МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 2012

УДК 532.516 : 532.591

© 2012 г. А. А. АБРАШКИН, Ю. П. БОДУНОВА

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Изучаются стоячие поверхностные волны в вязкой жидкости бесконечной глубины. Дано решение задачи в линейном и квадратичном приближениях. Подробно проанализирован случай длинных по сравнению с толщиной пограничного слоя волн. Определены траектории жидких частиц и выражение для завихренности.

Ключевые слова: волны на воде, вязкость, лагранжевы координаты.

Асимптотическая теория волн на воде традиционно строится в приближении невязкой жидкости [1]. Учет вязкости жидкости требует разработки принципиально новых методов анализа. При аналитическом изучении распространения нелинейных гравитационных волн возникает трудность, связанная с удовлетворением граничных условий на свободной поверхности. Толщина пограничного слоя вблизи свободной поверхности может быть существенно меньше амплитуды волны, поэтому ставить граничное условие на горизонтальной поверхности, как для волн в идеальной жидкости, в общем случае уже некорректно. В этом смысле результаты [2] требуют дополнительного обоснования. Смещение граничного условия на уровень горизонтальной поверхности возможно для маловязкой жидкости. Так, в [3] приведен пример расчета высокочастотной ряби Фарадея, а в статье [4] вычисляются параметры волны Стокса в кубичном приближении. В случае произвольной вязкости для преодоления этой трудности в квадратичном приближении по малому параметру крутизны волны переходят к криволинейным координатам, параметризующим квазистационарную линейную волну [5–7]. Для прогрессивных волн такой подход неэффективен для более высоких приближений, а для стоячих неприменим в силу нестационарности формы свободной поверхности.

Эта проблема, однако, не возникает, если воспользоваться переменными Лагранжа. Вертикальная координата, соответствующая свободной поверхности, при лагранжевом описании полагается равной нулю, и формулировка граничного условия производится стандартным способом [8]. В случае прогрессивных волн лагранжев подход оказывается чрезвычайно удобным при вычислении дрейфовых течений [9–11] в квадратичном приближении. Ниже показано, что он позволяет проанализировать и динамику слабонелинейной стоячей волны.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать плоские течения несжимаемой, вязкой, бесконечно глубокой жидкости со свободной поверхностью. Уравнения двумерной гидродинамики в форме Лагранжа для вязкой жидкости записываются следующим образом [8]:

$$[X,Y]=\frac{D(X,Y)}{D(a,b)}=1;\quad X_{tt}=-\rho^{-1}[p,Y]+\nu\{[X,[X,X_t]]+[Y,[Y,X_t]]\}$$
$$Y_{tt}=-g-\rho^{-1}[X,p]+\nu\{[X,[X,Y_t]]+[Y,[Y,Y_t]]\} \qquad (1.1)$$

Здесь X, Y – координаты траектории жидкой частицы, a, b – ее лагранжевы координаты, t – время, ρ – плотность, p – давление, ν – вязкость, g – ускорение свободного падения; квадратные скобки обозначают операцию взятия якобиана по переменным a, b. Граничными условиями служат условия непротекания на дне ($Y_t = 0$ при $b = -\infty$) и отсутствия вязких напряжений на свободной поверхности [8]

$$T_{ik}n_k = -p_0 n_i; \quad \mathrm{n}\{n_x, n_y\} = \mathrm{n}\left\{-\frac{Y_a}{\sqrt{X_a^2+Y_a^2}}, \frac{X_a}{\sqrt{X_a^2+Y_a^2}}\right\}; \quad b = 0$$
$$T_{xx} = -p + 2\nu\rho[X_t, Y]; \quad T_{yy} = -p - 2\nu\rho[Y_t, X]; \quad T_{xy} = \nu\rho([Y_t, Y] - [X_t, X]) \tag{1.2}$$

где T_{ik} — тензор вязких напряжений, p_0 — постоянное внешнее давление, а n — внешняя нормаль к свободной поверхности.

Представим все неизвестные функции в виде ряда по малому параметру крутизны волны $\varepsilon = kA$ (k — волновое число, A — амплитуда волны):

$$X = a + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + O(\varepsilon^3), \quad Y = b + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + O(\varepsilon^3)$$
$$p = p_0 - \rho g b + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + O(\varepsilon^3) \tag{1.3}$$

Подстановка соотношений (1.3) в (1.1), (1.2) даст уравнения для неизвестных функций в соответствующем порядке теории возмущений.

