

О количестве граничных классов в задаче о 3-раскраске

© 2009 г. Д. С. Малышев

Понятие граничного класса — полезный инструмент изучения сложности экстремальных задач на графах. В настоящее время известны один граничный класс для задачи о независимом множестве и три граничных класса для задачи о доминирующем множестве. В настоящей работе доказывается бесконечность множества граничных классов для задачи о 3-раскраске.

1. Введение

Задача о 3-раскраске (то есть задача распознавания существования правильной раскраски вершин графа в три цвета) является трудной, то есть она NP -полна в классе всех графов G , и остается таковой даже при значительных сужениях этого класса. Так, она NP -полна в классе планарных графов [1] и в классе графов со степенями вершин, не большими четырех [2]. Классы графов, для которых задача о 3-раскраске является NP -полной, будем называть $3P$ -сложными. С другой стороны, в некоторых специальных классах, таких как совершенные графы [3], графы со степенями вершин не более трех, эта задача полиномиально разрешима. Мы будем называть такие классы $3P$ -простыми.

Класс графов X называется наследственным, если он замкнут относительно удаления вершин. Каждый наследственный (и только наследственный) класс определяется множеством своих запрещенных порожденных подграфов Y , в этом случае принята запись $X = \text{Free}(Y)$. При этом, если Y конечно, то X называется конечно определенным.

Один из общих подходов к исследованию сложности экстремальных задач на графах основан на понятии граничного класса. Это понятие было введено в работе [4] для задачи о независимом множестве. В этой работе было доказано, что задача о независимом множестве является NP -трудной тогда и только тогда, когда в нем не содержится никакой граничный класс. Там же было доказано, что некоторый конкретный класс является граничным для задачи о независимом множестве и выдвинута гипотеза о единственности этого класса. Это утверждение пока не доказано, наиболее значительные результаты на пути к доказательству этой гипотезы получены в работах [5] и [7]. В [7] исследовалась сложность задачи о доминирующем множестве и было доказано, что для этой задачи существует не менее трех граничных классов.

В настоящей работе рассматриваются граничные классы для задачи о 3-раскраске. Наследственный класс графов X называется предельным, если существует бесконечная последовательность $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ таких наследственных $3P$ -сложных классов графов,

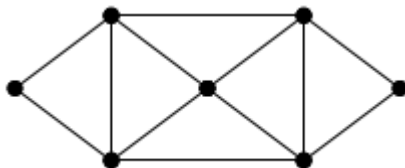


Рис. 1.

что

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = X.$$

Минимальный предельный класс называется граничным. Для граничных классов задачи о 3-раскраске легко доказывается аналог теоремы 3 из работы [4].

Теорема 1. *Конечно определенный класс графов является 3Р-сложным тогда и только тогда, когда он содержит какой-нибудь граничный класс.*

Таким образом, знание всех граничных классов позволило бы полностью охарактеризовать все конечно определенные 3Р-сложные классы. В отличие от задач о независимом множестве и о доминирующем множестве, для задачи о 3-раскраске в настоящее время неизвестно ни одного граничного класса. В настоящей работе доказывается, что для задачи о 3-раскраске множество граничных классов бесконечно.

В статье приняты следующие обозначения и определения: $[K]$ — наследственное замыкание класса K , то есть класс всех графов, изоморфных порожденным подграфам графов из K ; K^+ — множество графов, у которых каждая из компонент связности принадлежит классу K ; граф называется k -субрегулярным, если степени всех его вершин не превосходят k .

2. О некоторых предельных классах

Будем называть $(1, 0)$ -гирляндой граф $K_4 - e$, а $(0, 1)$ -гирляндой — граф, изображенный на рис. 1.

Назовем (i, j) -гирляндой граф, полученный из простого пути P_{i+j} заменой первых i ребер на $(1, 0)$ -гирлянду и заменой последующих j ребер на $(0, 1)$ -гирлянду (см. рис. 2). При этом вершину a такой (i, j) -гирлянды будем называть первой, а вершину b последней вершинами.

