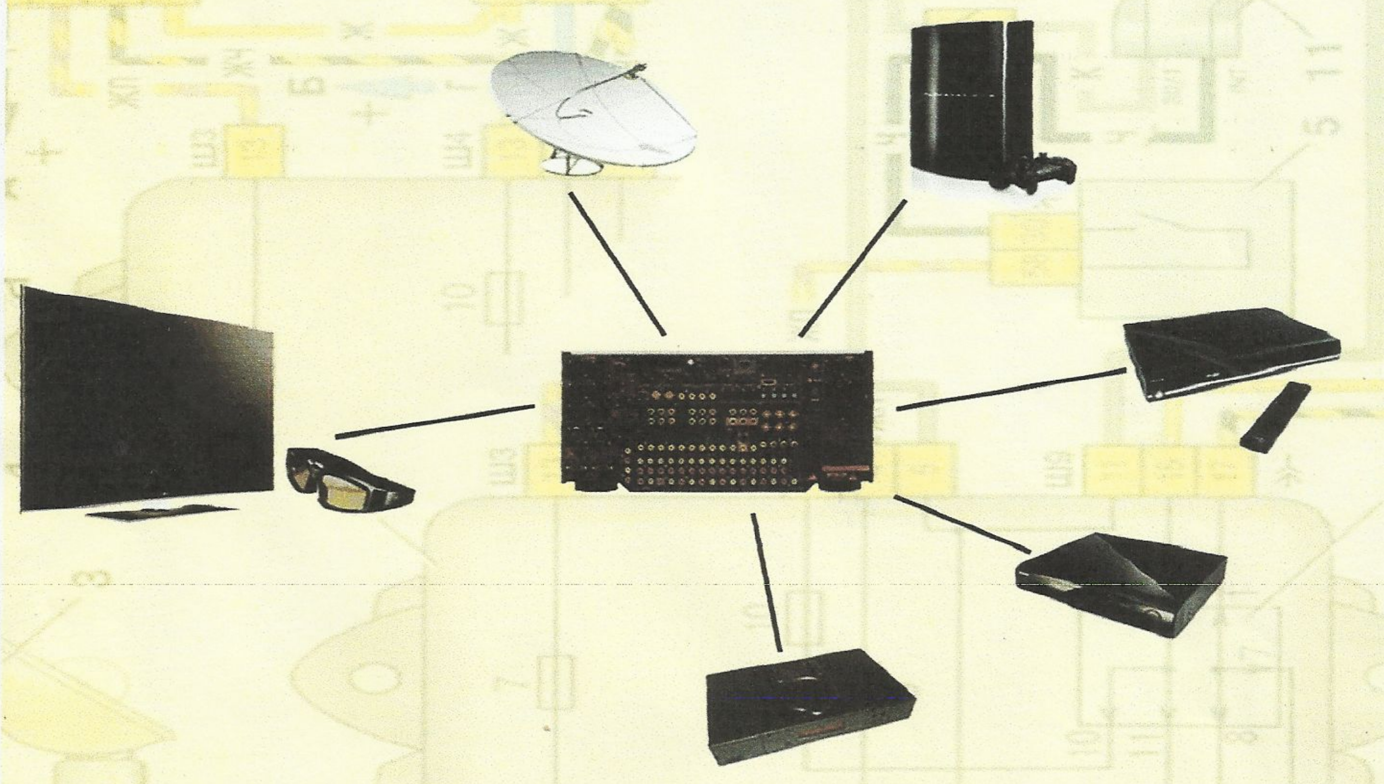
175

Приборы и Системы.
Управление, Контроль, Диагностика

Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics

8·2014

ISSN: 2073-0004



СОДЕРЖАНИЕ

Учредитель и издатель журнала
ООО «НАУЧТЕХЛИТИЗДАТ»

Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-1131
Подписной индекс 79214

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются
Публикации статей соискателей ученых степеней бесплатная

Подписано в печать 25.07.2014
Формат 60x88 1/8. Бумага кн.-журн. Печать офсетная
Усл.-печ. л. 5,18. Уч.-изд. 7,04.
Зак. 338. Тираж 4900 экз. Цена договорная

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
107258, г. Москва, Алымов пер., д. 17, стр. 2, «Издательство»
Тел.: 8-963-680-10-80 (редакция)
8-499-162-74-54 (бухгалтерия)
Факс: 8-499-168-13-69, 8-499-168-23-58
E-mail: ikd2004@mail.ru
http://www.tgizd.ru

Оригинал-макет и электронная версия подготовлены ООО «Научтехлитиздат»
Отпечатано в типографии ООО «Научтехлитиздат»
107258, Москва, Алымов пер., д. 17, корп. 2
Тел.: 8 (499) 168-21-28

Математическое моделирование приборов и систем

П.Ю. ЭНАТСКАЯ, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Е.Р. ХАКИМУЛЛИН, кандидат физ.-мат. наук, доцент
E-mail: nat1943@mail.ru
(МИЭМ НИУ «Высшая школа Экономики»)
Москва, Российская Федерация

Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики

Рассматриваются возможности исследования комбинаторных схем размещения частиц по ячейкам на основе графов случайных процессов, соответствующих схемам при поединичном добавлении частиц, с определенной нумерацией состояний на каждом шаге размещения с легко вычисляемыми вероятностями. Такая информация дает возможность точного вероятностного анализа интересующих схем размещения.
Суть метода графов состоит в построении случайного процесса при поединичном добавлении частиц в рассматриваемой комбинаторной схемы всеми возможными различимыми способами с определенной дисциплиной их нумерации в соответствующем графе состояний. Число шагов процесса определяется заданным в схеме общим числом размещаемых частиц. Нас интересует перечень всех состояний, а, значит, и их число на, последнем шаге.
Если на, ребрах графа указывать вероятности всех переходов из состояния в состояние на любом шаге процесса, то с учетом его свойств вероятности всех исходов схемы вычисляются по формулам сложения и умножения вероятностей и дают полную информацию о процессе, позволяющую проводить дальнейший анализ схемы. Поэтому ближайшая цель исследований комбинаторных схем состоит в получении вероятностных распределений всех их явно перечисленных исходов.
А в первую очередь будут решаться задачи перечислительной комбинаторики для исходов всех интересующих нас комбинаторных схем.
Ключевые слова: случайный процесс, метод графов, вероятностный анализ, комбинаторная схема, граф состояний, добавление частиц, вероятностные распределения исходов.

P.Y. ENATSKAYA, Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor
E.R. KHAKIMULLIN, Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor
E-mail: nat1943@mail.ru
(NRU MIEM «Higher School of Economics»)
Moscow, Russian Federation

Graphs method for solving enumerative combinatorics

The possibilities of research of combinatorial circuits of particles in cells based on graphs of stochastic processes in the respective schemes poedinichnom adding particles with a specific numbering at each step to organize easily calculable probabilities. Such information enables precise probabilistic analysis of interest layouts.
The essence of the method consists in constructing a graph of a random process with poedinichnom adding particles in the combinatorial circuit in all possible ways with certain distinct discipline their numbering in the corresponding graph states. Number of process steps defined in the schema specify the total number of particles placed. We are interested in the list of all the states, and, hence, their number on, the last step.
If on, the edges of the graph indicate the probability of all transitions with standing in state at any step of the process, given its properties, the probability of all outcomes scheme calculated by the formulas of addition and multiplication of probabilities and give full information about the process, allowing to conduct further analysis of the scheme. Therefore, the immediate goal of research of combinatorial circuits is to get all of their probability distributions explicitly listed outcomes.
A first problem will be solved enumerative combinatorics for all outcomes of interest combinatorial circuits.
Keywords: random process, the method of graphs, probabilistic analysis, combinatorial circuit, the state graph, the addition of particles, the probability distributions of outcomes.

Введение

Под перечислительными задачами комбинаторики понимаются задачи нахождения числа исходов изучаемой схемы или описание метода их перебора.

Получение явных формул для числа исходов схемы или получение рекуррентного соотношения для его вычисления имеют очевидное теоретическое значение. При построении процедуры перебора всех исходов схемы с их определенной нумерацией мы получаем численный метод анализа комбинаторной схемы, дающий возможности их визуального анализа с введением ограничений на интересующие нас исходы, путем отбраковки лишних из всех, получение их вероятностных распределений, быстрого моделирования значений исходов при наличии их общего списка.

Здесь предложен другой подход к решению перечислительных задач комбинаторики, названный методом графов, который дает дополнительную возможность нахождения вероятностного распределения исходов схемы на любом шаге вспомогательного случайного процесса.

В ряде источников предлагаются общие подходы к решению задач перечислительной комбинаторики, а именно, в [1…5] – это метод построения перечисляющих производящих функций с отдельными примерами, не включающими изучаемую здесь схему; в [4] и [6] рассматривается теория перечисления, основанная на методе производящих функцией; в [4] предлагается метод перечисления, связанный с рассмотрением алгебр инциндентности и использованием функции и использованием функции Мебиуса на частично упорядоченных множествах; в [7] представлены числа Стирлинга I-го и II-го рода как соответственно числа размещений r различимых частиц по n различимым ячейкам и как разбиение множества из n элементов на k непустых классов; в [8] в качестве инструмента решения перечислительных задач комбинаторики приведен перманент матрицы.

1. Перечисление исходов схемы сочетаний

Схема сочетаний, как известно, возникает при размещении неразличимых частиц по различимым ячейкам с ограничением: в каждую ячейку помещается одна частица.

Общее число исходов схемы есть C_n^r – число сочетаний из n по r, где n – число ячеек, r – число частиц.

Для явного перечисления всех C_n^r различимых исходов схемы будем строить случайный процесс размещения частиц (начиная с нуля частиц с добавлением на каждом шаге еще одной частицы до заданного числа частиц r) независимо и равновероятно по всем свободным из n ячейкам.

Все C_n^r исходов схемы сочетаний отличаются друг от друга (в интерпретации размещений) набором непустых, т.е. содержащих по одной частице ячеек. Поэтому состояние процесса $E_j^{(i)}$(j-ое состояние на i-ом шаге) будем описывать или вектором $\bar{\eta}=(\eta_1,...,\eta_n)$, где $\eta_k=0$, если k-ая ячейка пуста, или $\eta_k=1$ в противном случае на i-ом шаге, $k=\overline{1,n}$ или вектором $\bar{n}=(n_1,...,n_i)$, где n_k – номер непустой ячейки, т.е. содержащей одну частицу на i-ом шаге, $k=\overline{1,i}$.

