

УДК 551.46:532.593.2

ТРАНСФОРМАЦИЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В МЕЛКОВОДНОМ БАССЕЙНЕ

© 2012 г. Е. Н. Пелиновский^{*,**}, А. А. Родин^{**,***}

**Институт прикладной физики РАН
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail: pelinovsky@hydro.appl.sci-nnov.ru*

***Нижегородский государственный технический университет
603950 Нижний Новгород, ул. Минина, 24
E-mail: xmrarro@gmail.com*

****Институт кибернетики, Таллинский технологический университет, Таллинн, Эстония*

Поступила в редакцию 02.02.2011 г., после доработки 17.03.2011 г.

Процесс трансформации нелинейной волны на мелкой воде изучается аналитически и численно в рамках теории длинных волн. Показывается, что параметр нелинейности (число Маха), определяемый по соотношению скорости частиц в волне к скорости распространения, может быть много больше единицы в глубокой впадине и скачок появляется первоначально во впадине. Демонстрируется, что амплитуда ударной волны на больших временах изменяется в соответствии с предсказаниями слабо нелинейной теории. Кроме того, на ударном фронте появляется отраженная волна, которая в свою очередь, преобразуется в ударную, если начальная амплитуда достаточно велика. Амплитуда отраженной волны пропорциональна кубу начальной амплитуды (как это и предсказывается слабо нелинейной теорией) в широком диапазоне изменения амплитуд, за исключением случая аномально большой нелинейности. В случае знакопеременного достаточно интенсивного начального возмущения основная волна преобразуется в положительный ударный импульс (гребень), а отраженная — в отрицательный (впадина).

Ключевые слова: волны на воде, нелинейная теория, мелкая вода, аналитические решения, численные решения.

Процесс нелинейной трансформации волны на мелководье хорошо известен и в рамках нелинейной теории мелкой воды допускает точное аналитическое описание в виде Римановой волны [1, 2, 5, 7, 10, 11, 17]. При этом основное внимание уделяют форме волны, ее спектру и моменту обрушения (отождествляемому в рамках гиперболических уравнений мелкой воды с так называемой градиентной катастрофой). Опрокидывание волны обычно случается вблизи берега или при вхождении волны в устье реки [7, 8, 12, 15–18]. Динамика обрушенной волны хорошо известна, при этом в теории обычно рассматривают развитый бор (скорости течения по обе стороны от скачка стремятся к постоянным значениям). В зависимости от высоты бора реализуются разные типы ударной волны: “параболическая волна” при $H > 9h$ (H — высота бора, а h — глубина воды перед бором), гидравлический прыжок при $9h > H > 1.5h$ (классическая форма ударной волны) и волнообразный бор при $H < 1.5h$ [6, 7]. В последнем случае для описания структуры ударной волны необходимо учитывать дисперсионные эффекты (на-

пример, в рамках уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргерса), а в первых двух — уравнения мелкой воды в дивергентной форме с соответствующими граничными условиями на разрыве. В то же время, если волна достаточно длинная, так что ударный фронт занимает малую часть волны, то ее в целом можно описывать как ударную волну, не интересуясь структурой фронта и аппроксимируя его разрывом. Изменение амплитуды бора зависит от характера волнового поля позади разрыва. В случае малоамплитудного бора поле вне разрыва описывается по-прежнему решением в виде Римановой волны, и амплитуда бора может быть найдена аналитически [7]. Здесь имеется полная аналогия с задачами нелинейной акустики [9], где подробно анализируется формирование и развитие ударной волны во втором порядке по нелинейности. Однако, как отмечается в работе [9], в третьем порядке по нелинейности ударная волна не вписывается в профиль ударной волны, и возможно возникновение отраженных волн от разрыва. Этот эффект экспериментально наблюдался в электромагнитных линиях переда-

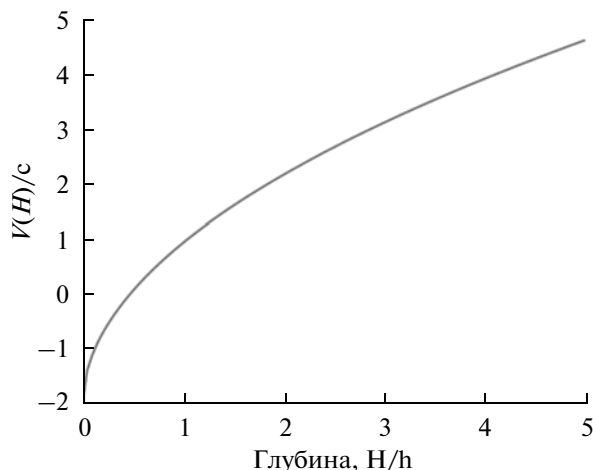


Рис. 1. Скорость деформации волны в зависимости от локальной глубины в волне.

