Функциональный анализ и его приложения
2010, т. 44, вып. 2, с. 3–13

УДК 517.987.5+519.21

Задача Эрдёша–Вершика для золотого сечения*

© 2010. З. И. Бежаева, В. И. Оселедец

Мы изучаем свойства меры Эрдёша и инвариантной меры Эрдёша для золотого сечения и всех значений параметра Бернулли. Мы доказываем, что сдвиг на двустороннем компакте Фибоначчи с инвариантной мерой Эрдёша изоморфен интегральному автоморфизму над автоморфизмом Бернулли со счетным алфавитом. Предложен эффективный алгоритм вычисления энтропии инвариантной меры Эрдёша. Показано, что для определенных значений параметра Бернулли этот алгоритм дает хаусдорфову размерность меры Эрдёша с пятнадцатью десятичными знаками.

Эрдёш более 60 лет назад поставил следующую задачу: каким может быть распределение случайной величины $\zeta = \zeta_1\rho + \zeta_2\rho^2 + \dots$, где $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения 0, 1, и $P(\zeta_i = 0) = 1/2$ $(0 < \rho < 1)$.

Распределение случайной величины ζ называется мерой Эрдёша на прямой.

Задаче Эрдёша посвящено большое количество работ. В [3] было дано определение меры Эрдёша на отрезке $[0, 1]$, а также меры Эрдёша и инвариантной меры Эрдёша на компакте Фибоначчи для случая $\rho = (\sqrt{5}-1)/2$ (число, обратное к золотому сечению $\beta = (\sqrt{5}+1)/2$). В этой же работе доказана эквивалентность меры Эрдёша и инвариантной меры Эрдёша на компакте Фибоначчи.

Вершиком была поставлена задача об эргодических свойствах инвариантной меры Эрдёша, и в [3] было дано решение этой задачи.

В предыдущей работе [1] авторы обнаружили связь задачи Эрдёша–Вершика с классом скрытых марковских цепей для более общего случая $0 < P(\zeta_i = 0) = q < 1$, $P(\zeta_i = 1) = p$, $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$. В дальнейшем мы рассматриваем именно этот случай.

Используя эту связь, мы докажем аналог одного из главных результатов статьи [3]. А именно, мы докажем, что сдвиг на двустороннем компакте Фибоначчи с инвариантной мерой Эрдёша изоморфен специальному автоморфизму с базовым автоморфизмом Бернулли со счетным алфавитом. Мы также получим формулу для энтропии инвариантной меры Эрдёша.

Отношение энтропии инвариантной меры Эрдёша к $\ln(\beta)$ есть хаусдорфова размерность инвариантной меры Эрдёша на компакте Фибоначчи с метрикой $d(x, y) = \rho^{n(x,y)}$, где $n(x, y)$ — длина наибольшего общего начала слов x и y. Эта размерность равна также хаусдорфовой размерности меры Эрдёша на прямой. Напомним, что хаусдорфова размерность меры равна точной нижней грани хаусдорфовых размерностей множеств меры 1. Предыдущее утверждение следует из эквивалентности меры Эрдёша эргодической инвариантной мере Эрдёша (см. [2], где указан способ вычисления хаусдорфовой размерности эргодических мер

---

*Работа авторов осуществлена при частичной поддержке гранта РФФИ 07-01-00203, второй автор частично поддержан грантом РФФИ 07-01-92215-НЦНИЛ.

для символических динамических систем и преобразований единичного отрезка).

Формула для хаусдорфовой размерности меры Эрдёша на прямой была получена Фенгом в [6] (теорема 4.29). Наша формула совпадает с формулой Фенга. Следовательно, нами дан новый вывод этой формулы. Прямое вычисление хаусдорфовой размерности по формуле Фенга невозможно из-за медленной сходимости ряда в этой формуле.

Для рассматриваемого нами случая Лалли в [5] получил еще одну формулу для хаусдорфовой размерности меры Эрдёша на прямой. С помощью этой формулы методом Монте-Карло в [5] им были получены доверительные оценки хаусдорфовой размерности меры Эрдёша для разных значений p.

Для тех же значений p, что и в [5], в настоящей работе вычислена хаусдорфова размерность меры Эрдёша с большим числом знаков, что, в частности, дает представление о точности статистических оценок Лалли. В наших вычислениях использовалось ускорение сходимости ряда в формуле для хаусдорфовой размерности, аналогичное тому, что было применено в статье Александера–Цагира [4].