Договоримся нумеровать исходы на i-ом шаге процесса размещения последней добавленной частицы в порядке роста номеров ячеек правее последней занятой до i-ого шага.

Пример 1. Поясним выше сказанное на графе случайного процесса в схеме сочетаний при n = 5, r = 4. Состояние $E_j^{(i)}$ будем описывать вектором $\bar{\eta}=(\eta_1,...,\eta_5)$ или вектором $\bar{n}=(n_1,...,n_i)$ на i-ом шаге, $i=\overline{1,4}$. Граф в терминах $\bar{\eta}$ имеет вид представленный на рисунке 1.

На графе в терминах $\bar{n}$

$E_1^{(1)}$ = (1), $E_2^{(1)}$ = (2), $E_3^{(1)}$ = (3), $E_4^{(1)}$ = (4), $E_5^{(1)}$ = (5);

$E_1^{(2)}$ = (1,2), $E_2^{(2)}$ = (1,3), $E_3^{(2)}$ = (1,4),

$E_4^{(2)}$ = (1,5), $E_5^{(2)}$ = (2,3),

$E_6^{(2)}$ = (2,4), $E_7^{(2)}$ = (2,5), $E_8^{(2)}$ = (3,4),

$E_9^{(2)}$ = (3,5), $E_{10}^{(2)}$ = (4,5);

$E_1^{(3)}$ = (1,2,3), $E_2^{(3)}$ = (1,2,4),

$E_3^{(3)}$ = (1,2,5), $E_4^{(3)}$ = (1,3,4),

$E_5^{(3)}$ = (1,3,5), $E_6^{(3)}$ = (1,4,5),

$E_7^{(3)}$ = (2,3,4), $E_8^{(3)}$ = (2,3,5),

$E_9^{(3)}$ = (2,4,5), $E_{10}^{(3)}$ = (3,4,5);

$E_1^{(4)}$ = (1,2,3,4), $E_2^{(4)}$ = (1,2,3,5),

$E_3^{(4)}$ = (1,2,4,5), $E_4^{(4)}$ = (1,3,4,5), $E_5^{(4)}$ = (2,3,4,5).

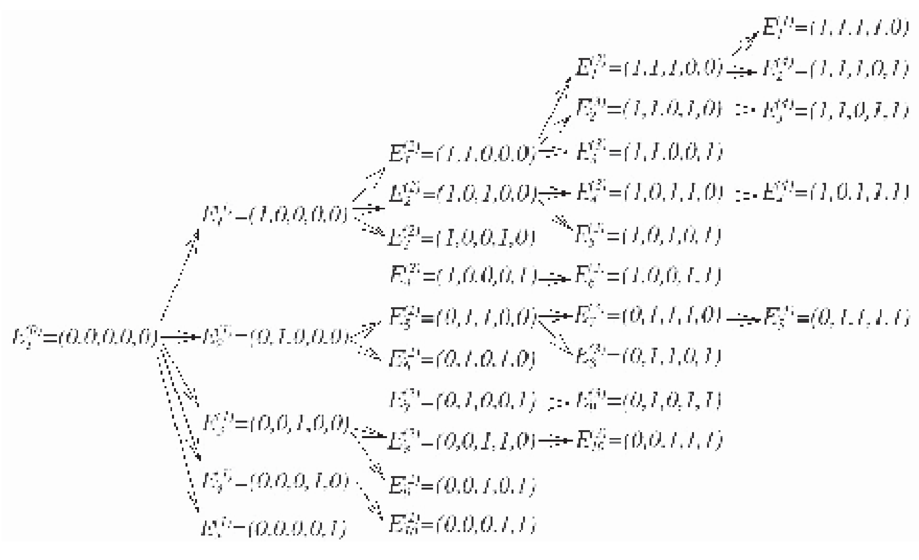


РИС. 1. *Пример графа случайного процесса в схеме сочетаний при n = 5*

Количества исходов схемы сочетаний на каждом i-ом шаге $i = \overline{1,4}$ в примере совпадают с результатами непосредственных вычислений: $C_5{}^1 = 5$, $C_5{}^2 = C_5{}^3 = 10$, $C_5 = 5$.

Итак, в итоге имеем 5 состояний $E_j{}^{(4)}$, j = 1,5, перечисленных в двух формах, выраженных через $\overline{\eta}$ и $\overline{n}$. По смыслу схемы все они равновероятны, т.е. каждое наступает с вероятностью 1/5, поэтому задача перечисления всех исходов схемы сочетаний с их вероятностями решена.

2. Перечисление исходов схемы перестановок

Схема перестановок возникает при упорядочивании между собой n различимых элементов или при размещении n различимых частиц по n различимым ячейкам, так что каждая ячейка вмещает ровно одну частицу.

Общее число исходов схемы есть $n!$.

Для явного перечисления всех этих исходов строим граф случайного процесса упорядочивания i различимых элементов между собой на i-ом шаге $(i = \overline{1,n})$ с добавлением по одной частице на каждом шаге.