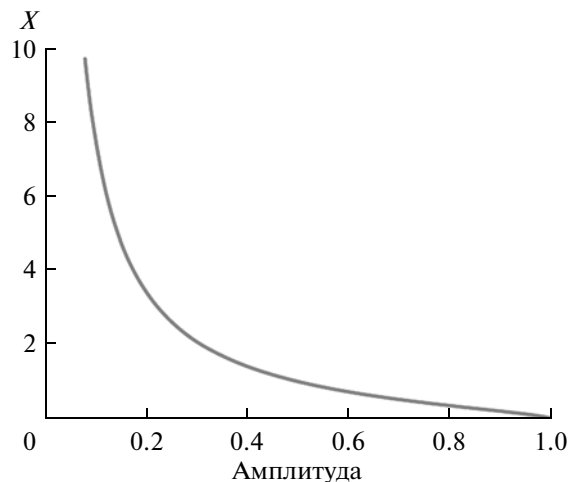


Рис. 2. Длина опрокидывания Римановой волны в зависимости от ее амплитуды.

чи, где, однако, дисперсионные эффекты являются значительными [3]. Для волн на воде нелинейность может быть сколь угодно сильной на малой глубине, поэтому асимптотические оценки в рамках приближения слабой нелинейности не всегда являются применимыми. Здесь будет выполнен анализ процесса формирования и эволюции ударной волны на мелководье без ограничения на ее амплитуду в рамках теории мелкой воды.

Основные уравнения нелинейной теории мелкой воды имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [Hu] = 0, \quad (1)$$

где $H(x, t) = h + \eta(x, t)$ – глубина воды, отсчитываемая от дна, $\eta(x, t)$ – возвышение водной поверхности, u – горизонтальная скорость водного потока, g – ускорение силы тяжести и h – невозмущенная глубина бассейна, предполагаемая постоянной. Рассматривая волны, движущиеся в одну сторону (для определенности в сторону $x > 0$), порядок системы (1) может быть понижен, и получаемое уравнение может быть записано в виде [2, 5]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V(H) \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad u = 2(\sqrt{gH} - \sqrt{gh}), \quad (2)$$

$$V = \sqrt{gh} + \frac{3u}{2} = 3\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh}. \quad (3)$$

Важно отметить, что уравнение (2) является точным в рамках теории мелкой воды и справедливо для волны любой амплитуды вплоть до ее обрушения. Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$H(x, t) = H_0[x - V(H)t], \quad (4)$$

где $H_0(x)$ определяет профиль водной поверхности в начальный момент времени. Неявная форма

решения (4) описывает так называемую волну Римана, хорошо известную в нелинейной акустике [4, 9]. Применительно к волнам на воде решение (4) описывает нелинейную деформацию волны с укрупнением ее переднего склона. Детальный анализ нелинейной деформации мелководной волны и изменения ее спектрального состава до момента обрушения выполнен в работе [5].

Зависимость локальной скорости распространения волны от ее амплитуды, определяющая нелинейную деформацию волны, представлена на рис. 1 (здесь $c = \sqrt{gh}$ – скорость распространения линейных длинных волн).

Скорость положительного возмущения (гребня волны) всегда превышает линейную скорость распространения, так что со временем гребень приобретает крутой фронт. Если же волна отрицательной полярности (впадина), то ее скорость меньше линейной скорости и крутой фронт формируется на заднем склоне волны. Если же глубина впадины очень велика, так что

$$H < H_{cr} = \frac{4}{9}h, \quad (5)$$

то скорость впадины становится отрицательной (см. формулу (3)). В этом случае разные участки волнового профиля распространяются в разные стороны, так что ударная волна образуется практически мгновенно. Уже отсюда видно, что нелинейные эффекты наиболее ярко должны проявляться во впадине волны, чем на ее гребне. Формально параметр нелинейности, определяемый как отношение скорости частиц в воде к скорости распространения волны (число Маха, u/V), становится бесконечным. Именно этот случай подробно исследован ниже.

