А.В.Матвеенко
Center for Economic Research and Graduate Education – Economics Institute (CERGE-EI),
В.Д. Матвеенко
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург

ВЫБОР ТЕХНОЛОГИИ, ПОРОЖДАЮЩИЙ НОРМАЛИЗОВАННЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ CES-ФУНКЦИИ[1]

Введение

Производственная функция с постоянной эластичностью замещения (CES) — основной инструмент при анализе производства и его эффективности. Однако разные спецификации производственных CES-функций существенно различаются по своим свойствам (см. [Martemyanov, Matveenko, 2014]). Это приводит к неробастности результатов в ряде моделей производства, экономического роста и международной торговли в зависимости от выбора формы производственной функции.

В работе [Klump, La Gandville de, 2000] введены семейства нормализованных производственных CES-функций (далее — NCESF). Как отмечается в статье [Klump, Saam, 2008], нормализация необходима для того, чтобы избежать «произвольных и противоречащих друг другу результатов». NCESF стали популярным инструментом исследований (см. обзор [Klump et al., 2012]). В частности, с их помощью изучается влияние эластичности замещения на темп роста и переходную динамику в моделях экономического роста, на ставку заработной платы, на эффект перераспределения богатства при реформах, на условия локальной неопределенности равновесия в модели делового цикла, анализируется динамика доли труда в различных странах.

Хотя NCESF активно применяются уже в течение 15 лет, работа по построению микрооснований этого класса производственных функций только началась. NCESF встречают критику, которая связана, в частности, с отсутствием интерпретации «отправной точки» семейства функций [Temple, 2012]. Кроме того, сомнительна сама идея обеспечить робастность результатов простым исключением «неудобных» спецификаций производственной CES-функции из рассмотрения. Несмотря на бум, связанный с

[1] Работа выполнена при поддержке Карлова университета в Праге (грант SVV 260126) и РФФИ (проекты 14-01-00448 и 14-06-00253).

NCESF, многие авторы используют семейство производственных CES-функций вида $A(K^p + L^p)^{1/p}$, которое ненормализуемо и имеет иные свойства, чем NCESF.

В настоящей статье для анализа класса NCESF используется подход, связанный с представлением произвольной «глобальной» неоклассической производственной функции как решения задачи оптимального выбора «локальной» технологии из производственного меню, предложенный в работах [Rubinov, Glover, 1998; Matveenko, 1997; Jones, 2005].

В качестве основного объекта исследования предстает не производственная функция, а порождающее ее технологическое меню — двойственный объект, причем связанный не с обычной линейной, а с идемпотентной двойственностью[2]. Мы вводим понятие семейства нормализованных технологических меню, исследуем его свойства и получаем ряд новых свойств NCESF. Такой подход позволяет использовать прямое описание изменений производственных технологий. Мы получаем возможность оценить с точки зрения изменения технологий предположения касательно NCESF, которые не были ранее мотивированы; в частности, мы даем экономическую интерпретацию понятия «отправной точки».

1. Нормализованные производственные CES-функции

Семейства NCESF можно определить как обладающие следующими свойствами.

(a) Каждая NCESF имеет прототипную форму CES-функции

$$Y = A(\alpha K^p + (1-\alpha)L^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

где Y — выпуск, K — капитал, L — труд, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, $p < 1$, $p \neq 0$; параметры A, α могут зависеть от p. В силу постоянной отдачи от масштаба *экстенсивной* форме (1) соответствует *интенсивная* форма

$$y = A(\alpha k^p + 1 - \alpha)^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

где $y = Y/L$, $k = K/L$.

[2] Бинарная операция $\oplus$ на множестве M называется идемпотентной, если $a \oplus a = a$ для любого $a \in M$. Примерами являются $\oplus = \min$ и $\oplus = \max$. Идемпотентные операции играют центральную роль в тропической математике. По поводу применения тропической математики в экономическом анализе см. [Matveenko, 2014].

(б) Каждое семейство NCESF содержит функции при всевозможных значениях параметра p и соответственно при различных значениях эластичности замещения $\sigma = 1/(1-p)$.

