Кузнецов В.В., Кузнецова Н.А.

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Рассматривается задача Дирихле для однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сильным вырождением на границе области:

$$\alpha^2(t)y''(t)-\big(b(t)+ikf(t)\alpha(t)\big)y'(t)-k^2c(t)y(t)=0,$$
$$t\in[0;d],\ k\in R_1,$$
$$y(0)=y_0,\ \ y(d)=0.$$

Предполагается, что при $t\in[0;d]$ коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим требованиям:

$$\alpha(t)\in C^4,\ \ b(t)\in C^3,\ \ f(t)\in C,^3\ \ c(t)\in C^2;$$
$$c(t)-\frac{1}{4}f^2(t)>0;$$
$$\alpha(0)=\alpha'(0)=0,\ \ \alpha(t)>0,\ \ c(0)=b(0)=1.$$

Выполняется также одно из следующих условий:

1. Существует целое число N такое, что справедливы утверждения

$$\alpha(t)\in C^{N+1},\ \ \alpha^{(N)}(0)\neq 0,\ \ t\in[0;d];$$

2. Существуют постоянные $c_0>0$ и $t_0\in(0;d)$ такие, что имеет место оценка

$$\left|1-c(t)\right|\le c_0\sqrt{\alpha(t)},\ \ t\in(0;t_0).$$

Доказано, что при выполнении сформулированных условий существует число $k_0>0$ такое, что при $k\ge k_0$ рассматриваемая задача имеет ограниченное решение $y(t)$, для которого справедливы:

1. Асимптотическое представление

$$y(t)=\frac{y_0}{y_2^0(t)}\left(y_2^0(t)-y_1^0(t)\right)\left(1+O(k^{-1})\right),$$

где

$$y_1^0(t) = Q^{\frac{1}{4}}(0,k)Q^{-\frac{1}{4}}(\tau,k)\exp\left\{\int_0^\tau\left(\frac{1}{2}\beta(\tilde\tau,k)+\sqrt{Q(\tilde\tau,k)}\right)d\tilde\tau\right\},$$

$$y_2^0(t) = Q^{\frac{1}{4}}(0,k)Q^{-\frac{1}{4}}(\tau,k)\exp\left\{\int_0^\tau\left(\frac{1}{2}\beta(\tilde\tau,k)-\sqrt{Q(\tilde\tau,k)}\right)d\tilde\tau\right\},$$

$$\tau = \tau(t) = \int_d^t \alpha^{-1}(\rho)d\rho, \quad \tau\in(-\infty,0],$$

$$\beta(\tau(t),k) = \left(b(t)+ikf(t)\alpha(t)\right)\alpha^{-1}(t)+\alpha'(t),$$

$$Q(\tau(t),k) = \frac{1}{4}\beta^2(\tau,k)+k^2c(t)-\frac{1}{2}\beta'(\tau,k);$$

2. Априорная оценка

$$k^4\|y(t)\|^2+\|y'(t)\|^2+k^2\|\alpha(t)y''(t)\|^2\le ck^2|y_0|^2,$$

в которой использовано обозначение $\|x(t)\|^2 = \int_0^d x^2(t)dt.$

Для справедливости априорной оценки необходимым условием является равенство нулю решения в правом конце промежутка $t\in[0;d]$.

В основу доказательства положено использование асимптотического метода ВКБ, применение которого к вырождающемуся однородному обыкновенному дифференциального уравнения второго порядка обосновывается.

Комарова Е.В.

ПАДЕ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

В задачах управления, где параметр стоит множителем при производной рассматривается ситуация, когда параметр может принимать как малые, так и большие значения. В этом случае будем говорить, что управление зависит от параметра $\varepsilon\in(0,\infty)$.

Управление с таким произвольным параметром будет объединять два управления, построенных на границах. Связующей функцией в данном случае будет являться Асимптотическая Паде интерполяция (АПИ) управления.

Будем использовать аппроксимацию - Паде, которая будет являться "мостом" между асимптотическими разложениями при $\varepsilon\to0$ и $\varepsilon\to\infty$. Как показывают примеры, построение таких аппроксимаций - Паде позволяют существенно расширить "области действия" асимптотик в окрестностях малых и больших положительных значений параметра ε, то есть там, где асимптотические при-