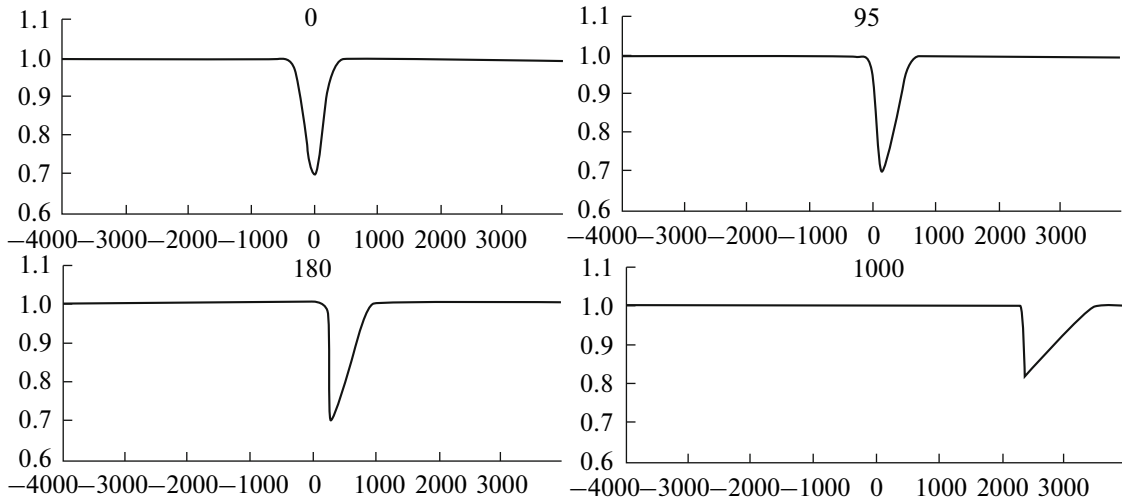


Рис. 3. Формирование ударной волны малой амплитуды ($A_0 = 0.3$). По горизонтальной оси отложено расстояние в м, а по вертикальной – глубина воды в м, отсчитываемая от дна. Цифрами показано время в секундах.

В качестве начального условия для Римановой волны в первой серии экспериментов выбран гауссовый импульс отрицательной полярности (впадина на водной поверхности)

$$H_0(x) = h \left[1 - A_0 \exp\left(-\frac{x^2}{l^2}\right) \right], \quad (6)$$

скорость течения в котором определяется правой формулой (2), так чтобы волна распространялась в одну сторону. В последующих расчетах невозмущенная глубина бассейна принята равной $h = 1$ м, характерный “полуразмер” импульса $l = 142$ м, так что приближение длинных волн выполняется. Амплитуда волны A_0 менялась в широких пределах. Чтобы учитывать ударные волны, уравнение для скорости в левой части (1) заменялось на уравнение для расхода uH , обеспечивая дивергентную форму законов сохранения [13], при этом уравнение для глубины воды оставалось в прежнем виде. Численные расчеты проводились в программном пакете Clawpack, решающем гиперболические уравнения с помощью метода конечных элементов [13, 14]. Уравнения мелкой воды решались с периодическими граничными условиями, размер расчетной области 8000 м, позволяющий наблюдать нелинейную деформацию волны. Шаг в пространстве – 8 м, его изменение в два-три раза приводило к изменению в амплитудах не более 1.5%. Временной шаг выбирается исходя из условия Куранта и равен 1 с.

Оценим сначала время обрушения, когда риманова волна (4) перестает быть гладкой. Время появления первого крутого участка на теле волны

(опрокидывание) может быть вычислено точно для любой амплитуды [5]

$$T_{br} = \frac{1}{\max \left[-\frac{dV}{dH} \frac{dH_0(x)}{dx} \right]}. \quad (7)$$

В частности, для начального возмущения (6) зависимость безразмерной длины обрушения ($X = cT_{br}/l$) от безразмерной амплитуды волны A_0 определяется параметрической кривой

$$X = \frac{2}{3A_0} \left[y \exp(y^2) \right], \quad A_0 = (1 - 2y^2) \exp(y^2), \quad (8)$$

эта зависимость представлена на рис. 2. Как и следовало ожидать, волна малой амплитуды опрокидывается на больших расстояниях (пропорциональных A_0^{-1}), в то время как волна большой амплитуды обрушается практически мгновенно. Заметим, что критическая глубина (5), которой соответствует $A_0 = 5/9$, формально ничем

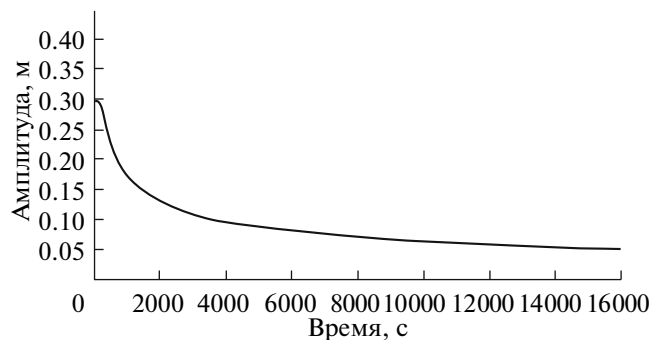


Рис. 4. Зависимость амплитуды волны со временем ($A_0 = 0.3$).