Для получения перечня всех состояний на (i+1)-ом шаге из данного состояния на i-ом шаге будем варьировать место добавленного элемента относительно имеющихся в порядке данного состояния на i-ом шаге от положения левее первого до положения правее i-ого с промежуточными положениями между каждыми в данном состоянии на i-ом шаге получаем (i +1) состояние на (i+1)-ом шаге. Причем из разных состояний i-ого шага могут получаться только разные на (i+1)-ом шаге, т.к. на i-ом шаге исходы отличаются разными относительными порядками первых i элементов, а переход к следующему (i+1)-ому шагу не меняет их относительный порядок.

Нумерацию состояний на (i+1)-ом шаге производим в порядке их формирования подряд общей нумерацией для всех элементов i-ого шага. При этом, если рассматривать исходы на каждом шаге как составленные из упорядоченных, номеров элементов числа, то в установленном выше порядке нумерации состояний таким образом получаются из данного состояния убывающие числа.

Итак, при каждом фиксированном числе элементов r (на r-ом шаге) получаем перечень нумерованных состояний процесса, общее число которых (по построению процесса) равно $r!$, т.к. из каждого j-ого состояния предыдущего шага получаем (j + 1) состояний следующего шага, что по индукции и дает общее число исходов, равное $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot r = r!$, а при $r = n$ это $n!$ исходов, причем, очевидно, все они равновероятны.

Поясним процесс перечисления $n!$ исходов на примере.

Пример 2. Пусть n = 3. Как и раньше (в пункте 1) состояние $E_j{}^{(i)}$ представляет собой j-ое состояние на i-ом шаге упорядочивания между собой i различимых элементов. Построим граф случайного процесса упорядочивания i элементов, начиная с i = 1 с добавлением по одному элементу на каждом шаге до i = 3 = n. Пусть номера добавляемых элементов будут идти от 1 до n = 3. Состояние $E_j{}^{(i)}$ будем описывать j-ым порядком i элементов. Представляем граф случайного процесса для n = 3, последними состояниями которого будет явный перечень всех упорядочиваний n = 3 различимых элементов.

При вычислении общего числа исходов схемы перестановки $n!$ = 3! = 6 получаем число исходов, совпадающее с полученным по графу (рис.2).

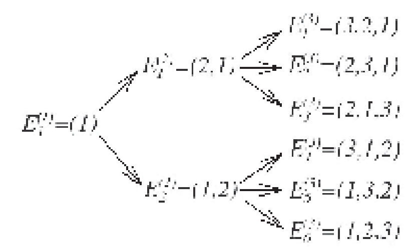


РИС. 2. *Граф случайного процесса упорядочивания*

3. Перечисление исходов схемы размещений

Схема размещений возникает при упорядоченном выборе r элементов из различимых элементов из n возвращения или при размещении r различимых частиц по n различимым ячейкам, когда каждая ячейка вмещает ровно одну частицу $n \geq r$.

Общее число исходов схемы равно числу размещений $A_n{}^r$.

Для явного перечисления всех исходов схемы по результату раздела 1 составляем перечень всех состояний схемы сочетаний с теми же параметрами и на каждом из них производим все возможные перестановки по результату раздела 2. Это и даст явное перечисление схемы размещений.

Покажем это на, примере при n = 5, r = 4. Заранее вычислим число равных исходов схемы $A_5{}^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Пример 3. В примере 1 при данных значениях параметров n = 5, r = 4 получены следующие 5 исходов схемы сочетаний: $E_1{}^{(4)} = n_1 = (1,2,3,4)$, $E_2{}^{(4)} = n_2 = (1,2,3,5)$, $E_3{}^{(4)} = n_3 = (1,2,4,5)$, $E_4{}^{(4)} = n_4 = (1,3,4,5)$, $E_5{}^{(4)} = n_5 = (2,3,4,5)$.

В схеме размещений для каждого из этих 5-ти исходов нужно перечислить все перестановки компонент векторов $\overline{n}_j$, $j = \overline{1,5}$, т.е. применить алгоритм перечисления схемы перестановок раздела 2 к каждому вектору $\overline{n}_j$. Покажем, что на примере компонент вектора $\overline{n}$. Очевидно, что аналогичные рассмотрения других $\overline{n}_1$, $j \neq 1$ приведут к такому же числу исходов при перестановке их компонент всеми возможными способами. Т.е. общее число схемы размещений исходов получится, как число перестановок компонент вектора $\overline{n}_1$ умноженному на 5. Сравним это число с результатом непосредственного вычисления $A_5{}^4 = 120$.

Для перечисления всех перестановок в $\overline{n}_1$ достаточно продлить граф примера 2 (рис. 2) еще на один шаг. Поэтому рассмотрим здесь только этот участок графа от шага 3 до шага 4.

Получаем 24 исхода, что при умножении на 5 дает то же число 120 исходов, что и при непосредственном вычислении по формуле размещения A_5^4.

4. Перечисление исходов схемы размещений с повторением

Схема размещений с повторением возникает при выборе из n различимых r элементов с учетом их порядка или в схеме размещения r различимых частиц по n различимым ячейкам без ограничения па число частиц в ячейке.

Общее число исходов схемы есть n^r.