(в) Для каждого семейства NCESF задана *точка нормализации (отправная точка)*, в которой функции семейства при всех p имеют одни и те же отправные значения $K_0, L_0, Y_0, MRTS = \mu_0$, где $MRTS = -dK/dL = (\partial F/\partial L)/(\partial F/\partial K)$ — предельная норма технического замещения.

Построение семейства NCESF. Будем использовать интенсивную прототипную форму. Тогда $\mu_0 = (1-\alpha)k_0^{1-p}/\alpha$, где $k_0 = K_0/L_0$. Отсюда $\alpha = 1/(1+\mu_0 k_0^{p-1})$,

$$y = A\left(\frac{k^p}{1+\mu_0 k_0^{p-1}} + 1 - \frac{1}{1+\mu_0 k_0^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} = A\left(\frac{k^p + \mu_0 k_0^{p-1}}{1+\mu_0 k_0^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3)$$

Вычисляем y_0 в точке нормализации, затем выражаем A и подставляем в (3). Получаем уравнения семейства NCESF в интенсивной форме

$$y = y_0\left(\pi\left(\frac{k}{k_0}\right)^p + 1 - \pi\right)^{\frac{1}{p}}$$

и в экстенсивной форме

$$Y = Y_0\left(\pi\left(\frac{K}{K_0}\right)^p + (1-\pi)\left(\frac{L}{L_0}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\pi = \dfrac{k_0}{k_0 + \mu_0} \in (0,1)$ не зависит от p.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для каждой функции семейства NCESF (при каждом p) в точке нормализации k_0 факторы получают доли, равные π и $1-\pi$. В любой точке $k > k_0$ ($k < k_0$) отношение долей капитала и труда возрастает (убывает) по p.*

Этот результат вполне соответствует подтверждаемому эмпирически для промышленно развитых стран (т.е. при достаточно больших k) факту увеличения в последние десятилетия эластичности замещения в сочетании с увеличением доли капитала.

Подход к CES-функциям на основе дифференциальных уравнений. Если функция $Y = F(K, L) = Lf(k)$, где $k = K/L$, имеет постоянную эластичность замещения, то она удовлетворяет уравнению

$$\sigma = \frac{1-e_f}{r_f}, \qquad (4)$$

где $e_f = f' \cdot k / f$ — эластичность функции f; $r_f = -f'' \cdot k / f'$ — ее «выпуклость»[3]. При заданном значении $\sigma \neq 1$ решением дифференциального уравнения второго порядка (4) является CES-функция в интенсивной форме

$$f(k) = \gamma_1 \left[k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2 \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \tag{5}$$

где γ_1 и γ_2 — постоянные интегрирования, вообще говоря, зависящие от σ. Формы (2) и (5) эквивалентны, $\gamma_1 = A\alpha^{1/p}$, $\gamma_2 = (1-\alpha)/\alpha$.

При $\sigma = 1$ решением уравнения (4) является интенсивная форма функции Кобба — Дугласа Ak^{α}. При $\gamma_2 = 0$ (5) — линейная функция. При $\sigma \to 0$ (5) сходится к функции Леонтьева.

Следует заметить, что (5) включает всевозможные семейства CES-функций, не обязательно NCESF. Например, при $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$ приходим к часто используемому семейству CES-функций $(K^p + L^p)^{\frac{1}{p}}$, которое не является семейством NCESF.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для каждого σ *существует единственное частное решение дифференциального уравнения* (*4*)*, которое соответствует заданным отправным значениям* k_0, y_0, μ_0 *и определяет NCESF.*

Индуцированное семейство NCESF. До сих пор отправные значения K_0, L_0, Y_0 и μ_0 выбирались произвольно и не были связаны между собой. Пусть задана некоторая функция $F(K, L)$, обладающая стандартными свойствами неоклассической производственной функции. Будем говорить, что семейство NCESF *индуцировано* функцией F в точке (K_0, L_0), если отправными значениями служат (K_0, L_0), а также

$$Y_0 = F(K_0, L_0), \quad \mu_0 = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}(K_0, L_0).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для индуцированного семейства NCESF коэффициенты* π *и* $1 - \pi$ *представляют собой доли факторов индуцирующей функции* F *в точке* (K_0, L_0).