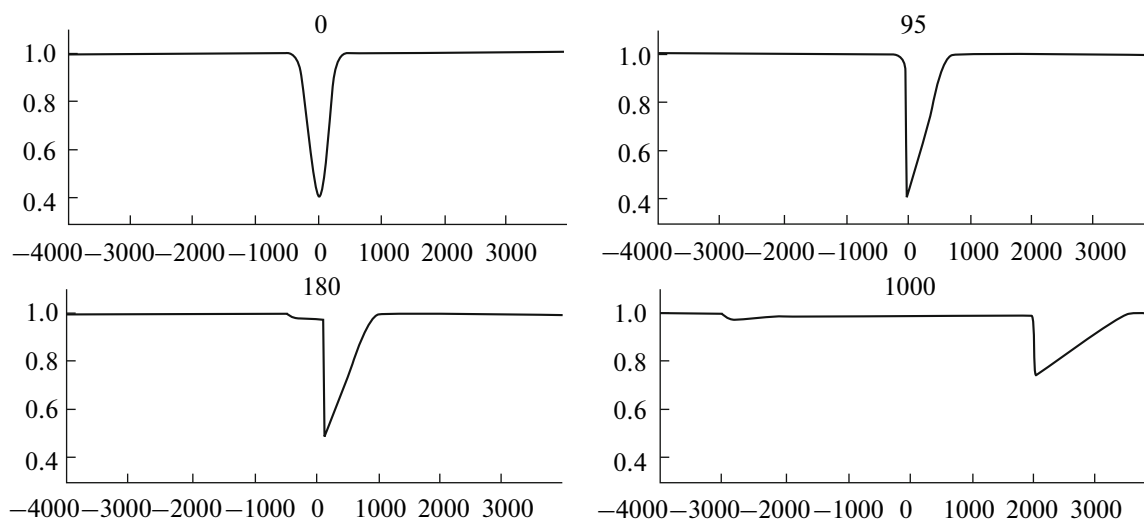


Рис. 5. Формирование ударной волны и появление отраженной от разрыва волны ($A_0 = 0.6$).

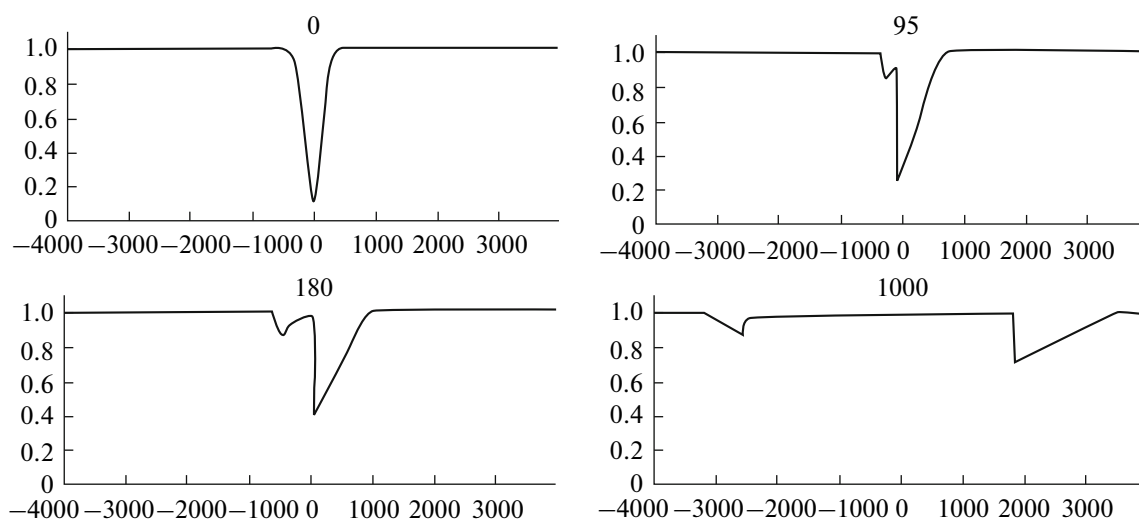


Рис. 6. Эволюция сильно нелинейной ударной волны ($A_0 = 0.9$).

не выделена на рис. 2, однако при $A_0 > 0.5$ волна опрокидывается на расстояниях, не превышающих ее длину.