2. Линейное приближение. В первом порядке теории возмущений уравнения (1.1) принимают вид:

$$\xi_{1a} + \eta_{1b} = 0, \quad \xi_{1tt} + \rho^{-1}p_{1a} + g\eta_{1a} - \nu\Delta_L\xi_{1t} = 0$$
$$\eta_{1tt} + \rho^{-1}p_{1b} - g\xi_{1a} - \nu\mu_0\Delta_L\eta_{1t} = 0 \tag{2.1}$$

а граничные условия на свободной поверхности запишутся так:

$$\eta_{1a} + \xi_{1b} = 0, \quad -p_1 + 2\nu\rho\eta_{1tb} = 0, \quad b = 0 \tag{2.2}$$

Лапласиан в (2.1) берется по лагранжевым переменным, а функции ξ_1, η_1, p_1 предполагаются периодическими по пространству.

Для удобства вычислений представим отклонения от начального положения частиц и гидростатического давления в виде реальной части от комплексных функций ξ_i^k, η_i^k, p_i^k, полагая

$$\xi_i = \frac{1}{2}(\xi_i^k + \overline{\xi}_i^k); \quad \eta_i = \frac{1}{2}(\eta_i^k + \overline{\eta}_i^k); \quad p_i = \frac{1}{2}(p_i^k + \overline{p}_i^k)$$

Здесь черта — знак комплексного сопряжения. Введем также новую независимую переменную $\tau = \mu t$, где $\mu = \mu_0 + \varepsilon^2\mu_2$. Значение μ_1 выбрано равным нулю, как и для потенциальных стоячих волн [12]. Величина μ_0 находится в процессе вычислений.

Решение системы (2.1), (2.2) ищем в виде

$$\xi_1^k = A(b)e^\tau \sin ka, \quad \eta_1^k = B(b)e^\tau \cos ka, \quad p_1^k = C(b)e^\tau \cos ka, \quad \mathrm{Re}\,\tau < 0 \tag{2.3}$$

считая величину k действительной, а функции A, B, C, τ и константу μ_0 — комплексными. Физический смысл имеют реальные части выражений (2.3). После подстановки (2.3) в систему (2.1) и несложных преобразований придем к следующему уравнению:

$$A_{bbbb}^{IV} - \left(2k^2 + \frac{\mu_0}{\nu}\right)A_{bb}'' + k^2\left(k^2 + \frac{\mu_0}{\nu}\right)A = 0 \tag{2.4}$$

Полагая в (2.4) $A = e^{lb}$, получим для l биквадратное уравнение, решением которого будут соотношения

$$(l^2)_1 = k^2; \quad (l^2)_2 = k^2 + \frac{\mu_0}{\nu} = m^2 \tag{2.5}$$

Волновые возмущения должны спадать с глубиной (при $b \to -\infty$), поэтому функцию A следует выбрать в виде

$$A = \alpha e^{kb} + \beta e^{mb}; \quad \operatorname{Re} m > 0 \tag{2.6}$$

Функции B и C при этом определяются равенствами

$$B = -\left(\alpha e^{kb} + \frac{k}{m}\beta e^{mb}\right), \quad C = \frac{\rho}{k}\left[(\mu_0^2 + kg)\,\alpha e^{kb} + \frac{k^2}{m} g\beta e^{mb}\right] \tag{2.7}$$

Решение системы (2.1) с учетом (2.6) и (2.7) имеет вид

$$\xi_1^k = (\alpha e^{kb} + \beta e^{mb}) e^{\tau} \sin ka, \quad \eta_1^k = -\left(\alpha e^{kb} + \frac{k}{m}\beta e^{mb}\right) e^{\tau} \cos ka$$

$$p_1^k = \frac{\rho}{k}\left[(\mu_0^2 + kg)\,\alpha e^{kb} + \frac{k^2}{m} g\beta e^{mb}\right] e^{\tau} \cos ka, \quad \operatorname{Re} \tau < 0$$

Подставим его в граничные условия (2.2). Из них следует, что

$$2k\nu\, m\alpha + \beta(2\nu k^2 + \mu_0) = 0; \quad (\mu_0^2 + 2\nu k^2 \mu_0 + kg)\,\alpha + \left(\frac{k^2}{m} g + 2\nu\mu_0 k^2\right)\beta = 0$$