Заметим еще, что вычисления Лалли можно рассматривать как вычисление ляпуновского показателя для некоторой последовательности случайных матриц (см. [5]). То же самое можно сказать и о наших вычислениях, но последовательность матриц у нас другая.

§1. Инвариантная мера Эрдёша на компакте Фибоначчи

Приведем определение инвариантной меры Эрдёша из [1]. В [1] задача об эргодических свойствах инвариантной меры Эрдёша была сведена к изучению скрытой марковской цепи $\{\eta_i = f(\xi_i)\}$, которая порождается марковской цепью $\{\xi_i\}$ с пятью состояниями 1, 2, 3, 4, 5 и переходной матрицей P, где

$$P = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & pq & p^2 \\ q & 0 & qp & 0 & p^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Начальное распределение l — стационарное распределение, функция «склейки состояний» f равна нулю для состояний 1, 2, 3 и 1 для состояний 4, 5. Скрытой марковской цепи отвечает распределение вероятностей μ на пространстве ее реализаций.

Распределение μ удобно считать распределением бесконечного случайного двоичного слова $\eta_1\eta_2\cdots\eta_n\cdots = f(\xi_1)f(\xi_2)\cdots f(\xi_n)\cdots$. Его носитель — компакт Фибоначчи бесконечных двоичных слов, в которых нет подслов 11. Элементы этого компакта называются словами Фибоначчи. Это множество компактно относительно метрики $d(x,y) = \rho^{n(x,y)}$, где $n(x,y)$ — длина наибольшего общего начала слов x и y. Мера μ называется инвариантной мерой Эрдёша на компакте Фибоначчи [1].

Выделим в матрице P блоки $P(00)$, $P(01)$, $P(10)$, соответствующие разбиению множества $\{1,2,3,4,5\}$ на подмножества $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$:

$$P(00)=\begin{pmatrix} q & 0 & 0\\ q & 0 & qp\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\qquad P(01)=\begin{pmatrix} pq & p^2\\ 0 & p^2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad P(10)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Обозначим через $l(0)$ строку из первых трех элементов строки l — стационарного распределения марковской цепи — и через $l(1)$ строку из ее последних двух элементов. Обозначим также через $r(0)$ столбец $(1,1,1)^\top$ и через $r(1)$ столбец $(1,1)^\top$.

Пусть $n\geqslant 2$ и $a=a_1\cdots a_n$ — конечное слово Фибоначчи. Положим

$$P(a)=P(a_1a_2)\cdots P(a_{n-1}a_n).$$

Тогда

$$\mu(\{x:x_1\cdots x_n=a\})=\mu(a)=l(a_1)P(a)r(a_n),\qquad \mu(a_1)=l(a_1)r(a_1).$$

Пусть $\widetilde{X}$ — двусторонний компакт Фибоначчи всех бесконечных в обе стороны двоичных слов с выделенным первым местом, в которых нет двух соседних единиц. Через T будем обозначать сдвиг в пространстве $\widetilde{X}$. На пространстве $\widetilde{X}$ определим меру $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu}(\{x:x_{1+j}x_{2+j}\cdots x_{n+j}=a_1\cdots a_n=a\})=\mu(a)\qquad \forall\, j\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 1.$$

Мера $\tilde{\mu}$ называется инвариантной мерой Эрдёша на $\widetilde{X}$.

§ 2. Золотой сдвиг

Назовем конечное слово Фибоначчи элементарным, если оно имеет вид $1(0)^{k+1}$, $k=0,1,2,\dots$. Элементарное слово будем называть четным, если k четное, и нечетным, если k нечетное.

В [3] было введено подмножество регулярных слов. Напомним определение регулярного слова, данное там. Пусть $\widetilde{X}_1$ — совокупность слов Фибоначчи $x=\dots x_{-1}x_0x_1\dots$ из $\widetilde{X}$ с $x_1=1$, содержащих 1 бесконечное число раз как слева, так и справа от места с номером 1. Для любого x из $\widetilde{X}_1$ введем числа $y_i(x)$, $i\in\mathbb{Z}$, где $y_i(x)+1$ — число нулей между i-й и $(i+1)$-й единицей в слове x (единица с номером 1 стоит на месте с номером 1).