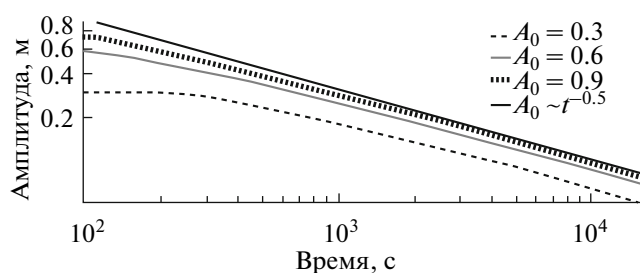


Рис. 7. Убывание амплитуды ударной волны со временем (цифрами начальные амплитуды).

В первой серии расчетов безразмерная глубина впадины была относительно небольшой ($A_0 = 0.3$). Трансформация волны иллюстрируется рис. 3 для различных моментов времени.

Качественно процесс формирования и эволюции ударной волны идет в соответствии с предсказаниями слабонелинейной теории [7, 9]. Ударная волна начинает формироваться за время порядка 95 с в соответствии с (8), однако начальная стадия не очень заметна на рис. 3. Приблизительно к 200 с, разрыв в волне полностью сформировался, и далее волна начинает затухать по амплитуде (рис. 4).

С увеличением амплитуды нелинейные эффекты проявляются на меньших временах, и наблюдается новый эффект: формирование отра-

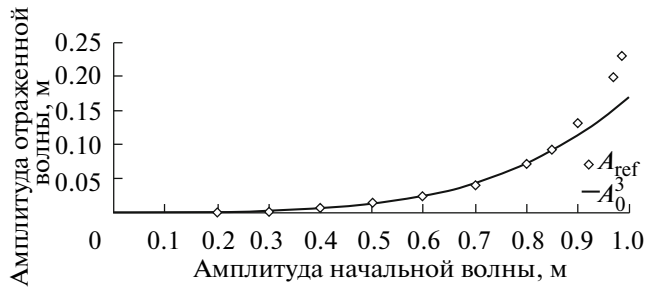


Рис. 8. Зависимость амплитуды отраженной волны, возникающей при образовании ударной волны, от амплитуды начального возмущения.

женной волны от разрыва в бегущей волне. Рисунок 5 иллюстрирует сказанное для $A_0 = 0.6$. Отраженная волна имеет малую амплитуду и большую длину, сопоставимую с длиной импульса. Природа появления отраженной волны описана в работе [9], она связана с тем, что ударный

фронт не может быть “вписан” в риманову волну (2). В случае больших амплитуд ($A_0 > 5/9$) это различие наиболее заметно: риманова волна должна двигаться налево, в то время как ударная волна — направо.

Отражение от разрыва еще более заметно для сильно нелинейных волн, и рис. 6 показывает структуру волнового поля с амплитудой $A_0 = 0.9$. При этом и отраженная волна трансформируется в ударную. Поскольку скорость частиц в подошве меньше линейной скорости, то разрыв формируется на заднем склоне отраженной волны.

Изменение амплитуды бора в рамках слабонелинейной теории, как известно, может быть найдено с использованием правила “равных площадей” [7, 9]. Не приводя здесь весьма громоздких трансцендентных уравнений для амплитуды ударной волны (их громоздкость связана с гауссовой формой начального возмущения), дадим здесь асимптотическое выражение, справедливое