Условие совместности этих уравнений запишется так:

$$(\mu_0 + 2\nu k^2)^2 + kg = 4\nu^2 k^3 m \tag{2.8}$$

Обозначим для краткости $\omega^2 = gk$, $\nu k^2/\omega = \theta$, $\mu_0 + 2\nu k^2 = s\omega$, где ω – частота распространения линейных гравитационных волн. После возведения в квадрат уравнение (2.8) в новых обозначениях примет вид

$$(s^2 + 1)^2 = 16\theta^3 (s - \theta) \tag{2.9}$$

Это уравнение в точности такое же, какое возникает при рассмотрении линейных волн, распространяющихся на поверхности вязкой жидкости. Из четырех его корней только два удовлетворяют условию $\operatorname{Re} m > 0$ [13]. Действительная часть корня определяет величину декремента, а мнимая – частоту волновых колебаний. Из двух величин – α и β – одну можно выбрать произвольно. Пусть, например, α задана, тогда выражение для β запишется следующим образом

$$\beta = -\frac{2k\nu m}{\mu_0 + 2\nu k^2}\alpha = \frac{2km}{m^2 + k^2}\alpha \tag{2.10}$$

Величина α задает начальную амплитуду волны.

Завихренность волнового движения в данном приближении определяется выражением $\Omega_1 = -\operatorname{Re}(\mu_0^2\beta/\nu m) e^{mb+\tau} \sin ka$. Она сосредоточена в приповерхностном слое с толщиной $2\pi(\operatorname{Re} m)^{-1}$.

В качестве примера рассмотрим затухание достаточно длинных волн, для которых длина волны $\lambda = 2\pi k^{-1}$ удовлетворяет условию $\theta = 4\pi^2\nu/\omega\lambda^2 \ll 1$. При этом в уравнении (2.9) можно пренебречь правой частью. Тогда его решением будут значения $s = \pm i$ или в размерных величинах $\mu_0 = -2\nu k^2 \pm i\omega$. Отсюда заключаем, что величина декремента равна $-2\nu k^2$, а ω — частота волновых колебаний, знак которой определяет фазу колебаний и может быть любым; выберем для определенности плюс. Значение m, как следует из (2.5), приближенно равно $m = (1+i)\Delta, \Delta = \sqrt{\omega/2\nu}$, а соотношение (2.10) примет вид $\beta/\alpha = -(1-i)k/\Delta$. Эта величина по модулю всегда много меньше единицы, и потому в принятом приближении величиной β по сравнению с α можно пренебрегать. Вследствие этого выражение для возвышения свободной поверхности η_1 запишется следующим образом

$$\eta_1 = \alpha_0 e^{-2\nu k^2 t + kb} \cos ka \sin \omega t \tag{2.11}$$

Здесь выбрано $\alpha = i\alpha_0$, α_0 — действительное, чтобы соотношение (2.11) при нулевой вязкости имело схожий вид с решением для потенциальных волн [12]; величина $\varepsilon\alpha_0$ равна амплитуде волны. Горизонтальное смещение жидких частиц записывается в виде

$$\xi_1 = -\alpha_0 e^{-2\nu k^2 t + kb} \sin ka \sin \omega t \tag{2.12}$$

так что траектории жидкой частицы удовлетворяют уравнению прямой

$$Y - b = -(X - a)\, ctg\, ka \tag{2.13}$$

Как и в потенциальной волне, жидкие частицы движутся относительно своего равновесного положения $X_0 = a, Y_0 = b$ по прямой, наклоненной под углом $-ctg\, ka$, но размах их колебаний, вследствие действия вязкости, будет со временем экспоненциально убывать. Частицы с лагранжевыми координатами $ka = \pi/2 \pm \pi n$ (n — целое) соответствуют узлам и движутся горизонтально. В пучностях частицы движутся вертикально (для них $ka = \pi/2$).

Влияние вязкости для достаточно длинных волн сводится к экспоненциальному убыванию амплитуды колебаний со временем. Течение в приповерхностном слое является вихревым, и завихренность в нем изменяется по закону $\Omega_1 = -2k\omega\alpha_0 e^{-2\nu k^2 t + \Delta b} \sin ka \cos(\Delta b + \omega t)$. Стоячие волны в данном случае служат одним из редких примеров аналитического представления течения с нестационарным распределением завихренности.