Определение. Слово $x\in\widetilde{X}_1$ называется регулярным, если в нем справа и слева от места с номером 1 встречается бесконечное количество нечетных $y_i(x)$ (бесконечное количество нечетных элементарных слов Фибоначчи) и $y_0(x)$ нечетно (элементарное слово Фибоначчи слева от места с номером 1 нечетно).

Как и в [3], множество регулярных слов будем обозначать через $\widetilde{X}_0$. На $\widetilde{X}_0$ естественным образом определяется условная мера Эрдёша $\tilde{\mu}_0$. Эта мера пропорциональна мере $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\mu}_0(\widetilde{X}_0)=1$.

Согласно [3], конечное слово Фибоначчи b называется блоком, если оно — либо нечетное элементарное слово, либо конкатенация вида $c_1c_2\cdots c_{s-1}c_s$, $s\geqslant 2$, где c_i, $i\leqslant s-1$, — четные элементарные слова, а элементарное слово c_s нечетно.

Множество всех блоков обозначим через B. Это множество можно отождествить с множеством B' конечных слов вида $b'=k_1\cdots k_s$, $k_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, таких, что если $s=1$, то k_1 — нечетное число, а если $s>1$, то $k_1,\dots,k_{s-1}$ — четные числа, а k_s нечетно.

Длина блока b с $b'=k_1\cdots k_s$ равна $\phi(b)=k_1+\dots+k_s+2s$. Соответствие $b\to b'$ дает важную для нас параметризацию блоков. В [3] использовалась другая параметризация блоков.

Любое регулярное слово $x\in\widetilde{X}_0$ единственным образом разбивается на блоки $b_i(x)$, $i\in\mathbb{Z}$. Блок $b_1(x)$ начинается на месте с номером 1, блок $b_2(x)$ начинается после блока $b_1(x)$ и так далее. Блок $b_0(x)$ кончается на месте с номером 0, блок $b_{-1}(x)$ кончается перед блоком $b_0(x)$ и так далее.

Пусть $x\in\widetilde{X}_0$. Наименьшее натуральное число j, для которого $T^jx\in\widetilde{X}_0$, равно длине блока $b_1(x)$. Если обозначить длину блока $b_1(x)$ через $F(x)=\phi(b_1(x))$, то производный автоморфизм $S=T'\colon x\mapsto T^{F(x)}x$ есть сдвиг слова x на $F(x)$ влево.

Это преобразование множества регулярных слов было названо в [3] двусторонним золотым сдвигом. Ясно, что $b_i(x)=b_1(S^{i-1}(x))$, $i\in\mathbb{Z}$. Заметим, что мера $\tilde{\mu}_0$ на $\widetilde{X}_0$ инвариантна относительно золотого сдвига.

Из предыдущего построения ясно, что золотой сдвиг S можно отождествить со сдвигом $\widetilde{S}$ в пространстве $\widetilde{Z}=\{\tilde{z}=\cdots z_{-1}z_0z_1\cdots\}$ двусторонних слов с отмеченным первым местом и с алфавитом B. Изоморфизм дается правилом

$$x\mapsto\cdots b_{-1}(x)b_0(x)b_1(x)\cdots.$$

Введем функцию $\widetilde{F}(\tilde{z})=\phi(z_1(\tilde{z}))$, где длина блока $\phi(b)$ была определена выше.

Назовем слово $1(0)^{k+1}1$ элементарным циклом. Элементарный цикл называется нечетным, если k — нечетное число.

В [3] было введено подмножество $\widetilde{X}^{\mathrm{reg}}\subset\widetilde{X}$.

Определение. Подмножество $\widetilde{X}^{\mathrm{reg}}\subset\widetilde{X}$ — это подмножество слов $x=\cdots x_{-1}x_0x_1\cdots$, в которых встречается бесконечное число нечетных элементарных циклов как справа от места с номером 1, так и слева от этого места.

Подмножество $\widetilde{X}^{\mathrm{reg}}$ инвариантно относительно сдвига T и $\tilde{\mu}(\widetilde{X}^{\mathrm{reg}})=1$.

Специальный автоморфизм $\widehat{T}$, построенный по сдвигу $\widetilde{S}$ и функции $\widetilde{F}(\tilde{z})$ со значениями в множестве положительных целых чисел, есть преобразование пространства $\widehat{Z}$ пар $(\tilde{z},j)$, $j=0,\dots,F(\tilde{z})-1$, $\tilde{z}\in\widetilde{Z}$, определенное формулами

$$(\tilde{z},j)\mapsto(\tilde{z},j+1),$$

если $j<\widetilde{F}(\tilde{z})-1$, и $(\tilde{z},\widetilde{F}(\tilde{z})-1)\mapsto(\widetilde{S}\tilde{z},0)$.