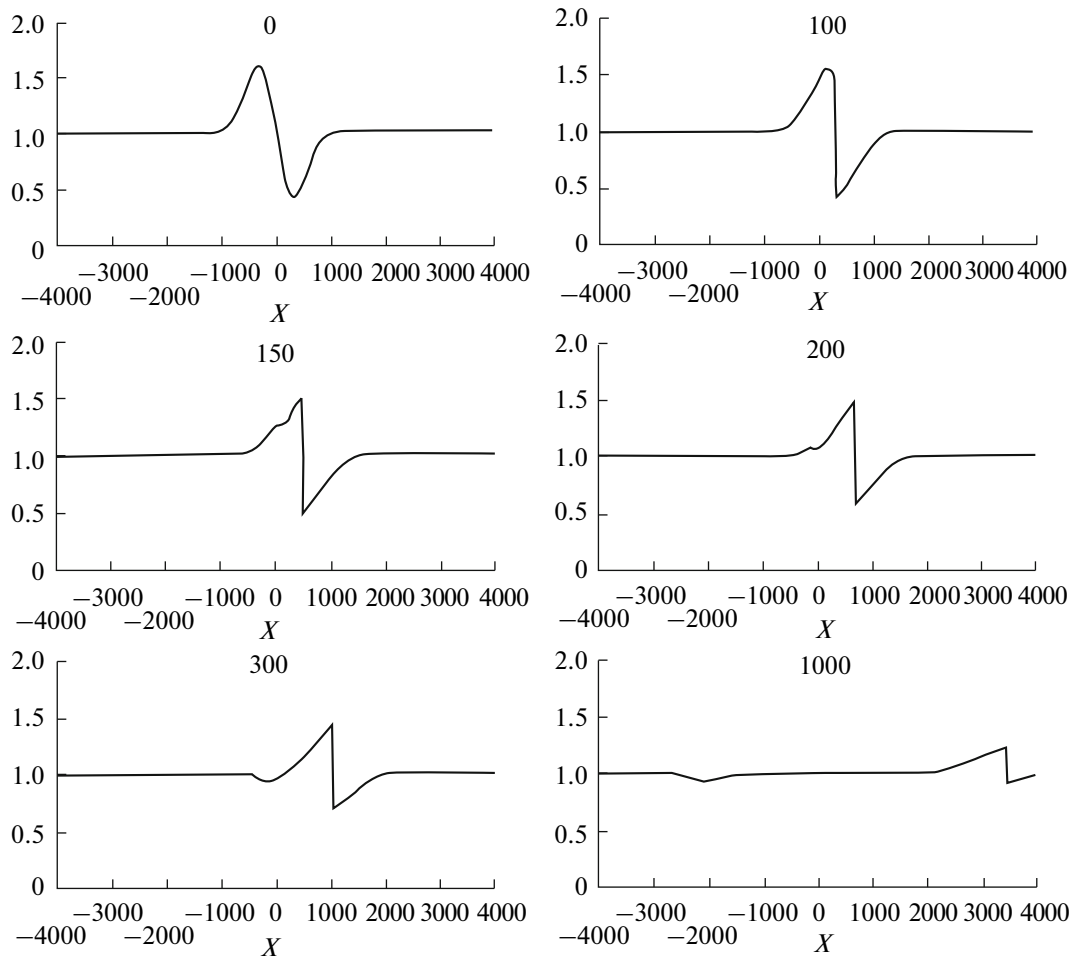


Рис. 9. Формирование ударной волны и появление отраженной от разрыва волны в случае знакопеременного начального импульса ($A_0 = 0.6$ м).