3. Квадратичное приближение. Уравнения второго порядка имеют вид

$$\begin{aligned}
&\xi^k_{2a} + \eta^k_{2b} = \frac{k}{4}[(F_1(b) + F_2(b)\cos 2ka)e^{2\tau} + (H_1(b) + H_2(b)\cos 2ka)e^{\tau+\bar\tau}]\\
&\xi^k_{2tt} + g\eta^k_{2a} + \rho^{-1}p^k_{2a} - \nu\Delta_L\xi^k_{2t} = \frac{k}{4}[F_3(b)e^{2\tau} + H_3(b)e^{\tau+\bar\tau}]\sin 2ka\\
&\eta^k_{2tt} - g\xi^k_{2a} + \rho^{-1}p^k_{2b} - \nu\Delta_L\eta^k_{2t} =\\
&= \frac{k}{4}[(F_4(b) + F_5(b)\cos 2ka)e^{2\tau} + (H_4(b) + H_5(b)\cos 2ka)e^{\tau+\bar\tau}]
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Комплексные функции F_i, H_i определяются решением линейного приближения по следующим формулам

$$
\begin{aligned}
&F_1 = -AB' - A'B; \quad F_2 = A'B - AB'; \quad H_1 = -A\overline{B}' - A'\overline{B};\\
&H_2 = A'' - A\overline{B'}; \quad F_3 = \rho^{-1}(B'C - BC') + \nu\mu_0(AA'' - A'^2 + 3k(A'B - AB'))\\
&H_3 = \rho^{-1}(\overline{B}'C - \overline{B}C') + \nu\mu_0(2\overline{A}A'' - A\overline{A''} - A'\overline{A'} + 3kA' - 3kA\overline{B'})\\
&F_4 = -\rho^{-1}(A'C + AC') + \nu\mu_0(2AB'' + A''B + 3A'B' - 2kBB') \qquad (3.2)\\
&F_5 = \rho^{-1}(A'C - AC') + \nu\mu_0(2AB'' - A''B - A'B')\\
&H_4 = -\rho^{-1}(\overline{A''}C + \overline{A}C') + \nu\mu_0(2\overline{A}B'' + \overline{A''}B + 3'B' - k(\overline{B}B' + \overline{B}'B))\\
&H_5 = \rho^{-1}(\overline{A}'C - \overline{A}C') + \nu\mu_0(2\overline{A}B'' - \overline{A}''B - \overline{A}'B' + 3k(\overline{B}B' - \overline{B}'B))
\end{aligned}
$$

Систему (3.1), (3.2) следует дополнить граничными условиями на свободной поверхности $b = 0$

$$
\begin{aligned}
&\xi^k_{2tb} + \eta^k_{2ta} = \frac{1}{4}(F_6(b)e^{2\tau} + H_6(b)e^{\tau+\overline{\tau}})\sin 2ka\\
&F_6 = k[(\nu\rho)^{-1}BC - 2k\mu_0 AB]\\
&H_6 = k[(\nu\rho)^{-1}\overline{B}C + \mu_0(B\overline{B}' - \overline{B}B' - 2kA\overline{B} + A\overline{A}' - A'\overline{A})] \qquad (3.3)\\
&(\nu\rho)^{-1}\, p^k_2 - 2\eta^k_{2tb} =\\
&= \frac{1}{4}[(F_7(b) + F_8(b)\cos 2ka)e^{2\tau} + (H_7(b) + H_8(b)\cos 2ka)e^{\tau+\overline{\tau}}]\\
&F_{7,8} = k\mu_0(2AB' \pm 3A'B \mp kB^2); \quad H_{7,8} = k\mu_0(2\overline{A}B' \pm 2\overline{A}'B \mp k\overline{B}B \pm A'\overline{B})
\end{aligned}
$$

Верхние знаки в последних двух соотношениях относятся к первому индексу.

Решение системы (3.1), (3.2) будем искать в следующем виде ($\tau = \mu_0 t$)

$$
\begin{aligned}
&\xi^k_2 = [e^{2\tau} f_1(b) + e^{\tau+\overline{\tau}} h_1(b)]\sin 2ka\\
&\eta^k_2 = e^{2\tau}(f_2(b) + f_3(b)\cos 2ka) + e^{\tau+\overline{\tau}}(h_2(b) + h_3(b)\cos 2ka) \qquad (3.4)\\
&p^k_2 = e^{2\tau}(f_4(b) + f_5(b)\cos 2ka) + e^{\tau+\overline{\tau}}(h_4(b) + h_5(b)\cos 2ka)
\end{aligned}
$$

Функции $f_i(b)$, $h_i(b)$ являются комплексными. Задача описания волн, таким образом, свелась к определению 10 неизвестных комплексных функций в (3.4), удовлетворяющих граничным условиям (3.3).

