УДК 512.554 +552.552

О ДИКИХ И РУЧНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

ЕВГЕНИЙ МАКЕДОНСКИЙ

Аннотация. Для конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики приведен критерий дикости или ручности задачи классификации конечномерных представлений.

1. Введение

Все рассматриваемые алгебры Ли определены над фиксированным алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики и конечномерны над $\mathbb{K}$. В дальнейшем поле часто указывать не будем, в частности вместо $sl_n(\mathbb{K})$ будем писать sl_n.

В данной работе рассматривается следующий вопрос. Пусть дана некоторая конечномерная алгебра Ли L. Классифицировать по возможности все ее неразложимые конечномерные представления. В случае, если алгебра Ли L полупроста ответ известен с начала двадцатого века. Все представления таких алгебр классифицируются некоторыми элементами дуальной корневой решетки. Мы будем исследовать вопрос о возможности подобной классификации для других конечномерных алгебр Ли.

Строго говоря, под невозможностью классификации представлений будем понимать дикость (см. определения 1, 2), введенную Ю. А. Дроздом в работе [2]. Неформально дикость классификационной задачи означает, что из ее решения будет следовать решение задачи классификации пары матриц с точностью до подобия (или, что то же самое, классификации всех конечномерных представлений свободной алгебры от двух образующих). Эта задача считается чрезвычайно сложной, так как ее решение включает в себя решения задач классификации всех конечномерных представлений для любой конечномерной ассоциативной алгебры. Для некоторого класса задач, включающего классификацию представлений конечномерных ассоциативных алгебр, Ю. А. Дрозд показал, что эти задачи разбиваются на два класса – диких и таких, что все их представления распадаются на конечное множество однопараметрических семейств (так называемые ручные задачи). Для получения аналогичного результата для конечномерных алгебр Ли нам потребуется слегка изменить определение ручных задач (см. определение 3).

О ручности и дикости задач теории представлений см., например, работы [1], [2], [3], [5], [6] и многие другие. В этих работах среди некоторых классов задач выделены ручные и дикие.

Данная работа посвященна вопросу о том, для каких алгебр Ли L данная задача является дикой или ручной. Такие алгебры будем называть, соответственно, дикими и ручными. Основной результат данной работы:

Теорема 3. Ручными являются следующие алгебры Ли:

1) полупростые;

2) одномерная алгебра;

3) прямые суммы полупростых с одномерной.

Все остальные – дикие.

Из Теоремы 3 следует, что конечномерные алгебры Ли разбиваются на два класса – ручных и диких.

В данной работе представления неполупростых алгебр Ли изучаются при помощи некоторого бесконечного колчана. Алгебра путей этого колчана не изоморфна обертывающей алгебре исходной агебры Ли, потому что в ней бесконечно много идемпотентов. Однако категория представлений этой алгебры эквивалентна категории представлений исходной алгебры Ли.

О структуре работы. В п. 2 данной работы приведены определения дикости и ручности и некоторые простые примеры ручных и диких алгебр Ли. Далее в п. 3 изучается задача описания представлений данной алгебры Ли с абелевым радикалом, а именно сводится к задаче описания представлений некоторого колчана с соотношениями, а в п. 4 с помощью исследования представлений этого колчана алгебры Ли с абелевым радикалом разделены на ручные и дикие . Далее после исследования алгебр с ручным фактором по квадрату радикала в п. 5 доказывается основная теорема.

2. Примеры ручных и диких алгебр Ли

Определение 1. *([2]) Ассоциативная $\mathbb{K}$-алгебра A называется дикой, если существует такой $A - \mathbb{K}\langle x, y\rangle$-бимодуль M свободный конечного ранга как модуль над $A \otimes \mathbb{K}\langle x, y\rangle$, что функтор $M \otimes_{\mathbb{K}\langle x,y\rangle} (-)$: $mod(\mathbb{K}\langle x, y\rangle) \to mod(A)$ сохраняет неразложимость и переводит неизоморфные модули в неизоморфные.*

Это определение дикости было исторически первым. Мы будем пользоваться несколько другим определением дикости, эквивалентным приведенному в работе [4]. Оно имеет смысл для любой $\mathbb{K}$-алгебры, у которой определена категория конечномерных представлений. Мы будем применять его для алгебр Ли.