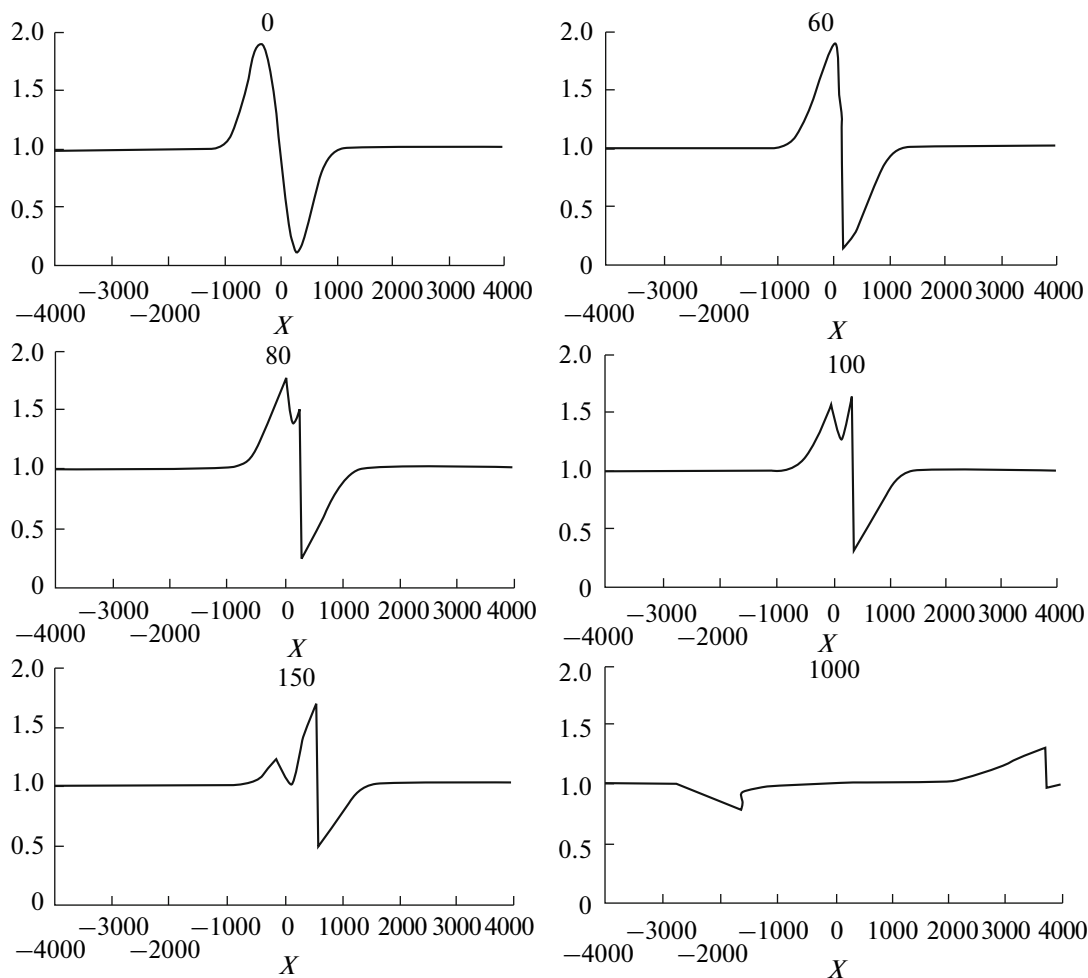


Рис. 10. Формирование ударной волны и появление отраженной от разрыва волны в случае знакопеременного начального импульса ($A_0 = 0.9$ м).

на заключительной стадии вырождения ударной волны

$$A(t) \sim A_0 \sqrt{\frac{2T_{br}}{t}}. \quad (9)$$

Асимптотическая кривая (9) показана на рис. 7 сплошной линией, и она хорошо описывает изменения амплитуды ударной волны на больших временах как слабо нелинейных, так и сильно нелинейных волн.

Амплитуда отраженной волны в зависимости от начальной амплитуды основной волны представлена на рис. 8. Согласно слабонелинейной теории акустических ударных волн в третьем порядке теории возмущений [9], амплитуда отраженной волны почти в точности равна A_0^3 , эта асимптотическая зависимость также представлена на рис. 8. Как видим, асимптотическая зависимость хорошо работает не только для волн малой

амплитуды, но и для волн большой амплитуды ($A_0 \sim 0.8$), за исключением anomalously больших ($A_0 \sim 0.9-0.98$). Весьма интересна форма отраженной волны, которая остается импульсной и трансформируется на больших временах в треугольный импульс с ударным фронтом, в каком-то смысле зеркально отраженным падающему импульсу. Отметим, что эффект отражения от ударного фронта, предсказанный в [9], моделировался в нелинейных линиях передачи [3], где, однако, дисперсия играла свою роль, приводя к отражению относительно высокочастотной волны. В наших расчетах дисперсия отсутствует, и при большой амплитуде отраженная волна становится также ударной, что хорошо заметно на рис. 5 и 6.

Чтобы продемонстрировать “разность” действия нелинейности на импульсы разной полярности (гребень и впадину) рассмотрим теперь

знакопеременную волну, бегущую вправо, описываемую выражением:

$$H_0(x) = h \left[1 - B \exp\left(-\frac{x^2}{l^2}\right) \sin(kx) \right]. \quad (10)$$

В расчетах принято $h = 1$ м, $l = 1000$ м, и $k = 5 \times 10^{-4}$ м⁻¹, и величина B изменялась в широких пределах (0.1–10) так, чтобы максимальное отклонение профиля от равновесного состояния $A_0 = B \times \text{Max}[\exp(-x^2/l^2)\sin(kx)]$ принимало значения от 0 до h . На рис. 9 показана деформация волны с начальной амплитудой $A_0 = 0.6$ м. Как мы отмечали ранее, динамика впадины волны является сильно нелинейной, и часть ее стремится двигаться в обратную сторону. Это свойство проявляется и в знакопеременной волне. В результате от волны отщепляется импульс отрицательной полярности, при этом отраженная волна сначала взаимодействует с положительной частью основной волны. Формируемая ударная волна, распространяющаяся вправо, становится несимметричной относительно горизонтальной оси. Еще более сильно эти эффекты выражены при амплитуде $A_0 = 0.9$ (рис. 10). В этом случае отраженная волна быстро становится ударной, а основная волна в конечном счете трансформируется в положительный ударный треугольник. Этот эффект связан с взаимодействием двух ударных волн разной полярности, одна из которых (горб) является более сильной.

В заключение хотелось бы отметить несколько важных выводов проведенного исследования. Амплитуда ударной волны на больших временах спадает пропорционально $t^{-1/2}$, как это предсказывается слабонелинейной теорией, несмотря на большую нелинейность рассматриваемых волн. На фронте ударной волны отрицательной полярности возникает отраженная волна, которая трансформируется сама в ударную на больших временах. Ее амплитуда почти в точности равна кубу начальной амплитуды в широком диапазоне изменения высоты волны, за исключением аномально больших. В случае знакопеременного начального возмущения основная волна на больших расстояниях трансформируется в ударную волну только положительной полярности (горб).