Отметим основные свойства возмущений квадратичного приближения. Их пространственный масштаб осцилляций равен половине основной длины волны. Частота и декремент колебаний частиц при $\mu_1 = 0$ равны $2\,\mathrm{Im}\,\mu_0$ и $2\,\mathrm{Re}\,\mu_0$, соответственно. Наличие слагаемого, не зависящего от горизонтальной координаты a в выражении для вертикального смещения частиц η_2, означает, что средний уровень свободной поверхности, вообще говоря, может колебаться относительно горизонта $Y = 0$, постепенно приближаясь к нему. Он будет лежать строго в этой горизонтальной плоскости, если выполняется соотношение

$$
\left.\int_{-\pi/k}^{\pi/k} Y dX\right|_{b=0} = \varepsilon^2 \left.\int_{-\pi/k}^{\pi/k} (\eta_1\xi_{1a} + \eta_2)\, da\right|_{b=0} + O(\varepsilon^3) = 0
$$

Для квадратичного приближения это выполняется, если $f_2 = f_3 = -kAB/4$; $h_2 = h_3 = -kA\overline{B}/4$; $b = 0$.

Если же эти соотношения справедливы для функций f_3, h_3, но не выполняются хотя бы для одной из функций f_2 или h_2, то со временем средний уровень будет просто монотонно опускаться до горизонта $Y = 0$.

Решение квадратичного приближения для потенциальных стоячих волн в наших обозначениях запишется так [12]

$$\xi_{2pot} = 0; \quad \eta_{2pot} = \frac{k\alpha_0^2}{4} e^{2kb}(1-\cos 2\omega t); \quad p_{2pot} = \frac{\rho\omega^2\alpha_0^2}{2}(1-e^{2kb})\cos 2\omega t \tag{3.5}$$

Выражения для возмущений не зависят от координаты a, поэтому частицы с одинаковым значением b движутся схожим образом, колеблясь в вертикальном направлении. В вязкой жидкости движение частиц в этом приближении существенно сложнее. Добавляется не только зависимость от горизонтальной лагранжевой координаты. В формулах для квадратичных возмущений координат жидких частиц присутствуют два типа временных множителей. Помимо типичного множителя, определяющего экспоненциальное затухание, один из них включает осцилляции с удвоенной частотой, а другой — не содержит их (нулевая частотная гармоника).

4. Вторая частотная гармоника. После подстановки соотношений (3.4) в систему (3.1) и довольно громоздких выкладок можно получить уравнение для функции $f_3(b)$:

$$f_3^{IV} - \left(8k^2 + \frac{2\mu_0}{\nu}\right) f_3'' + 4k^2\left(4k^2 + \frac{2\mu_0}{\nu}\right) f_3 = \frac{k^2(k-m)^3(k+m)^2\alpha^2}{2(k^2+m^2)} e^{(k+m)b}$$

Выражение для функции $f_3(b)$ запишется так:

$$f_3 = C_1 e^{2kb} + C_2 e^{\sqrt{2(m^2+k^2)}\,b} + J_3 e^{(k+m)b}; \quad J_3 = \frac{k^2(k+m)^2\alpha^2}{2(3k+m)(k^2+m^2)}$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные.

В общем решении однородного уравнения оставлены только те члены, которые убывают при $b \to -\infty$ (две из четырех свободных констант выбраны равными нулю). Показатель экспоненты во втором слагаемом выбирается из условия $\operatorname{Re}\sqrt{2(m^2+k^2)} > 0$. Формулы для остальных функций f_i выглядят следующим образом

$$f_1 = -C_1 e^{2kb} - \frac{\sqrt{2(m^2+k^2)}}{2k} C_2 e^{\sqrt{2(m^2+k^2)}\,b} + J_1 e^{(k+m)b}; \quad J_1 = \frac{k^2(k^2-4km-m^2)\alpha^2}{2(3k+m)(k^2+m^2)}$$

$$f_2 = \frac{k\alpha^2}{4}\left[e^{2kb} + \frac{4k^3 m}{(m^2+k^2)^2} e^{2mb} - \frac{2k(k+m)}{m^2+k^2} e^{(k+m)b} + C_3\right]$$

$$f_4 = \rho\nu^2\alpha^2(J_2 e^{2kb} + J_4 e^{2mb} + J_5 e^{(k+m)b}) - \rho(4\mu_0^2 b C_3 - \nu C_4)$$