Теорема 1 [3]. *Сдвиг T на пространстве $\widetilde{X}^{\mathrm{reg}}$ изоморфен специальному автоморфизму $\widehat{T}$ на пространстве $\widehat{Z}$. Изоморфизм задается формулой $T^jx\mapsto(\cdots b_{-1}(x)b_0(x)b_1(x)\cdots,j)$, $0\leqslant j\leqslant F(x)-1$, $x\in\widetilde{X}_0$.*

§ 3. Золотой сдвиг и инвариантная мера Эрдёша

Определим матрицы $M(k)$ формулой

$$M(k)=P(10)P^k(00)P(01),\qquad k=0,1,2,\dots.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Матрица $M(k)$ имеет следующий вид*:

$$M(k)=\begin{cases}M_o(n), & k=2n+1,\\ M_e(n), & k=2n,\end{cases}$$

где

$$M_o(n)=\begin{pmatrix}pq^{2n+2} & p^2q^{2n+1}\\ pq^{n+2}\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q} & p^2q^{n+1}\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}\end{pmatrix},$$

$$M_e(n)=\begin{pmatrix}pq^{2n+1} & p^2q^{2n}\\ pq^{n+2}\frac{p^{n}-q^{n}}{p-q} & p^2q^{n}\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Характеристический многочлен матрицы $P(00)$ равен $x^3-qx^2-pqx+pq^2$. Из теоремы Гамильтона–Кэли следует, что для последовательности $M(k)=P(10)(P(00))^kP(01)$, $k=0,1,2,\ldots$, справедливо рекуррентное соотношение

$$M(k+3)=qM(k+2)+pqM(k+1)-pq^2M(k), \qquad k=0,1,\ldots.$$

Непосредственная проверка показывает, что последовательность матриц

$$\widehat{M}(k)=\begin{cases}M_o(n), & k=2n+1,\\ M_e(n), & k=2n,\end{cases}$$

удовлетворяет тому же самому рекуррентному соотношению. Кроме того, опять же непосредственно, проверяется, что $M(0)=\widehat{M}(0)$, $M(1)=\widehat{M}(1)$, $M(2)=\widehat{M}(2)$. А это означает, что $M(k)=\widehat{M}(k)$, $k\geqslant 0$. Доказательство леммы закончено.

Матрицы $M_e(n)$ невырожденны, а матрицы $M_o(n)$ вырожденны. Матрицу $M_o(n)$ можно записать в следующем виде: $M_o(n)=u(n)v$, где

$$u(n)=\begin{pmatrix}q^{2n+1}\\ q^{n+1}\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}\end{pmatrix},$$

$v=(pq,p^2)$.

Рассмотрим множество B' конечных слов вида $b'=k_1\cdots k_s$, таких, что если $s=1$, то $k_1=2n_1+1$, а если $s>1$, то $k_j=2n_j$, $j\leqslant s-1$, и $k_s=2n_s+1$.

Для любого блока $b\in B$ с $b'=k_1\cdots k_s$ положим

$$M(b)=M(k_1\cdots k_s)=M(k_1)\cdots M(k_s)=M_e(n_1)\cdots M_e(n_{s-1})M_o(n_s).$$

Введем обозначения $u(b)=u(n_s)$, $M_e(b)=M_e(n_1)\cdots M_e(n_{s-1})$ при $s>2$, а при $s=1$ $M_e(b)$ — единичная матрица. Тогда

$$M(b)=M_e(b)u(b)v.$$

Положим также

$$p(b)=vM_e(b)u(b).$$

Вычислим распределение случайной величины $b_1(x)$ на множестве $\widetilde{X}_0$ с мерой $\tilde{\mu}_0$,

$$\tilde{\mu}_0(\{x\in\widetilde{X}_0 : b_1(x)=b\}).$$

Из определения меры $\tilde\mu_0$ следует, что

$$\begin{aligned}\tilde\mu_0(\{x\in\widetilde X_0 : b_1(x)=b\}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde\mu(\{x\in\widetilde X_0 : y_0(x)=2n+1,\, b_1(x)=b\})}{\tilde\mu(\widetilde X_0)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{l(1)u(n)vM(b)r(1)}{\tilde\mu(\widetilde X_0)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{l(1)u(n)vM_e(b)u(b)vr(1)}{\tilde\mu(\widetilde X_0)}\\ &= vM_e(b)u(b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{l(1)u(n)vr(1)}{\tilde\mu(\widetilde X_0)}\\ &= vM_e(b)u(b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde\mu(\{x\in\widetilde X_0 : y_0(x)=2n+1\})}{\tilde\mu(\widetilde X_0)} = p(b).\end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\sum_{b\in B}p(b)=1$.