Рассмотрим вопрос о наиболее предпочтительной точке нормализации. Пусть фиксирована некоторая корзина факторов (K, L) и задана индуцирующая функция F. Какую точку нормализации k_0 следует выбрать, чтобы функции индуцируемого семейства NCESF давали максимальный выпуск в точке (K, L)?

[3] Функция r_f известна как коэффициент Эрроу — Пратта относительной несклонности к риску.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если индуцирующая функция* F *является функцией Кобба — Дугласа или CES-функцией, то максимум индуцированных NCESF при каждом* $p < 0$ *достигается при* $k_0 = K/L$.

2. Производственная функция как результат оптимального выбора технологии из технологического меню

Представления производственных функций. Пусть имеется неоклассическая производственная функция $AF(K, L)$. Вклад факторов может быть идентифицирован на основе их предельных или средних производительностей. Соответственно имеется два представления производственной функции.

Первое представление:

$$AF(K,L) = \min_{(p_K, p_L) \in \Pi} (p_K K + p_L L). \tag{6}$$

Здесь $\Pi = \{(p_K, p_L)\}$ — некоторое множество цен факторов[4], порождающее функцию $AF(K, L)$

Второе представление[5]

$$AF(K,L) = \max_{(l_K, l_L) \in \Lambda} \min\{l_K K, l_L L\} \tag{7}$$

является моделью выбора технологии. Здесь $\min\{l_K K, l_L L\}$ — производственная функция Леонтьева[6]. Фирме (или стране) доступно множество леонтьевских «локальных» технологий — *технологическое меню* Λ, из которого она, располагая факторами производства (K, L), выбирает леонтьевскую технологию (l_K, l_L) так, чтобы максимизировать выпуск. Представление (7) соответствует той точке зрения, что лишь одна локальная технология может быть эффективно использована при существующем соотношении факторов производства[7].

---

4 Модель, предоставляющая микрооснования для уравнения, предложена в работе [Matveenko, 2013].

5 Это представление предложено в работах [Rubinov, Glover, 1998; Matveenko, 1997; Jones, 2005]. См. [Матвеенко, 2009; Matveenko, 2010].

6 Принципиальное различие между представлениями (6) и (7) состоит в том, что в (6) используется скалярное произведение $p_K K + p_l L$, тогда как (7) использует функцию Леонтьева $\min\{l_K K, l_L L\}$, которая является скалярным произведением в тропической математике с идемпотентной операцией $\oplus = \min$ (см. примеч. 2).

7 Эта точка зрения четко сформулирована в [Basu, Weil, 1998]: «каждая технология является подходящей для одного и только одного отношения капитала к труду».

Как доказано в работе [Matveenko, 2010], для всякой неоклассической производственной функции $AF(K, L)$ существует единственное технологическое меню, удовлетворяющее (7); оно имеет вид

$$\Lambda = \{(l_K, l_L) : AF\left(\frac{1}{l_K}, \frac{1}{l_L}\right) = 1\}.$$

Следующая теорема показывает, что технологии, формирующие технологическое меню, имеют простой смысл, который позволяет связать их с доступными макроэкономическими данными.

ТЕОРЕМА 1. *Элементами технологического меню являются все возможные пары средних производительностей капитала и труда, которые возможны в экономике при данном технологическом уровне A. Для каждой конкретной пары факторов* $(\tilde{K}, \tilde{L})$ *максимум в правой части равенства (7) достигается при той технологии* $(\tilde{l}_K, \tilde{l}_L) \in \Lambda$, *для которой леонтьевские коэффициенты производительности являются соответственно средними производительностями капитала и труда в экономике, т.е.*

$$\tilde{l}_K = \frac{AF(\tilde{K}, \tilde{L})}{\tilde{K}}, \ \tilde{l}_L = \frac{AF(\tilde{K}, \tilde{L})}{\tilde{L}}.$$

3. Технологические меню в моделях экономического роста

Напомним, что Солоу [Solow, 1956] считал привлечение неоклассических производственных функций для анализа экономического роста альтернативой использованию производственной функции Леонтьева. Представление (7) показывает, что наличие «глобальной» неоклассической производственной функции нисколько не отрицает присутствия «локальных» производственных функций Леонтьева. Наоборот, последние представляют собой «кирпичики», которые служат основой любой неоклассической производственной функции. Если используется глобальная производственная функция, то на каждом шаге модели экономического роста происходит выбор локальной леонтьевской технологии.