$$J_2 = \frac{k-m}{2}[2k^3 - (k+m)(3k^2-m^2)]; \quad J_5 = \frac{k^2(k^2-m^2)(k^2-m^2+2mk)}{k^2+m^2}$$

$$J_4 = \frac{k^2(k-m)}{(k^2+m^2)^2}[(k^4+m^4)(k+2m) - 2k^2m^2(3k+2m)]$$

$$f_5 = \rho\nu^2(J_6 C_1 e^{2kb} + J_7 C_2 e^{\sqrt{2(m^2+k^2)}\,b} + J_8 e^{(k+m)b})$$

$$J_6 = \frac{1}{k}(k-m)[m^2(k+m) - k^2(k+5m)]; \quad J_7 = \frac{k-m}{k}[k^2(k-3m) - m^2(k+m)]$$

$$J_8 = \frac{\alpha^2 k^2 (k+m)^2 (k-m)}{(3k+m)(k^2+m^2)}[3k^2 + m^2 - 6km]$$

Постоянную C_3 следует положить равной нулю, чтобы выполнялось условие непротекания на дне. Три оставшиеся константы определяются из граничных условий (3.3). Они представляются следующим образом

$$C_1 = -\frac{3k^2+m^2}{4k^2}C_2 + \frac{k+m}{4k}J_1 - \frac{1}{2}J_3 - \frac{1}{32k\nu(m^2-k^2)}F_6(0)$$

$$C_2 = \frac{(4\nu)^{-1} F_8(0) - C_1[J_6 - 8(m^2-k^2)k] - J_8 + 4(m^2-k^2)(k+m)J_3}{J_7 - 4(m^2-k^2)\sqrt{2(k^2+m^2)}}$$

$$C_4 = \alpha^2(m-k)\left\{\frac{k^2(k+m)}{m^2+k^2}\left[\frac{2km(k-m)^2}{m^2+k^2} + k^2 + 3m^2 + 2km\right] + \frac{k^3+m^3+km(m-3k)}{2}\right\}$$

Первые две из них входят в выражения для смещения жидких частиц, а последняя определяет величину давления.

5. Нулевая частотная гармоника. После подстановки соотношений (3.4) в систему (3.1) получим уравнение для функции $h_3(b)$:

$$h_3^{IV} - \left(8k^2 + \frac{\mu_0 + \bar{\mu}_0}{\nu}\right)h_3'' + 4k^2\left(4k^2 + \frac{\mu_0+\bar{\mu}_0}{\nu}\right)h_3 = J_1^* e^{(\bar{m}+k)b} + J_2^* e^{(m+k)b} + J_3^* e^{(\bar{m}+m)b} \quad (5.1)$$

Множители перед экспонентами, стоящие в правой части уравнения, являются функциями от $k, m, \bar{m}$

$$J_1^* = \frac{\alpha\bar{\beta}k(k-\bar{m})}{\bar{m}(2k^2-m^2-\bar{m}^2)}\{4k[4k^3m - (k^2+m^2)^2] + (k+\bar{m})(k^2+m^2-2k\bar{m})$$
$$(2k^2 - m^2 - \bar{m}^2) + 4(k-m)[2k^2m(\bar{m}-k) - \bar{m}(k+m)(3k^2-m^2-2k\bar{m})]\}$$

$$J_2^* = -\frac{\alpha\beta(k-m)}{2k^2-m^2-\bar{m}}\Big\{4k(4k^3m - (k^2+m^2)^2) + (k+m)(k^2+\bar{m}^2-2km)$$
$$(2k^2-m^2-\bar{m}) - \frac{2k(k-m)}{m}[k^2(k+m)3k-5m) - m^2(k+m)(3k+m)]\Big\}$$

$$J_3^* = \frac{|\beta|^2 k(m-\bar{m})}{\bar{m}(2k^2-m^2-\bar{m}^2)}\Big\{4k(4k^3m - (m^2+k^2)^2) + 2(m+\bar{m})(2k^2-m^2-\bar{m}^2)$$
$$(k^2 - \bar{m}m) + \frac{2(k-m)(m+\bar{m})}{m}[k^3(k-3m) - m(k+m)(3k^2-\bar{m}^2+km-2m\bar{m})] -$$
$$-\frac{4k(m-\bar{m})}{m}[k^2\bar{m}(k-3m) - (k+m)(3k^3+m^2\bar{m}-2km\bar{m}-k\bar{m}^2)]\Big\}$$