Для явного перечисления всех n^r исходов схемы строим случайный процесс последовательного поединичного независимого размещения частиц с нумерацией исходов в порядке роста номеров ячеек размещения последней частицы. Обозначение $E_j^{(i)}$ означает j-ое состояние на i-ом шаге (после размещения i частиц по ячейкам) и описывается n-мерным вектором, каждая компонента которого содержит номера частиц в каждой ячейке, и их компоненты перечислены в порядке нумерации ячеек. При написании компоненты, содержащей более одного номера частиц, будем заключать в круглые скобки. Поясним сказанное примером.

Пример 4. Пусть $n = 3$, $r = 2$. Число исходов схемы есть $3^2 = 9$.

Т.е. по графу снова на 2-ом шаге получается 9 равновероятных исходов.

5. Перечисление исходом схемы сочетаний с повторением

Схема сочетаний с повторением возникает при выборе из n различимых элементов по r с возвращением и без учета их порядка или при размещении r неразличимых частиц по n различимым ячейкам без ограничений на число частиц в ячейке.

Общее число исходов схемы есть C^r_{n+r-1}.

Для явного перечисления всех исходов схемы по результату разделе 1 перечисляем все C^r_{n+r-1} исходов схемы сочетаний и интерпретируем их как последовательность уровней заполнения ячеек в порядке их нумерации по следующему правилу:
все невыбранные подряд элементы от 1 до $(n+ r - 1)$ заменяем на то же число нулей (в заполнении ячеек), если они крайние, или – на единицу меньшим числом, если они не крайние, а все подряд идущие выбранные – их количествами.

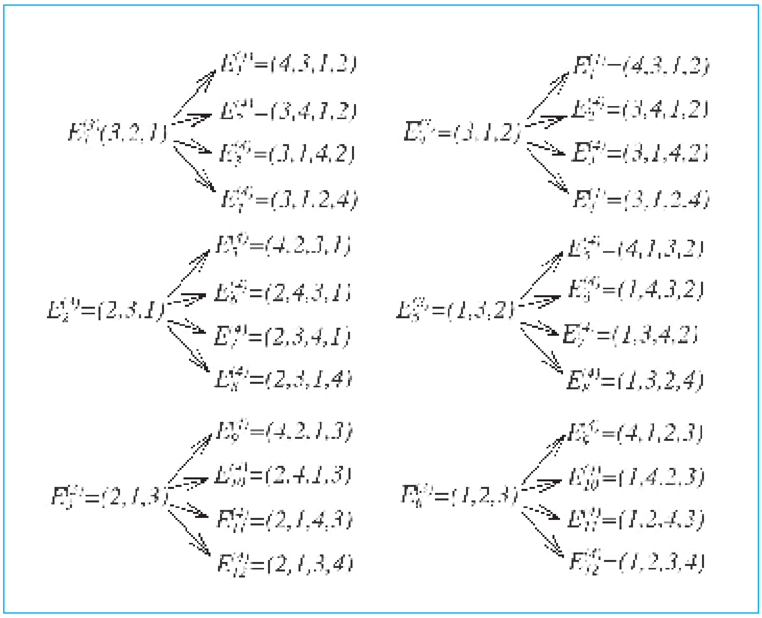


РИС. 3. *Граф перечислении перестановок*

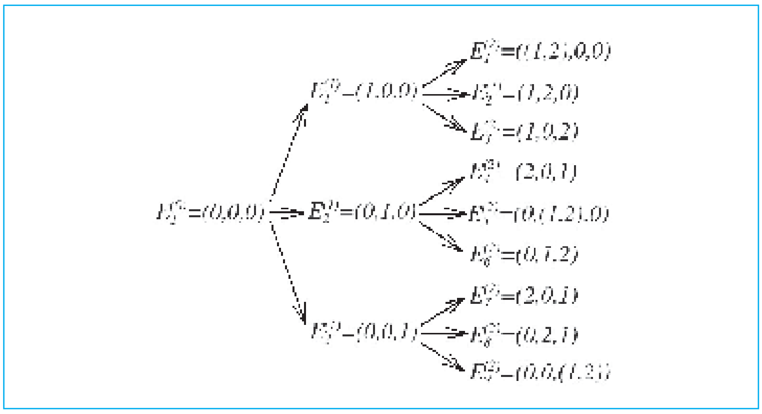


РИС. 4. *Пример графа случайного процесса при n = 3, r= 2*

Это правило следует из интерпретации размещений схемы сочетаний с повторением, как выбора мест r неразличимых частиц среди $(n+r - I)$ мест для них, а остальные $(n - I)$ мест используются для $(n - 1)$ внутренних перегородок n различимых ячеек, по которым размещают частицы.

Пример 5. Пусть $n = 4$, $r = 5$ и пусть в результате реализации схемы сочетаний с повторением с числом исходов $C^5{}_{4+5-1} = C_8{}^5$ получили последовательности а) (1,3,4,6,8) и б) (3,4,5,7,8). Для перевода этих исходов в последовательности заполнений ячеек в порядке их нумерации воспользуемся правилом, по которому получаем в случае а) (1,2,1,1), а в случае б) (0,0,3,2), что совпадает с непосредственным осмыслением первоначальных результатов а) и б) с точки зрения размещения 4 неразличимых частиц по 5 различимым ячейкам.