Введем понятие (i, j) -преобразования. Пусть окрестность вершины v состоит из четырех вершин x_1, x_2, x_3, x_4 , причем порожденный ими граф содержит ровно два ребра (x_1, x_2) и (y_1, y_2) . Применение (i, j) -преобразования к вершине v состоит в следующем:

- (1) вершину v графа заменяем на две вершины v_1 и v_2 , вершину v_1 соединяем ребрами с вершинами x_1, x_2 , а вершину v_2 с вершинами y_1, y_2 ;
- (2) вершину v_1 отождествляем с первой вершиной (i, j) -гирлянды, а вершину v_2 — с последней вершиной (i, j) -гирлянды.

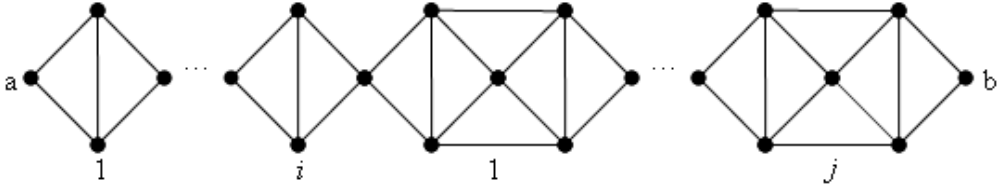


Рис. 2.

Пусть G — 4-регулярный граф класса $\text{Free}(K_{1,3}, K_4, K_4 - e)$. Ясно, что окрестность любой вершины v графа G представляет собой граф $2K_2$. Для графа (i, j) -преобразование получается в результате последовательного применения (i, j) -преобразования к вершинам, окрестности которых изоморфны графу $2K_2$ и которые не содержатся в порожденном подграфе $K_4 - e$. Понятно, что (i, j) -преобразование графа из рассматриваемого класса определяется однозначно (так как все “новые” вершины, то есть вершины, принадлежащие добавляемым гирляндам, принадлежат порожденным подграфам $K_4 - e$).

Обозначим $G(i, j)$ граф, получаемый (i, j) -преобразованием из G . Для удобства будем считать, что вершины графа $G(i, j)$ разбиты на два типа, к первому типу относятся $2|V(G)|$ вершин, которыми были заменены вершины графа G , ко второму типу относятся все остальные вершины, то есть вершины добавляемых гирлянд, кроме первых и последних вершин. Все множество таким образом сформированных графов обозначим через $S(i, j)$.

Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. При любых натуральных i и j граф $G(i, j)$ является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда граф G является 3-раскрашиваемым.

Через $DT(i, j)$ будем обозначать граф, получаемый из трех копий (i, j) -гирлянды отождествлением их первых вершин с тремя различными вершинами графа C_3 так, как показано на рис. 3.

Пусть

$$T_i = \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} \{DT(i, j)\} \right]^+.$$

Лемма 2. Для любого натурального i класс T_i является предельным.

Доказательство. Известно, что 4-регулярные графы класса $\text{Free}(K_{1,3}, K_4, K_4 - e)$ образуют 3P-сложный класс [2]. Отсюда и из леммы 2 следует, что для любых натуральных i и j класс $S(i, j)$ является 3P-сложным. Пусть