Общее решение уравнения (5.1), удовлетворяющее условию спадания волновых возмущений на дне до нуля, записывается так:

$$h_3 = C_1^* e^{2kb} + C_2^* e^{\sqrt{m^2+\bar{m}^2+2k^2}\, b} + \frac{J_1^* e^{(k+\bar{m})b}}{(k^2+m^2-2\bar{m}k)(3k^2-\bar{m}^2-2\bar{m}k)} +$$
$$+\frac{J_2^* e^{(k+m)b}}{(k^2+\bar{m}^2-2mk)(3k^2-m^2-2mk)} + \frac{J_3^* e^{(\bar{m}+m)b}}{2(k^2-m\bar{m})(4k^2-m^2-\bar{m}^2-2m\bar{m})}$$

Здесь C_1^*, C_2^* – постоянные.

В общем решении однородного уравнения оставлены только те члены, которые убывают при $b \to -\infty$ (две из четырех свободных констант выбраны равными нулю). Показатель экспоненты во втором слагаемом выбирается из условия $\mathrm{Re}\sqrt{m^2+\bar{m}^2+2k^2} > 0$. По известной h_3 функции h_i, $i = 1, 2, 4, 5$ находятся из следующих соотношений

$$h_1 = \frac{H_2}{8} - \frac{1}{2k}h_3'; \quad h_2' = \frac{k}{4}H_1; \quad h_4' = \rho\left(\frac{k}{4}H_4 - (\mu_0+\bar{\mu}_0)^2 h_2 + \nu(\mu_0+\bar{\mu}_0)h_2''\right)$$
$$h_5 = \frac{\rho}{2k}\left\{[(\mu_0+\bar{\mu}_0)^2 + 4\nu(\mu_0+\bar{\mu}_0)k^2]h_1 - \nu(\mu_0+\bar{\mu}_0)h_1'' - 2gkh_3 - \frac{k}{4}H_3\right\}$$

Значения констант определяются из граничных условий

$$4(\mu_0+\bar{\mu}_0)(h_1'-2kh_3)\Big|_{b=0} = H_6(0); \quad 4[(\nu\rho)^{-1}h_4 - 2(\mu_0+\bar{\mu}_0)h_2']\Big|_{b=0} = H_7(0);$$
$$4[(\nu\rho)^{-1}h_5 - 2(\mu_0+\bar{\mu}_0)h_3']\Big|_{b=0} = H_8(0)$$

Все алгебраические вычисления проводятся аналогично выкладкам предыдущего раздела. Они чрезвычайно громоздки. Вследствие этого полные выражения для функций (3.4) не приводим. В действительности толщина пограничного слоя Δ практически всегда существенно меньше длины волны λ, поэтому вид решения (3.4) естественно представить в длинноволновом пределе.

Положим, следуя решению линейного приближения, $m = (1+i)\Delta$, а полиномиальные выражения разложим в ряд по малому параметру k/Δ, ограничившись линейными по нему членами. В итоге формулы для координат жидких частиц запишутся так:

$$\xi_2 = \left[\frac{\Delta e^{\Delta b}}{k\sqrt{2}}\sin\left(\Delta b - \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{3e^{2\Delta b}}{4} - \frac{ke^{\sqrt{2}\Delta b}}{2\Delta}\sin\left(\sqrt{2}\Delta b + 2\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)\right]k\alpha_0^2 e^{-4\nu k^2 t}\sin 2ka$$
$$\eta_2 = \left[(1-\cos 2\omega t)e^{2kb} + \frac{ke^{\Delta b}}{\Delta}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\Delta b + \omega t + \frac{1}{4}\pi\right) - \sqrt{2}\sin\left(\Delta b + \frac{1}{4}\pi\right)\right]\right] + \qquad (5.2)$$
$$+\left[4e^{\Delta b}\cos\Delta b + \frac{3ke^{2\Delta b}}{\Delta}\right]\cos 2ka\Bigg\}\frac{k\alpha_0^2}{4}e^{-4\nu k^2 t}$$

При вязкости, стремящейся к нулю, а величины Δ, соответственно, к бесконечности, выражения (5.2) переходят в формулы (3.5), определяющие потенциальные стоячие волны. При погружении внутрь жидкости ($\Delta|b| \gg 1$, $\nu \neq 0$) эти формулы запишутся так

$$\xi_2^{\mathrm{int}} = 0; \quad \eta_2^{\mathrm{int}} = \frac{k\alpha_0^2}{4}(1-\cos 2\omega t)e^{-4\nu k^2 t}\cos 2ka$$

На прямолинейные движения жидких частиц в линейной волне накладываются неоднородные по горизонтали вертикальные осцилляции. Траектории жидких частиц при этом будут задаваться уравнением (с учетом (2.11)–(2.13))

$$Y-b=-(X-a)\,\mathrm{ctg}\,ka+\frac{k(X-a)^2}{2}(\mathrm{ctg}^2 ka-1)$$

т.е. частицы теперь движутся по участкам парабол; в пучностях они колеблются вертикально.