Действительно, в случаях исходных результатов схемы сочетаний а) и б) $C_8{}^5$ обозначим «*»-ки частицы на выбранных местах, все места – верхними черточками, а невыбранные места – «|» – внутренними перегородками ячеек с добавлением двух внешних стенок ряда ячеек.

Получаем

а) $\left|\overline{*}\,|\,\overline{*\,*}\,|\,\overline{*}\,|\,\overline{*}\right|$,

б) $\left|\,||\,\overline{*\,*\,*}\,|\,\overline{*\,*}\right|$,

что наглядно соответствует следующим перечням заполнений ячеек в порядке их нумерации: а) (1,2,1,1), б) (0,0,3,2), совпадающие с полученными по правилу.

6. Перечисление исходов схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам

Эта схема была подробно изучена в [9]. Была установлена связь чисел исходов в предложенной схеме и в той же схеме без пустых ячеек, для *числа N* предложена рекуррента и получена точная формула, решена задача перечисления всех N^* исходов схемы с их вероятностями методом графов, Здесь поясним лишь суть случайного процесса для построения соответствующего графа состоянии поединичного добавления частиц на каждом шаге при размещении их по данной схеме и порядок нумерации всех исходов.

Состояние процесса $E_j(i)$ будем описывать или вектором $\overline{\mu}_j^{(i)}=(\mu_0^{(i)},\ldots,\mu_n^{(i)})$, где $\mu_j^{(i)}$ – число ячеек, содержащих k частиц, $k=\overline{1,i}$ на i-ом шаге (после размещения i частиц) или вектором $\overline{n}^{(i)}=(0,\ldots,0,1,\ldots,i)$ – вариационным рядом уровней заполнения n ячеек на i-ом щагс.

Состояния на i-ом шаге, полученные из данного состояния на (i–1)-ом шаге, нумеруем в порядке размещения добавленной частицы в ячейку по мере роста уровня ее заполнения. С учетом равновероятности размещения добавленной частицы по n ячейкам на каждом шаге вероятности всех переходов на i-ом шаге легко вычисляются и будут указываться на ребрах графа.

Покажем это на примере.

Пример 7. Пусть $n = 3$, $r = 4$. Построим граф переходов случайного процесса размещения частиц, описывая их в терминах векторов $\overline{\mu}_j^{(i)}$:

Для получения вероятностного распределения всех состояний на 4-ом шаге по графу (рис. 5) вычислим вероятности векторов граф переходов случайного процесса размещения частиц, описывая их в терминах векторов $\{\overline{\mu}_j^{(i)}\}$, $j=\overline{1,4}$, p_1, p_2, p_3, p_4, соответственно:

$p_1 = P(\overline{\mu}_1^{(4)} = (0,2,1,0,0)) =$
$= P(1,1,1,1) + P(1,1,2,1) + P(1,2,2,1) =$
$=1\times (1/3) \times (1/3) \times 1 + 1\times (1/3) \times(2/3) \times(1/3) +$
$+ 1\times (2/3) \times(2/3) \times(1/3) = 1/3$

$p_2 = P(\overline{\mu}_2^{(4)} = (1,0,2,0,0)) = P(1,1,2,2) + P(1,2,2,2) =$
$= 1\times (1/3) \times(2/3) \times(1/3) + 1\times (2/3) \times(2/3) \times(1/3) = 2/9$

$p_3 = P(\overline{\mu}_3^{(4)} = (1,1,0,1,0)) =$
$= P(1,1,2,2) + P(1,2,2,3) + P(1,2,3,3) =$
$=1\times (1/3) \times(2/3) \times(1/3) + 1\times (2/3) \times(2/3) \times$
$\times (1/3) + 1\times (2/3) \times(1/3) \times(2/3) = 10/27$

$p_4 = P(\overline{\mu}_4^{(4)} = (2,0,0,0,1)) = P(1,2,3,4) =$
$=1\times (2/3) \times(1/3) \times(1/3) = 2/27$

где обозначение $P(a, b, c, d)$ означает траекторию переходов состояний

$E_a(1) \to E_b(2) \to E_c(3) \to E_d(4)$

7. Перечисление исходов схемы перестановок с повторением

Эта схема возникает при делении n различимых элементов на r групп численностями $m_1,\ldots, m_r$, ($\sum_{i-0}^{r} m_i = n$) с учетом порядка групп.

Общее число исходов схемы есть $n!\Big/\prod_{i=1}^{r}(m_i!)$.

Очевидно, что рассматриваемая схема эквивалентна схеме размещения r различимых частиц по n различимым ячейкам с ограничением вида фиксированных количеств частиц в каждой ячейке. Поэтому перебор ее результатов состоит из двух этапов:

1) производим перечисление всех исходов схемы размещений, данное в разделе 4;
2) из результатов п.1) отбраковываем исходы, для которых данные ограничения не выполнены.