$$S^*(i, s) = \left[\bigcup_{j=s}^{\infty} S(i, j) \right].$$

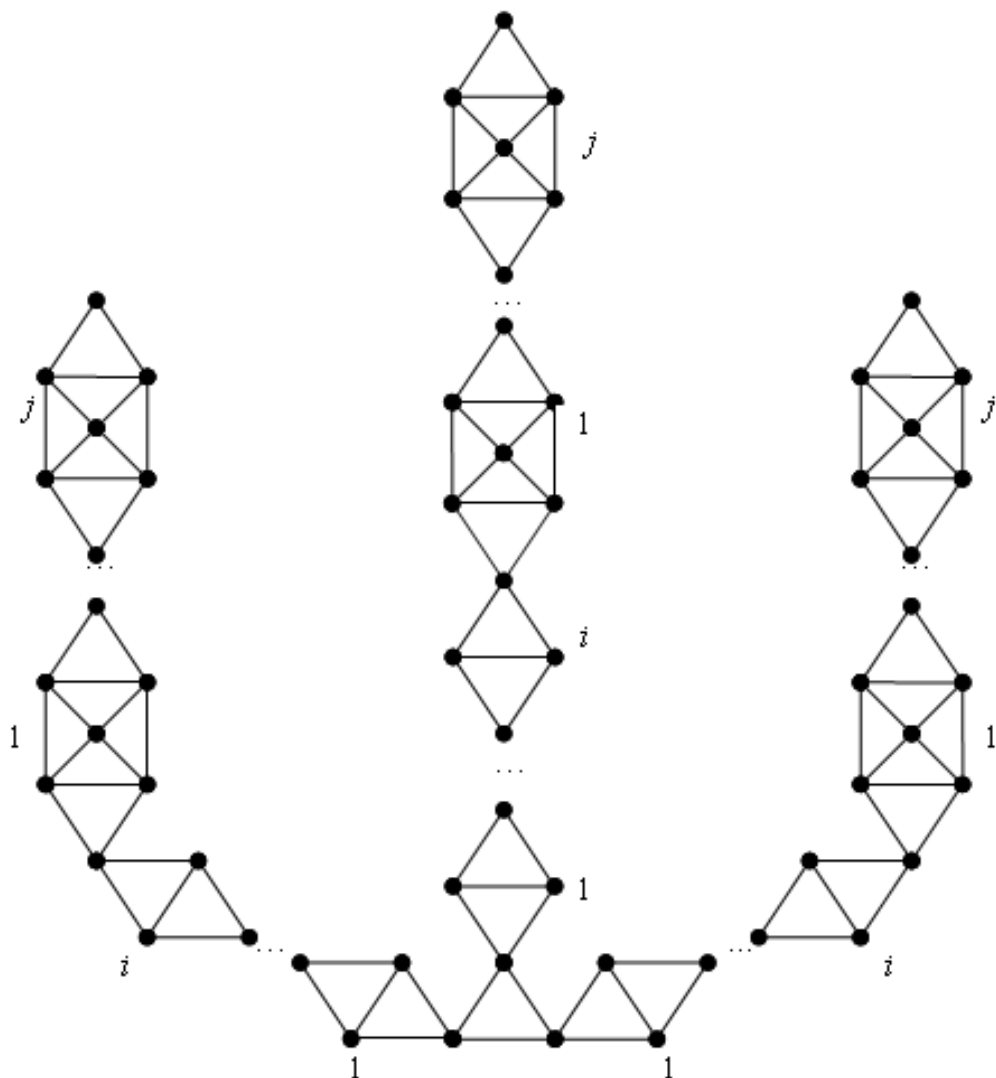


Рис. 3.

Ясно, что для любых i и s класс $S^*(i, s)$ является $3P$ -сложным. Класс

$$L_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} S^*(i, j)$$

является предельным. Пусть некоторый класс G^* принадлежит L_i . Покажем, что для некоторой бесконечной последовательности $j_d \rightarrow \infty$ граф G^* является графом, порожденным в некотором графе $G_d \in S(i, j_d)$. Так как $G^* \in L_i$, ясно, что $G^* \in S^*(i, 1)$, $G^* \in S^*(i, 2)$, $\dots$ Таким образом, для некоторых графов $G_1 \in \bigcup_j S(i, j)$, $G_2 \in \bigcup_j S(i, j)$, $\dots$ и для любого d граф G^* является порожденным графом в G_d . По определению объединения, для любого d существует такое $j_d \geq d$, что $G_d \in S(i, j_d)$.

Отсюда следует, что в каждой из компонент связности G^* не существует двух несмежных вершин первого типа. Таким образом, $G^* \in T_i$, то есть $L_i \subseteq T_i$. С другой стороны, $S^*(i, s) \supseteq T$ для любого s , поэтому $L_i \supseteq T_i$. Из полученных двух включений получаем, что $L_i = T_i$.

3. О бесконечности множества граничных классов

Пусть X — некоторый наследственный класс графов и $F(X)$ — множество графов класса X , не содержащих вершин степеней 0, 1, 2.

Пусть $G \in X$ и G имеет вершину v степени не выше 2, $G' = G - v$. Очевидно, граф G является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда G' — 3-раскрашиваемый граф. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Если класс X является 3P-сложным, то класс $[F(X)]$ также является 3P-сложным.

Лемма 4. Пусть B — граничный класс и граф $G_1 \in B$ содержит вершину x степени не выше 2. Тогда существует такой граф $G_2 \in B$, что G_1 является порожденным подграфом графа G_2 ,

$$|V(G_2)| - |V(G_1)| < 4,$$

и вершина x в графе G_2 имеет степень не менее 3.

