-а).

Библиографический список

1. **Yang, Y.** Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis / Y. Yang. Springer. New York, 2001.
2. **Dickey, L.A.** Soliton Equation and Hamiltonian Systems / L.A. Dickey. World Scientific, New York, 2005.
3. **Kivshar, Y.S.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agraval. Academic, San Diego, 2003.
4. **Agraval, G.P.** Fiber Optic Communication Systems / G.P. Agraval. Wiley, New York, 2002.
5. **Zakharov, V.E.** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media / V.E. Zakharov, A.B. Shabat // Sov. Phys. JETP. 1972. V. 34. Pp. 62–69.
6. **Hasegawa, A.** Transmission of Stationary Nonlinear Optical Physics in Dispersive Dielectric Fibers I: Anomalous Dispersion / A. Hasegawa, F. Tappert // Appl. Phys. Lett. 1973. V. 23. N. 3. Pp. 142–144.

7. **Oliviera J.R.** Analytical Solution for the Modified Nonlinear Schrodinger Equation Describing Optical Shock Formation / J.R. Oliviera, M.A. Moura // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. Pp. 4751–4755.
8. **Gordon J.P.**, Theory of the soliton self-frequency shift // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 662–664.
9. **Kodama, Y.** Optical solitons in a monomode fiber / Y. Kodama // J. Stat. Phys. 1985. V. 39. Pp. 597–614.
10. **Zaspel C.E.**, Optical Solitary Wave and Shock Solutions of the Higher Order Nonlinear Schrodinger Equation // Phys. Rev. Lett. 1999. V.82. N. 4. Pp. 723–726.
11. **Hong Ю В.** New Jacobi functions solitons for the higher-order nonlinear Schrodinger equation / B. Hong, D. Lu // Inter. Journal of Nonlinear Science. 2009. V. 7. N. 3. Pp. 360–367.
12. **Karpman V.I.**, The extended third-order nonlinear Schrodinger equation and Galilean transformation // The European Physical Journal B. 2004. V. 39. Pp. 341–350.
13. **Gromov, E.M.** Nonlinear dynamics of short wave trains in dispersive media / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1996. V. 110. P. 137.; JETP. 1996. V. 83. P. 73–79.
14. **Gromov, E.M.** Short optical solitons in fibers / E.M. Gromov, V.I. Talanov // Chaos. 2000. V. 10. N. 3. P. 551–558.
15. **Gromov, E.M.** Dynamics of wave packets in the frame of third-order nonlinear Schrödinger equation / E.M. Gromov, L.V. Piskunova, V.V. Tyutin // Physics Letters A. 1999. V. 256. P. 153–158.
16. **Essiambre, R.-J.** Timing jitter of ultrashort solitons in high-speed communication system. I. General formulation and application to dispersion-decreasing fibers / R.-J.Essiambre, G.P. Agraval // J. Opt. Soc. Of America B. 1997. V. 14. Pp. 314–322.

*Дата поступления
в редакцию 14.19.2011*

E.M. Gromov, V.V. Tyutin

STIMULATED RAMAN – SCATTERING COMPENSATION FOR SHORT SOLITON'S PROPAGATIONS IN INHOMOGENEOUS MEDIA

Dynamics of short solitons envelope in the frame of the third–order nonlinear Schrodinger equations taking into account stimulated Raman–scattering and inhomogeneous second– and third–order linear dispersion, nonlinear dispersion and cubic nonlinearity is considered. Compensation of the stimulated Raman–scattering effect by the increasing of the second—order linear dispersion is shown. In adiabatic approximation stable soliton's propagation regime is found. Third – order linear dispersion and nonlinear dispersion inhomogeneity effect to stimulated Raman – scattering compensation is analyzed.

Key words: stimulated Raman–scattering; inhomogeneous of the second– and third–order linear dispersion; nonlinear dispersion; cubic nonlinearity; short solitons envelope.