Траектории моделей экономического роста могут исследоваться в терминах технологического меню. Так, аналогом уравнения динамики капитала модели роста оказывается следующее уравнение, описывающее траекторию выбираемых из меню и используемых леонтьевских технологий $(l_K^t, l_L^t) \in \Lambda$:

Среди недавних публикаций, отстаивавающих данную точку зрения, отметим [Leon-Ledesma, Satchi, 2015].

$$\frac{l_L^{t+1}}{l_K^{t+1}}(1+n) = l_L^t\left(1+\frac{1-\delta}{l_K^t}\right)-c_t. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что на каждой стационарной траектории используется определенная леонтьевская технология $l=(l_K, l_L)\in\Lambda$, и душевое потребление равно

$$c(l) = l_L\left(1-\frac{\delta+n}{l_K}\right). \qquad (9)$$

Смысл равенства (9) состоит в том, что в стационарном состоянии из каждой единицы выпуска делаются расходы на амортизацию и создание новых рабочих мест, а остальное потребляется. Поскольку расходы $(\delta + n)$ отсчитываются с единицы капитала, коэффициент $1/l_K$ пересчитывает их в расходы с единицы выпуска. Условием неотрицательности потребления является неравенство $l_K \geq (\delta + n)$, которое означает продуктивность локальной технологии.

Золотому правилу Фелпса соответствует решение задачи выбора леонтьевской технологии, обеспечивающей максимальное душевое потребление (5): $\max\limits_{l\in\Lambda} c(l)$. Например, в случае функции Кобба — Дугласа $AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $0<\alpha<1$ имеем технологическое меню $\Lambda=\{l_K, l_L : l_K^{\alpha} l_L^{1-\alpha} = A\}$; в этом случае условие первого порядка задачи максимизации полезности сводится к тому, что используется та локальная технология, для которой $l_K = (\delta+n)/\alpha$. Тогда из (9) следует, что $c(l) = l_L(1-\alpha)$; это известное свойство стационара золотого правила: норма накопления равна $s = \alpha$.

Для модели Солоу с нормой накопления s имеет место сходимость к стационарной «локальной» технологии, для которой $l_K = (\delta+n)/s$. В случае производственной функции Кобба — Дугласа $AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $0<\alpha<1$ можно получить два уравнения, описывающие динамику локальной технологии для коэффициентов l_L^t и l_K^t по отдельности:

$$l_L^{t+1} = \left(\frac{A^{\frac{1}{\alpha}} s}{1+n} l_L^t + \frac{1-\delta}{1+n}(l_L^t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha},$$

$$l_K^{t+1} = \left[\frac{s}{1+n}(l_K^t)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \frac{1-\delta}{1+n}(l_K^t)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right]^{\alpha-1}.$$

4. Семейства нормализованных технологических меню

Семейство нормализованных технологических меню, соответствующее технологической отправной точке, может быть определено как множество технологических меню с различными значениями параметра q, которые обладают прототипной формой[8]

$$\beta l_K^{-q} + (1-\beta) l_L^{-q} = H = const,$$

где $0 < \beta < 1$, и для отправной технологии (l_{K0}, l_{L0}) имеют при всех q одно и то же значение $H = H_0$ и один и тот же угловой коэффициент технологического меню: $-dl_L / dl_K = \nu$.

Технологическая отправная точка $(l_{K0}, l_{L0}), H_0, \nu$ может быть интерпретирована как лучшая существующая (граничная) технология, а семейство нормализованных технологических меню — как прогноз будущего технологического развития, допускающего такие технологические меню, которые (1) включают в себя граничную отправную технологию и (2) обладают спектром различных эластичностей замещения. Другая интерпретация: это множество возможных ожидаемых или альтернативных технологий, которые могут существовать при различных условиях, например в различных странах.