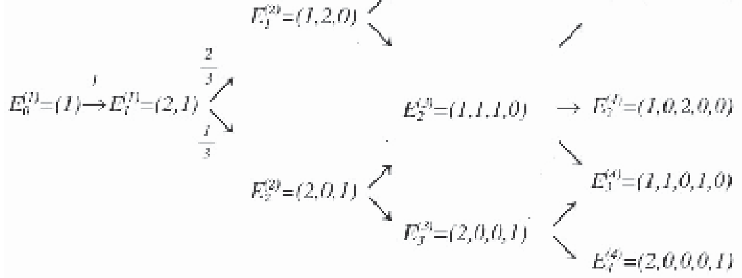


РИС. 5. *Граф переходов случайного процесса размещения частиц, описывая их в терминах векторов* $\overline{\mu}_j^{(i)}$

8. Перечисление исходов схемы размещения *r* различимых частиц по *n* неразличимым ячейкам

Общее число исходов схемы получено в [2] в явном виде.

Исходы этой схемы определяются наборами номеров попавших в ячейки частиц без учета порядков, как наборов номеров частиц, так и номеров частиц в каждой ячейке.

Для единообразия представления и удобства сравнения результатов размещения в схеме договоримся записывать исходы в виде перечня совокупностей номеров частиц в n ячейках в порядке роста уровней их заполнения (больше одного номера в круглых скобках, все номера и совокупности номеров через запятую), а при совпадающих значениях уровней – в алфавитном порядке, считая алфавитом номера частиц от 1 до числа размещенных. Перечисление всех или группы исходов схемы будем производить по мере роста в исходе числа ячеек с более высокими уровнями заполнений.

Для явного перечисления всех исходов схемы размещения r различимых частиц по n неразличимым ячейкам построим случайный процесс последовательного поединичного равновероятного размещения частиц с растущими номерами, начиная с 1 до номера шага размещения, совпадающим с числом размещенных частиц, по n ячейкам, записывая состояния процесса в виде исходов схемы, описанных выше в указанном там же порядке для каждого фиксированного состояния на предыдущем шаге. Тогда на r-ом шаге будем иметь перечень всех возможных, частично упорядоченных, описанным выше способом состояний, относительно каждого из состояний $(r-1)$-го шага.

Для иллюстрации описанной процедуры приведем числовой пример.

Пример 8. Пусть $n = 3$, $r = 4$. Определим перечень исходов схемы и их вероятностное распределение путем построения описанного случайного процесса. Введем обозначение j-ого состояния процесса на i-ом шаге: $E_j^{(i)}$, и будем описывать исходы размещений для каждого фиксированного состояния на предыдущем шаге в виде перечисления совокупностей номеров частиц в n ячейках в определенном выше порядке. Нумерацию исходов процесса для каждого фиксированного предсостояния производим по мере попадания последней добавленной на рассматриваем шаге размещения частицы в ячейки с растущим предварительным уровнем заполнения.

Представим случайный процесс графом переходов из состояния в состояние с указанием вероятностей переходов на ребрах графа (рис. 6).

По графу получаем 14 исходов размещения в схеме. Распределение вероятностей всех этих исходов легко считаются по графу рис. 6 по единственным для каждого итогового состояния траекториям:

$P(T_1^{(4)}) = P(T_2^{(4)}) = \ldots = P(T_9^{(4)}) =$
$= 1\times (2/3) \times(1/3) \times(1/3) = 2/27$

$P(T_{10}^{(4)}) = P(T_{11}^{(4)}) = P(T_{12}^{(4)}) =$
$= 1\times (1/3) \times(2/3) \times(1/3) = 2/27$

$P(T_{13}^{(4)}) = 1\times (1/3) \times(1/3) \times(2/3) = 2/27$

$P(T_{14}^{(4)}) = 1\times (1/3) \times(1/3) \times(1/3) = 1/27.$

Проверка: $(2/27) \cdot 13 + 1/27 = 1$.

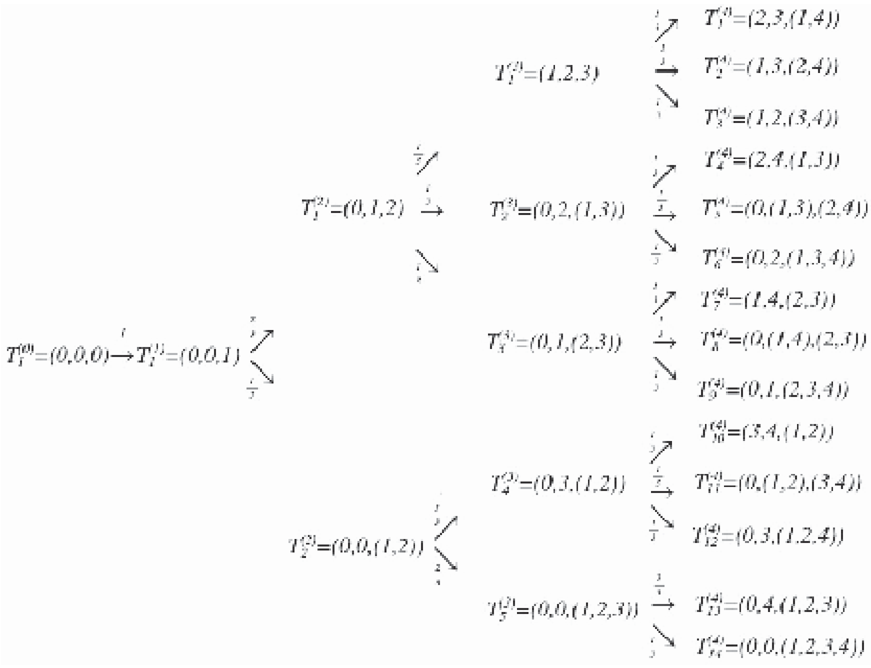


РИС. 6. *Граф переходов из состояния в состояние с указанием вероятностей переходов на ребрах графа*