Так как золотой сдвиг S сохраняет меру $\tilde\mu_0$ на $\widetilde X_0$, то случайные величины $b_i(x)=b_1(S^{i-1}x)$, $i\in\mathbb Z$, одинаково распределены и

$$\tilde\mu_0(\{x\in\widetilde X_0 : b_i(x)=b\})=p(b).$$

Аналогично вычисляется совместное распределение случайных величин

$$b_1(x),\dots,b_m(x)$$

на множестве $\widetilde X_0$ с мерой $\tilde\mu_0$,

$$\begin{aligned}&\tilde\mu_0(\{x\in\widetilde X_0 : b_1(x)=b^1,\dots,b_m(x)=b^m\})\\ &\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde\mu_0(\{x\in\widetilde X_0 : y_0(x)=2n+1,\, b_1(x)=b^1,\dots,b_m(x)=b^m\})\\ &\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{l(1)u(n)vM_e(b^1)u(b^1)vM_e(b^2)u(b^2)\cdots vM_e(b^m)u(b^m)vr(1)}{\tilde\mu(\widetilde X_0)}\\ &\quad=p(b^1)\cdots p(b^m).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что одинаково распределенные случайные величины $b_j(x)$, определенные на $\widetilde X_0$ с мерой $\tilde\mu_0$, независимы.

На пространстве $\widetilde Z$ будем рассматривать меру Бернулли $\hat\nu$ с одномерным распределением

$$p(b)=\hat\nu(\{\tilde z : z_j=b\})=vM_e(b)u(b),\qquad b\in B,\ j\in\mathbb Z.$$

Напомним, что $F(x)=\phi(b_1(x))$, $\widetilde F(\tilde z)=\phi(z_1(\tilde z))$.

Инвариантная мера $\hat\mu$ для специального автоморфизма $\widehat T$ на множестве пар $\{(\tilde z,j),\ \tilde z\in\widetilde Z,\ 0\leqslant j\leqslant\widetilde F(\tilde z)-1\}$ определяется следующим образом. Множество пар $(\tilde z,0)$, $\tilde z\in\widetilde Z$, можно отождествить с множеством $\widetilde Z$, на котором определена мера $\hat\nu$. Тогда мера $\hat\mu$ задается формулой

$$\int f(\tilde z,j)\,d\hat\mu(\tilde z,j)=\frac{\int\sum_{j=0}^{\widetilde F(\tilde z)-1}f(\tilde z,j)\,d\hat\nu(\tilde z)}{\int\widetilde F(\tilde z)\,d\hat\nu(\tilde z)}.$$

Теорема 2. *Сдвиг T на подмножестве $\widetilde{X}^{\mathrm{reg}}$ с инвариантной мерой Эрдёша изоморфен специальному автоморфизму $\widehat{T}$ с мерой $\hat{\mu}$ Изоморфизм задается формулой $T^j x \mapsto (\cdots b_{-1}(x) b_0(x) b_1(x) \cdots, j)$, $0 \leqslant j \leqslant F(x)-1$, $x \in \widetilde{X}_0$.*

Доказательство теоремы 2 легко следует из предыдущего.

Из этой теоремы при $p = 1/2$ сразу получается один из основных результатов работы [3]. Таким образом, в частности, мы дали новое его доказательство.

§ 4. Вероятности блоков и переход к двоичным словам

Для вероятностей блоков b с $b' = k_1 \cdots k_s$, $k_j = 2n_j$, $j < s$, $k_s = 2n_s + 1$, была получена формула
$$p(b) = v M_e(b) u(n_s).$$
Если $s = 1$, то
$$M_e(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
и при $s \geqslant 2$
$$M_e(b) = M_e(n_1) \cdots M_e(n_{s-1}).$$

Введем функцию $[n]_\alpha = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}$, $\alpha = p/q$, и матрицу
$$A(n) = \begin{pmatrix} \alpha[n+1]_\alpha & [n]_\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что
$$A(n) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$
Это соотношение будет использовано дальше.