Доказательство. Так как B — граничный класс, существуют такие наследственные 3P-сложные классы $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$, что

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B.$$

Пусть

$$B'_i = [f(B_i)].$$

Ясно, что $B'_1 \supseteq B'_2 \supseteq \dots$ и класс B'_i является 3P-сложным. Поэтому, если

$$B' = \bigcap_{i=1}^{\infty} B'_i,$$

то класс B' является предельным для задачи о 3-раскраске. Так как $B' \subset B_i$ для любого i , включение $B' \subset B$ верно, но B — минимальный предельный класс, поэтому $B' = B$.

Пусть G_1 — граф из класса B такой, что в нем существует вершина x степени не более 2. Тогда $G_1 \in B'_1, G_1 \in B'_2, \dots$. По построению класса B'_i для любого i существует такой граф $G_2^i \in B'_i$, что G_1 порожден в G_2^i ,

$$|V(G_2^i)| - |v(G_1)| < 4,$$

вершина x имеет степень, не меньшую 3. Пусть

$$K = \{G_2^1, G_2^2, \dots\}.$$

Очевидно, что K — конечное множество. Поэтому существует граф G_2 , принадлежащий B'_s для бесконечно многих значений s . Отсюда и из включений $B'_1 \supset B'_2 \supset \dots$ следует, что $G_2 \in B'_i$ для любого i , то есть $G_2 \in B$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2. Для задачи о 3-раскраске множество граничных классов является бесконечным.

Доказательство. Предположим противное, то есть предположим, что для задачи о 3-раскраске множество граничных классов конечно. Тогда для некоторой бесконечной монотонно возрастающей последовательности $\{j_s\}$ некоторый граничный класс B содержится в каждом из классов T_{j_s} . Пусть G — граф класса B , являющийся максимальным порожденным подграфом графа $DT(j_1 + 1, 0)$. Граф $DT(j_1 + 1, 0)$ содержит ровно три вершины степени 2, которые обозначим v_1, v_2, v_3 . Если G является собственным порожденным подграфом графа $DT(j_1 + 1, 0)$, то в G существует вершина степени не выше двух, отличная от v_1, v_2, v_3 . Тогда из леммы 5 и включения

$$B \subseteq \bigcap_{s=1}^{\infty} T_{j_s}$$

следует, что существует такой порожденный подграф $G^* \in B$ графа $DT(j_1 + 1, 0)$, что G является собственным порожденным подграфом графа G^* . Получаем противоречие с максимальностью G . Если $G = DT(j_1 + 1, 0)$, то из включения $B \subseteq T_{j_s}$ следует, что при добавлении к G любой вершины y , смежной с v_1 , образуется либо ребро (y, u_1) , либо ребро (y, u_2) , где u_1 и u_2 — вершины графа $DT(j_1 + 1, 0)$, смежные с v_1 . При этом получающийся граф не принадлежит классу B . Таким образом, для $G_1 = G$ и его вершины $x = v_1$ в классе B не существует такого графа G_2 , что G_1 является в G_2 порожденным,

$$|V(G_2^I)| - |v(G_1)| < 4,$$

а вершина x имеет степень, не меньшую 3. Получаем противоречие с утверждением предыдущей леммы. Таким образом, для задачи о 3-раскраске множество граничных классов является бесконечным.

Список литературы

1. Stockmeyer L., Planar 3-colourability is polynomial complete. *ACM SIGACT News* (1973) **5**, №3, 19–25.
2. Kochol M., Lozin V., Randerath B., The 3-colourability problem on graphs with maximum degree four. *SIAM J. Comput.* (2003) **32**, №5, 1128–1139.
3. Grötschel M., Lovász L., Schrijver A., The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica* (1981) **1**, №2, 169–197.
4. Alekseev V. E., On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem. *Discrete Appl. Math.* (2004) **132**, №1–3, 17–26.
5. Alekseev V. E., A polynomial algorithm for finding largest independent sets in fork-free graphs. *Discrete Appl. Math.* (2004) **135**, №1–3, 3–16.
6. Малышев Д. С., Граничные классы для задачи о независимом множестве в классе планарных графов. *Вестник Нижегородского государственного ун-ва им. Н. И. Лобачевского* (2007) №2, 165–169..
7. Alekseev V. E., Korobitsyn D. V., Lozin V. V., Boundary classes of graphs for the dominating set problem. *Discrete Math.* (2004) **285**, №1–3, 1–6.

Статья поступила 8.01.2008.