Частично эта работа поддержана грантами РФФИ (11-05-00216), НОЦ (02.740.11.0732) и ESF (8870, DoRa), грантом Президента МК 4378.2011.5, а также программой “Нелинейная динамика”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арсеньев А.С., Шелковников Н.К.* Динамика морских длинных волн. М.: МГУ, 1991. 88 с.
2. *Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н.* Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеиздат. 1989. 271 с.
3. *Воляк К.И., Горшков А.С., Руденко О.В.* О возникновении обратных волн в однородных нелинейных средах // Вестн. МГУ. Сер. Физика, астрономия. 1975. № 1. С. 32–36.
4. *Гурбатов С.Н., Малахов А.И., Саичев А.И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 214 с.
5. *Диденкулова И.И., Заibo Н., Куркин А.А. и др.* Крутизна и спектр нелинейно деформируемой волны на мелководье // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42. № 6. С. 839–842.
6. *Накамура С.* О гидравлическом боре и применении результатов его изучения к проблеме возникновения и распространения цунами // Волны цунами. Труды СахКНИИ. Южно-Сахалинск. 1973. Вып. 32. С. 129–151.
7. *Пелиновский Е.Н.* Нелинейная динамика волн цунами. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. 226 с.
8. *Пелиновский Е.Н., Трошина Е.Н.* Распространение длинных волн в проливах // Морские гидрофизические исследования 1993. № 1. С. 47–52.
9. *Руденко О., Солуян С.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 384 с.
10. *Стокер Дж.* Волны на воде. М.: ИЛ, 1959. 617 с.
11. *Шулейкин В.В.* Физика моря. М.: Наука, 1968.
12. *Caputo J.-G., Stepanyants Y.A.* Bore formation, evolution and disintegration into solitons in shallow inhomogeneous channels // Nonlin. Proc. Geophys. 2003. V. 10. P. 407–424.
13. *LeVeque R.J.* Finite-volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 558 p.
14. *Roe P.L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. V. 43. P. 357–372.
15. *Tsuji Y., Yanuma T., Murata I. et al.* Tsunami ascending in rivers as an undular bore // Natural Hazards. 1991. V. 4. P. 257–266.
16. *Zahibo N., Pelinovsky E., Talipova T. et al.* Analytical and numerical study of nonlinear effects at tsunami modelling // Appl. Mathemat. Comput. 2006. V. 174. № 2. P. 795–809.
17. *Zahibo N., Didenkulova I., Kurkin A. et al.* Steepness and spectrum of nonlinear deformed shallow water wave // Ocean Engineering. 2008. V. 35. № 1. P. 47–52.
18. *Wu Y.H., Tian J.-W.* Mathematical analysis of long-wave breaking on open channels with bottom friction // Ocean Engineering. 2000. V. 26. P. 187–201.

Transformation of a Strongly Nonlinear Wave in a Shallow-Water Basin

E. N. Pelinovskii^{a, b} and A. A. Rodin^{b, c}

^a *Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, Nizhni Novgorod, 603950 Russia*
e-mail: pelinovsky@hydro.appl.sci-nnov.ru

^b *Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina 24, Nizhni Novgorod, 603950 Russia*
e-mail: xmrarro@gmail.com

^c *Institute of Cybernetics, Tallinn University of Technology, Estonia*

Received February 2, 2011; in final form, March 17, 2011

Abstract—The transformation of a nonlinear wave in shallow water is investigated analytically and numerically within the framework of long-wave theory. It is shown that the nonlinearity parameter (the Mach number), which is defined as the ratio of the particle velocity in the wave to the propagation velocity, can be well above unity in a deep trough and that a jump appears initially in the trough. It is demonstrated that shock-wave amplitudes at large times change in accordance with the prediction of weakly nonlinear theory. The shock front generates a reflected wave, which, in turn, transforms into a shock wave if the initial amplitude is large enough. The amplitude of the reflected wave is proportional to the cube of the initial amplitude (as predicted by weakly nonlinear theory) over a wide range of amplitudes except for the case of anomalously strong nonlinearity. When there is a sign-variable sufficiently intense initial perturbation, the basic wave transforms into a positive shock pulse (crest) and the reflected wave turns into a negative pulse (trough).

Keywords: Water waves, nonlinear theory, shallow water, analytical and numerical solutions.