Подставляя $\beta = \nu / [\nu + (l_{L0} / l_{K0})^{q+1}]$ в прототипную форму, получаем

$$\frac{\nu l_{K0}}{\nu l_{K0}^{q+1} + l_{L0}^{q+1}} \left(\frac{l_K}{l_{K0}} \right)^{-q} + \frac{l_{L0}}{\nu l_{K0}^{q+1} + l_{L0}^{q+1}} \left(\frac{l_L}{l_{L0}} \right)^{-q} = H_0. \qquad (10)$$

В технологической отправной точке (10) превращается в $(\nu l_{K0} + l_{L0}) / (\nu l_{K0}^{q+1} + l_{L0}^{q+1}) = H_0$. Находим семейство нормализованных технологических меню в виде

---

[8] Прототипная форма может быть оправдана «моделью идей» технического прогресса. В работе [Jones, 2005] предложена модель, в которой случайные производительности капитала и труда, соответствующие новым технологическим идеям, описываются независимыми распределениями Парето; эта модель ведет к производственной функции Кобба — Дугласа. Разработаны версии этой модели, ведущие к NCESF; они основаны на совместных распределениях, построенных на базе распределений Парето [Growiec, 2008a; Матвеенко, 2009; Matveenko, 2010] или на независимых распределениях Вейбулла [Growiec, 2008b]. Имеются также версии, приводящие к ненормализуемым семействам CES-функций вида $A(K^p + L^p)1/p$; они основаны на независимых экспоненциальных распределениях [Matveenko, 2011; Матвеенко, Полякова, 2012] или на независимых распределениях Вейбулла [Hrendash, Matveenko, 2015].

$$\eta\left(\frac{l_K}{l_{K0}}\right)^{-q}+(1-\eta)\left(\frac{l_L}{l_{L0}}\right)^{-q}=1,$$

где $\eta=\dfrac{\nu l_{K0}}{\nu l_{K0}+l_{L0}}\in(0,1)$ не зависит от q.

ТЕОРЕМА 2. *Для каждого семейства нормализованных технологических меню M существует семейство NCESF Φ, такое что каждое меню $m \in M$ порождает функцию $f \in \Phi$, и наоборот, каждая функция $f \in \Phi$ порождается меню $m \in M$.*

Технологической отправной точке соответствует отправная точка семейства NCESF. Уравнения $\pi=\dfrac{k_0}{\mu_0+k_0}$, $\eta=\dfrac{\nu}{\nu+k_0}$ и $\pi = \eta$ влекут $\mu_0\nu=k_0^2$.

Индуцированное семейство нормализованных технологических меню. Интересно рассмотреть случай, когда технологическая отправная точка не произвольна, а сама взята из некоторого меню. Пусть задана функция $G(l_K, l_L)$, которая обладает стандартными неоклассическими свойствами; $\Lambda(G)$ — ее линия единичного уровня. В качестве технологических отправных значений возьмем некоторую леонтьевскую технологию $(l_{K0}, l_{L0}) \in \Lambda(G)$, соответствующий ей угловой коэффициент меню

$$\nu=\frac{\partial G}{\partial l_K}/\frac{\partial G}{\partial l_L}(l_{K0},l_{L0})$$

и значение $H_0 = G(l_{K0}\ l_{L0}) = 1$. Семейство нормализованных технологических меню имеет вид

$$\left\{(l_K,l_L):\frac{\partial G(l_{K0},l_{L0})}{\partial l_K}l_{K0}^{1+q}l_K^{-q}+\frac{\partial G(l_{K0},l_{L0})}{\partial l_L}l_{L0}^{1+q}l_L^{-q}=1\right\}. \quad (11)$$

Будем говорить, что семейство (11) *индуцировано технологическим меню* $\Lambda(G)$ *в точке* (l_{K0}, l_{L0}). Технологические меню семейства (7) порождают семейство NCESF

$$\left(\frac{1}{\eta}l_{K0}^{q}K^{q}+\frac{1}{1-\eta}l_{L0}^{q}L^{q}\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (12)$$

В то же время меню $\Lambda(G)$ порождает производственную функцию $F(K, L) = 1/G(1/K, 1/L)$, которая, в свою очередь, индуцирует семейство NCESF. Следующая теорема показывает, что полученные двумя способами семейства NCESF совпадают.