Перепишем формулу для $p(b)$ в другом виде, используя соотношение
$$C M_e(n) C = p q^{2n+1} A(n), \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $s \geqslant 2$
$$\begin{aligned} p(b) &= v M_e(n_1) \cdots M_e(n_{s-1}) u(n_s) \\ &= p^{s-1} q^{k_1 + \cdots + k_{s-1} + s - 1} v C A(n_1) \cdots A(n_{s-1}) C u(n_s). \end{aligned}$$
Легко проверить, что $C u(n_s) = q^{2n_s+1} (1/\alpha) A(n_s) (1,0)^\top$. Поэтому
$$p(b) = p(n_1 \cdots n_s) = \alpha^{s-1} q^{\phi(b)} (\alpha, 1) A(n_1) \cdots A(n_s) (1,0)^\top,$$
$$\phi(b) = k_1 + \cdots + k_s + 2s.$$

Получим теперь еще одну форму записи для $p(n_1 \cdots n_s)$ с переходом к двоичным словам.

Введем матрицы
$$\widetilde{M}(0) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{M}(1) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}.$$
Тогда
$$\alpha A(n) = (\widetilde{M}(0))^n \widetilde{M}(1).$$

Положим $u=(\alpha,\alpha)^\top$. Напомним, что по определению $q=1/(1+\alpha)$. Поэтому

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^{\phi(b)}p(b)&=\alpha^{s-1}(\alpha,1)A(n_1)\cdots A(n_s)(1,0)^\top\\&=(\alpha,1)\widetilde{M}(0)^{n_1}\widetilde{M}(1)\cdots\widetilde{M}(0)^{n_{s-1}}\widetilde{M}(1)\widetilde{M}(0)^{n_s}\widetilde{M}(1)(1,0)^\top/\alpha\\&=(\alpha,1)\widetilde{M}(0)^{n_1}\widetilde{M}(1)\cdots\widetilde{M}(0)^{n_{s-1}}\widetilde{M}(1)\widetilde{M}(0)^{n_s}u=(\alpha,1)\widetilde{M}(b)u.\end{aligned}$$

В этой формуле

$$\widetilde{M}(b)=\widetilde{M}(0)^{n_1}\widetilde{M}(1)\cdots\widetilde{M}(0)^{n_{s-1}}\widetilde{M}(1)\widetilde{M}(0)^{n_s}.$$

Обозначим через D_{n-1}, $n=1,2,\dots$, множество всех двоичных слов длины $n-1$. Множество D_1 состоит из одного пустого слова. Сопоставим слову b с $b'=(2n_1)\cdots(2n_s+1)$ и $n_1+\dots+n_s+s=n$, $n\geqslant 2$ (длина блока b равна $2n+1$), двоичное слово $d\in D_{n-1}$ по правилу $d=i_1\cdots i_{n-1}=(0)^{n_1}1\cdots(0)^{n_{s-1}}1(0)^{n_s}$. Если в этом слове $n_i=0$, то $(0)^{n_i}$ не пишется.

Произведение матриц, отвечающее этому двоичному слову, имеет вид $\widetilde{M}(d)=\widetilde{M}(i_1)\cdots\widetilde{M}(i_{n-1})=\widetilde{M}(b)$. Пустому слову с $n=1$ соответствует единичная матрица.

Итак, для любого слова b с $b'=(2n_1)\cdots(2n_s+1)$ и с длиной $\phi(b)=2n+1$

$$p(b)=(\alpha,1)\widetilde{M}(b)(\alpha,\alpha)^\top q^{2n+1}.$$

§5. Производящая функция длины блока

Производящая функция длины блока $\phi(b)$ — это

$$\begin{aligned}\Phi(z)=\sum_b p(b)z^{\phi(b)}&=\sum_b(\alpha,1)\widetilde{M}(b)(\alpha,\alpha)^\top q^{2n+1}z^{\phi(b)}\\&=\sum_{n=1}\sum_{d\in D_{n-1}}(\alpha,1)\widetilde{M}(d)(\alpha,\alpha)^\top q^{2n+1}z^{2n+1}\\&=q^3z^3(\alpha,1)(\mathrm{Id}-q^2z^2\widetilde{M})^{-1}(\alpha,\alpha)^\top,\end{aligned}$$

где $\widetilde{M}=\widetilde{M}(0)+\widetilde{M}(1)$, Id — единичная матрица.