Выводы

Смысл результатов решения задач перечислительной комбинаторики для различных комбинаторных схем, кроме их фундаментального характера, может состоять, например, в следующих практических возможностях при фиксированных значениях параметров схемы:

1) визуального анализа всех исходов схемы;
2) численного определения общего числа всех N исходов схемы (если явная формула для числа N отсутствует);
3) численного определения числа M исходов схемы с ограничениями путем отбраковки соответствующих исходов из всех;
4) численного нахождения вероятности выполнения заданных ограничений по результатам п.1) и 2), равной числу M / N;
5) численного нахождения вероятностного распределения исходов схемы методом графов;
6) моделирования исходов схемы по ах полученному в п.4) вероятностному распределению методом маркировки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гульден Я., Диксон Д. *Перечислительная комбинаторика*. М.: Наука. 1990.
2. Тимашев А.Н. *Обобщенная схема размещений в задачах вероятностной комбинаторики*. М.: Академиздатцентр «Наука», РАН. 2011.
3. Сачков В.Н. *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. М. 1982.
4. Сачков В.Н. *Комбинаторные методы дискретной математики*. М. 1977.
5. Холл М. *Комбинаторика*. М.: Мир. 1970.
6. Харри Ф.*Теория графов*, пер. с англ. М. 1973
7. Кофман А. *Введение в прикладную комбинаторику*. М.: Наука. 1975.
8. Риордан Дж. *Введение в комбинаторный анализ*. М.: Иностранная Литература. 1963.
9. Минк Х. *Перманенты, пер. с англ*. М. 1982.
10. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. Анализ схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам // *Дискретная математика* (принято к печати).
11. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. *Стохастическое моделирование*. М.: МИЭМ. 2012
12. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. *Анализ схемы размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам*.

REFERENCES

1. Gulden Ya., Dikson D. *Perechislitelnaya kombinatorika* [Combinatorial enumeration]. M.: Nauka [Moscow: Publishing house «Science»]. 1990.
2. Timashev A.N. *Obobshchennaya skhema razmeshcheniy v zadachakh veroyatnostnoy kombinatoriki* [Generalized allocation scheme in probabilistic combinatorics problems]. M.: Akademizdattsentr «Nauka», RAN [Moscow: Publishing House of Russian Academy of Sciences «Science»]. 2011.
3. Sachkov V.N. *Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoy matematiki* [Introduction to Combinatorial Methods of Discrete Mathematics]. Moscow. 1982.
4. Sachkov V.N. *Kombinatornye metody diskretnoy matematiki* [Combinatorial Methods in Discrete Mathematics]. Moscow. 1977.
5. Kholl M. *Kombinatorika* [Combinatorics]. M.: Mir [Moscow: Publishing house «World»]. 1970.
6. Kharri F. *Teoriya grafov, per. s angl* [Teoriya graphs lane]. Moscow: Publishing house «World». 1973
7. Kofman A. *Vvedenie v prikladnuyu kombinatoriku* [Introduction to applied combinatorics]. M.: Nauka [Moscow: Publishing house «Science»]. 1975.
8. Riordan Dzh. *Vvedenie v kombinatornyy analiz* [Introduction to Combinatorial Analysis]. M.: Inostrannaya Literatura [Moscow: Publishing house «Foreign Literature»]. 1963.
9. Mink Kh. *Permanenty, per. s angl* [Permanents]. Moscow. 1982.
10. Enatskaya N.Yu., Khakimullin Ye.R. Analiz skhemy razmeshcheniya nerazlichimykh chastits po nerazlichimym yacheykam [Analysis of the layout is not distinguishable particles indistinguishable cells]. *Diskretnaya matematika* (prinyato k pechati) [Discrete Mathematics (accepted for publication)].
11. Enatskaya N.Yu., Khakimullin Ye.R. *Stokhasticheskoe modelirovanie* [Stochastic modeling]. M.: MIEM [Moscow: Publishing House of MIEM]. 2012.
12. Enatskaya N.Yu., Khakimullin Ye.R. *Analiz skhemy razmeshcheniya razlichimykh chastits po nerazlichimym yacheykam* [Analysis layout times lichimyh particle indistinguishable cells].

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- *Энатская Наталия Юрьевна*,
  кандидат физико-математических наук,
  доцент
  E-mail: nat1943@mail.ru
- *Хакимуллин Евгений Робертович*,
  кандидат физико-математических наук, доцент
  E-mail: evgeni/hakimullin@mail.com
  МИЭМ НИУ «Высшая школа экономики»
  101100, Россия, Москва,
  Мясницкая, д. 20

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

- *Enatskaya Natal'ya Yur'evna*,
  Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
  Associate Professor
  E-mail: nat1943@mail.ru
- *Khakimullin Eugene Robertovich*,
  Candidate of Physical and Mathematical sciences,
  Associate Professor
  E-mail: evgeni / hakimullin @ mail.com
  MIEM NRU «Higher school of economics»
  101100, Russia, Moscow, Myasnitskaya, 20