ТЕОРЕМА 3. *Производственная функция $F(K, L) = 1/G(1/K, 1/L)$ в точке (K_0, L_0), такой что $k_0 = l_{L0}/l_{K0}$, индуцирует то же самое семейство NCESF (12), которое порождается семейством (11) технологических меню, индуцируемым $\Lambda(G)$ в точке (l_{K0}, l_{L0}).*

Источники

Матвеенко В.Д. «Анатомия» производственной функции: технологическое меню и выбор наилучшей технологии // Экономика и математические методы. 2009. Т. 46. № 2. С. 105–115.

Матвеенко А.В., Полякова Е.В. Моделирование изменения технологий и потребительских предпочтений // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2012. № 6. С. 159–162.

Basu D., Weil D.N. Appropriate Technology and Growth // Quarterly Journal of Economics. 1998. Vol. 113. P. 1025–1054.

Growiec J. A Microfoundation for Normalized CES Production Functions with Factor-augmenting Technical Change // Journal of Economic Dynamics and Control. 2013. Vol. 37. No. 11. P. 2336–2350.

Growiec J. A New Class of Production Functions and an Argument Against Purely Labor-augmenting Technical Change // International Journal of Economic Theory. 2008a. Vol. 4. No. 4. P. 483–502.

Growiec J. Production Functions and Distributions of Unit Factor Productivities: Uncovering the Link // Economic Letters. 2008b. Vol. 101. No. 1. P. 87–90.

Hrendash T., Matveenko A. Choice Models Which Generate Production Functions and Utility Functions. Discussion Paper No. 232. Prague: CERGE — EI, 2015.

Jones C.I. The Shape of Production Function and the Direction of Technical Change // Quarterly Journal of Economics. 2005. Vol. 120. No. 2. P. 517–549.

Klump R., La Grandville O. de. Economic Growth and the Elasticity of Substitution: Two Theorems and Some Suggestions // American Economic Review. 2000. Vol. 90. No. 1. P. 282–291.

Klump R., McAdam P., Willman A. The Normalized CES Production Function: Theory and Empirics // Journal of Economic Surveys. 2012. Vol. 26. No. 5. P. 769–799.

Klump R., Saam M. Calibration of Normalised CES Production Functions in Dynamic Models // Economics Letters. 2008. Vol. 99. No. 2. P. 256–259.

Leon-Ledesma M., Satchi M. Appropriate Technology and the Labour Share. Kent Discussion Papers in Economics No. 1505. 2015.

Martemyanov Yu., Matveenko V. On the Dependence of the Growth Rate on the Elasticity of Substitution in a Network // International Journal of Process Management and Benchmarking. 2014. Vol. 4. No. 4. P. 475–492.

Matveenko V. Anatomy of Production Functions: A Technological Menu and a Choice of the Best Technology // Economics Bulletin. 2010. Vol. 30. No. 3. P. 1906–1913.

Matveenko V. On a Dual Representation of CRS Functions by use of Leontief Functions // Proceedings of the First International Conference on Mathematical Economics, Non-Smooth Analysis, and Informatics. Baku, Institute of Mathematics and Mechanics Azerbaijan National Academy of Sciences. 1997. P. 160–165.

Matveenko V. Resources, Institutions and Technologies: Game Modeling of Dual Relations // Montenegrin Journal of Economics. 2013. Vol. 9. No. 3. P. 7–27.

Matveenko A. Stochastic Models of the Technological Ideas Flow as a Foundation of the Production Functions // International Days of Statistics and Economics: Conference Proceedings. Prague: Melandrium, 2011. P. 368–380.

Matveenko V. Tropical Support Sets in Analysis of Weak Links and Complementarity // Litvinov G., Sergeev S. (eds). Tropical and Idempotent Mathematics and Applications. Contemporary Mathematics. 2014. Vol. 616. P. 211–220.

Rubinov A.M., Glover B.M. Duality for Increasing Positively Homogeneous Functions and Normal Sets // Recherche Operationnele/Operations Research. 1998. Vol. 12. No. 2. P. 105–123.

Solow R. A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quartely Journal of Economics. 1956. Vol. 7. No. 1. P. 65–94.

Temple J.R.W. The Calibration of CES Production Functions // Journal of Macroeconomics. 2012. Vol. 34. No. 2. P. 294–303.