Отсюда получаем

$$\Phi(z)=\frac{pqz^3}{1-(1-pq)z^2}\,.$$

Зная производящую функцию длины блока, находим теперь математическое ожидание длины блока

$$\mathrm{E}\,\phi(\,\cdot\,)=\Phi'(1)=1+\frac{2}{pq}\,.$$

Разложим $\Phi(z)$ в ряд:

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}pq(1-pq)^{n-1}z^{2n+1}.$$

Отсюда получаем, что вероятность того, что длина блока равна $2n+1$, равна $pq(1-pq)^{n-1}$.

§6. Формула для вычисления энтропии

В этом параграфе мы используем при определении энтропии двоичные логарифмы. Как было показано,

$$p(b)=\frac{1}{(1+\alpha)^{\phi(b)}}(\alpha,1)\widetilde{M}(b)(\alpha,\alpha)^\top.$$

Поэтому

$$\log_2 p(b)=-\phi(b)\log_2(1+\alpha)+\log_2(\alpha,1)\widetilde{M}(b)(\alpha,\alpha)^\top$$

и, значит,

$$\mathrm{E}(-\log_2 p(\,\cdot\,))=\log_2(1+\alpha)\,\mathrm{E}\,\phi(\,\cdot\,)-\mathrm{E}(\log_2(\alpha,1)\widetilde{M}(\,\cdot\,)(\alpha,\alpha)^\top).$$

Из теоремы 2 и формулы Абрамова [7] для энтропии специального автоморфизма следует, что энтропия инвариантной меры Эрдёша равна

$$\begin{aligned}H&=\frac{\mathrm{E}(-\log_2 p(\,\cdot\,))}{\mathrm{E}\,\phi(\,\cdot\,)}\\&=\log_2(1+\alpha)\\&\quad-\frac{1}{\mathrm{E}\,\phi(\,\cdot\,)}\sum_{n=1}^\infty\biggl[\sum_{b\in B_n}\log_2((\alpha,1)\widetilde{M}(b)(\alpha,\alpha)^T)(\alpha,1)\widetilde{M}(b)(\alpha,\alpha)^\top\biggr]\frac{1}{(1+\alpha)^{2n+1}}\,.\end{aligned}$$

Ранее было подсчитано, что

$$\mathrm{E}\,\phi(\,\cdot\,)=1+\frac{2}{pq}=1+\frac{2(1+\alpha)^2}{\alpha}\,.$$

Пусть B_n — множество слов b с $b'=(2n_1)\cdots(2n_s+1)$, $n_1+\dots+n_s+s=n$. Введем обозначение

$$k_n=\sum_{b\in B_n}\log_2((\alpha,1)\widetilde{M}(b)(\alpha,\alpha)^\top)((\alpha,1)\widetilde{M}(b)(\alpha,\alpha)^\top),$$

или

$$k_n=\sum_{d\in D_{n-1}}\log_2((\alpha,1)\widetilde{M}(d)(\alpha,\alpha)^\top)((\alpha,1)\widetilde{M}(d)(\alpha,\alpha)^\top).$$

Тогда

$$H=\log_2(1+\alpha)-\frac{1}{1+\frac{2(1+\alpha)^2}{\alpha}}\sum_{n=1}^\infty k_n\biggl(\frac{1}{1+\alpha}\biggr)^{2n+1}.$$

Справедливо следующее: энтропия H при замене α на $1/\alpha$ не меняется. Это следует из формулы для энтропии, поскольку при замене α на $1/\alpha$ матрицы $\widetilde{M}(0)$, $\widetilde{M}(1)$ переходят соответственно в матрицы

$$\frac{1}{\alpha^2}C\widetilde{M}(1)C,\quad \frac{1}{\alpha^2}C\widetilde{M}(0)C,\quad C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Другое доказательство основано на том, что замене α на $1/\alpha$ отвечает переход от случайной величины $\rho\zeta=\zeta_1\rho^2+\zeta_2\rho^3+\cdots$ к случайной величине $1-\rho\zeta$, и поскольку хаусдорфова размерность множества не меняется при изометрии $x\mapsto 1-x$, $x\in[0,1]$, то из исходного определения хаусдорфовой размерности меры следует наше утверждение. Конечно, ряд для $\alpha>1$ сходится быстрее. Ниже мы используем указанный факт при вычислении хаусдорфовой размерности.