В рамках длинноволнового приближения в выражениях (5.2), вообще говоря, следует пренебречь и членами порядка k/Δ. При этом решения квадратичного приближения перепишутся так

$$\xi_2^{bound}=k\alpha_0^2\left(\frac{\Delta e^{\Delta b}}{k\sqrt{2}}\sin\left(\Delta b-\frac{1}{4}\pi\right)-\frac{3e^{2\Delta b}}{4}\right)e^{-4\nu k^2 t}\sin 2ka$$

$$\eta_2^{bound}=\frac{k\alpha_0^2}{4}[(1-2\cos 2\omega t)e^{2kb}+4e^{\Delta b}\cos\Delta b\cos 2ka]e^{-4\nu k^2 t}$$

Эффект пограничного слоя состоит в появлении дополнительных слагаемых в выражениях для смещений, которые зависят от лагранжевых координат, но не зависят от частоты колебаний ω. Качественно их влияние можно представить как нелинейную деформацию структуры течения в глубине: жидкие частицы колеблются по чуть более сложным кривым, чем участки парабол.

Для членов порядка k/Δ в выражениях (5.2) зависимость от частоты уже присутствует. Отсюда следует, что характер движения жидких частиц вблизи свободной границы усложняется по сравнению с движением частиц на глубине для более коротких волн. В сложившейся ситуации, когда получение аналитических представлений для течений в пограничном слое является достаточно сложной задачей, выражения (5.2) можно использовать в качестве приближенного описания движения жидкости и при конечном значении параметра k/Δ. Очевидно, что в этом случае имеет смысл больше говорить лишь о качественных особенностях течения.

Завихренность течения в квадратичном приближении задается выражением

$$\Omega_2=[\xi_{1t},\xi_1]+[\eta_{1t},\eta_1]+\xi_{2tb}-\eta_{2ta}$$

После подстановки в него решений первого приближения и соотношений (5.2) получим следующее представление

$$\Omega_2=\omega k^2\alpha_0^2[(2\cos\Delta b-\sin\Delta b)e^{\Delta b}+2e^{\sqrt{2}\Delta b}\cos(\sqrt{2}\Delta b+2\omega t)]e^{-4\nu k^2 t}\sin 2ka+o\left(\frac{k}{\Delta}\right)$$

Завихренность является суммой двух полей: квазистационарного ($\nu k^2 \ll 1$) и осциллирующего с удвоенной частотой. Толщина вихревого слоя в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в линейных волнах.

Заключение. В рамках лагранжевого подхода развита асимптотическая теория слабонелинейных стоячих волн в вязкой жидкости. Для случая бесконечно глубокой жидкости дано полное решение задачи в квадратичном приближении. Это первый пример полного аналитического описания для нелинейного волнового движения вязкой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шварц Л., Фентон Дж.* Сильно нелинейные волны / Нелинейные волновые процессы. М.: Мир, 1987. С. 10–36.

2. *Белоножко Д.Ф., Козин А.В.* Обособенностях строения дрейфового течения, инициируемого периодическими волнами, распространяющимися по поверхности вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 112–120.
3. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 215 с.
4. *Баринов В.А., Басинский К.Ю.* Нелинейные волны Стокса на поверхности слабовязкой жидкости // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 2. С. 112–122.
5. *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 320 с.
6. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in water waves // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 245. № 903. P. 535–581.
7. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface // J. Fluid Mech. 1960. V. 8. Pt 2. P. 293–306.
8. *Абрашкин А.А., Якубович Е.И.* Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: Физматлит, 2006.
9. *Weber J.E., Forland E.* Effect of the air on the drift velocity of water waves // J. Fluid Mech. 1990. V. 218. P. 619–640.
10. *Weber J.E.* Mass transport induced by surface waves in viscous rotating fluid // Free Surface Flows With Viscosity. Comput. Mechan: Southampton; Boston, 1997. P. 37–63.
11. *Абрашкин А.А.* Пространственные волны на поверхности вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 6. С. 89–96.
12. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
13. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
24.XI.2011