При $q=1/2$

$$H=1-\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}k_n\frac{1}{2^{2n+1}}\,.$$

Заметим, что формула для хаусдорфовой размерности $H/\log_2\beta$ инвариантной меры Эрдёша на компакте Фибоначчи совпадает с формулой Александера–Цагира для хаусдорфовой размерности меры Эрдёша на прямой. Формула Александера–Цагира в [4] была получена с помощью комбинаторики евклидова дерева. Видимо, наша формула отвечает комбинаторике α-евклидова дерева.

Основная трудность при вычисление H состоит в том, что соответствующий ряд сходится так медленно, что непригоден для численного счета. Следуя подходу Александера–Цагира [4], мы преобразуем этот ряд для ускорения сходимости. Положим

$$\mu_n=k_n-[3]_\alpha k_{n-1}.$$

Тогда

$$(1-[3]_\alpha x)\sum_{n=1}^{\infty}k_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_nx^n.$$

Пусть

$$\lambda_n=2\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2}+\mu_n-[3]_\alpha\mu_{n-1}.$$

Справедливы следующие соотношения между рядами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_nx^n=\frac{1}{1-[3]_\alpha x}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_nx^n,$$

$$(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nx^n=(1-[3]_\alpha x)\sum_{n=1}^{\infty}\mu_nx^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_nx^n=\frac{(1-x)^2}{(1-[3]_\alpha x)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nx^n.$$

Используя последнее соотношение и полагая $x=1/(1+\alpha)^2$, получаем

$$H=\log_2(1+\alpha)-\frac{\alpha(2+\alpha)}{(1+2\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{2n+1}.$$

Этот ряд сходится намного быстрее исходного.

§7. Результаты вычислений

В следующей таблице приведены значения $H_{\dim}=H/\log_2\beta$ хаусдорфовой размерности инвариантной меры Эрдёша на компакте Фибоначчи.

В таблице во втором столбце приводятся значения хаусдорфовой размерности меры Эрдёша при разных значениях p. В третьем столбце показано, сколько взято членов ряда в формуле для этой размерности. В четвертом столбце приводятся результаты вычислений Лалли.

p	$H_{\dim}$	n	Лалли
0.05	0.392167680782199076	15	0.3877 ± 0.03
0.05	0.392167680782199076	14	
0.1	0.6101383374950678578	20	0.6085 ± 0.008
0.1	0.6101383374950678578	19	
0.2	0.849903398027151976	23	0.8499 ± 0.004
0.2	0.849903398027151972	22	
0.3	0.9513889802259870	24	0.9501 ± 0.002
0.3	0.9513889802259869	23	
0.4	0.9875456832532938	25	0.9868 ± 0.001
0.4	0.9875456832532931	24	
0.5	0.995713126685555526	24	0.9954 ± 0.0008
0.5	0.9957131266855555560	23	

Литература

[1] З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, *Меры Эрдёша, софические меры и марковские цепи*, Зап. научн. сем. ПОМИ (Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгебраические методы, XIII), **327** (2005), 27–45.

[2] П. Биллингслей, *Эргодическая теория и информация*, Мир, М., 1969.

[3] N. Sidorov, A. Vershik, *Ergodic properties of the Erdos measures*, *the entropy of the goldenshift*, *and related problems*, Monatsh. Math., **126**:3 (1998), 215–261.

[4] J. C. Alexander, D. Zagier, *The entropy of certain infinitely convolved Bernoulli measure.*, J. London Math. Soc., **44**:1 (1991), 121–134.

[5] S. P. Lalley, *Random series in powers of algebraic integers*: *Hausdorff dimension of the limit distribution*, J. London Math. Soc. (2), **57**:3 (1998), 628–654.

[6] De-Jun Feng, *The limited Rademacher function and Bernoulli convolutions associated with Pisot numbers*, Adv. Math., **195**:1 (2005), 24–101.

[7] Л. М. Абрамов, *Энтропия индуцированного автоморфизма*, Докл. АН СССР, **128** (1959), 647-650.

Московский институт электроники и математики
e-mail: bejaeva@comtv.ru

Поступило в редакцию
22 августа 2008 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: oseled@gmail.com