Определение 2. *([4]) $\mathbb{K}$-алгебра A называется дикой, если существует точный функтор из категории представлений $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ – свободной алгебры от двух образующих, сохраняющий неразложимость и переводящий неизоморфные модули в неизоморфные.*

Два рассматриваемых определения эквивалентны как минимум для конечномерных ассоциативных алгебр. Кроме того, из дикости в смысле Определения 1 следует дикость в смысле Определения 2.

Определение 3. *Алгебра A называется ручной, если все неразложимые конечномерные представления A распадаются на дискретное множество однопараметрических семейств.*

Это опребедение мы тоже будем применять для алгебр Ли.

Исследованию связи понятий дикости и ручности для конечномерных алгебр посвящена работа [2], в которой доказано, что любая такая алгебра является либо дикой, либо ручной.

В рамках второго определения дикости и определения ручности очевидно, что алгебры с эквивалентными категориями конечномерных представлений дикими или ручными могут быть только одновременно.

Следующее простое предложение будем использовать не ссылаясь на протяжении всей работы.

Предложение 1. *Рассмотрим алгебру A и идеал $I \lhd A$. Предположим, что алгебра A/I - дикая. Тогда и алгебра A – дикая.*

Доказательство. Допустим, существует $(A/I) - \mathbb{K}\langle x, y\rangle$-бимодуль M, удовлетворяющий всем свойствам из определения 1. Но тогда этот же модуль, рассматирваемый как A-модуль, (точнее, модуль ${}_A A/I_{A/I} \otimes_{A/I} M$) также удовлетворяет всем свойствам определения 1. □

Кроме того, отметим следующий очевидный факт.

Следствие 1. *Пусть $L = I \oplus J$, I – дикая. Тогда и L – дикая.*

Приведем некоторые примеры ручных и диких алгебр Ли.

2.1. **Двумерные алгебры – дикие.** Пусть L – двумерная алгебра Ли. Тогда L либо абелева, либо имеет базис $L = \langle x, y\rangle$ такой, что $[x, y] = y$. Алгебра, порожденная двумя образующими x, y и одним соотношением $[x, y] = y$ является дикой (см, например, [6]). Представления двумерной абелевой алгебры Ли $L = \langle a, b\rangle$ – это представлений алгебры полиномов от двух переменных. Дикость последней является хорошо известным фактом ([1]). Тем не менее, с целью иллюстрации приведем доказательство (см, например, [6]).

Рассмотрим $L - \mathbb{K}\langle x, y\rangle$-бимодуль M, свободный над $\langle x, y\rangle$ ранга 4. Образующие a и b алгебры L действуют на этом бимодуле следующими $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$-линейными преобразованиями:

$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Нетрудно видеть, что эти преобразования коммутируют, поэтому это действительно $L - \mathbb{K}\langle x, y\rangle$-бимодуль. Рассмотрим конечномерный неразложимый $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$-модуль V. Пусть x и y действуют на этом модуле с помощью матриц X и Y. Тогда $N = M \otimes_{\mathbb{K}\langle x,y\rangle} V$ является векторным пространством, изоморфном $V \oplus V \oplus V \oplus V$, на котором образующие рассматриваемой алгебры Ли действуют при помощи следующих операторов:

$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Допустим, этот модуль разложим. Пусть $N = W_1 \oplus W_2$ - прямая сумма L-модулей. Положим

$V_i = \{u_4|(u_1,u_2,u_3,u_4)^t \in W_i\}$ для некоторых u_1,u_2,u_3, $i=1,2$. Очевидно, что $V = V_1 + V_2$. Пусть $(u_1,u_2,u_3,u_4)^t \in W_i$. Применив к этому элементу оператор a^2 мы получим элемент $(u_4,0,0,0)^t \in W_i$. Значит, $(V_i,0,0,0) \in W_i$. Поэтому $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ и $V = V_1 \oplus V_2$, $W_i \cap (V,0,0,0)^t = (V_i,0,0,0)^t$. Далее, применим к элементу $(u_1,u_2,u_3,u_4)^t \in W_i$ операторы ab и b^2. Получим элементы $(xu_4,0,0,0)^t \in W_i$ и $(yu_4,0,0,0)^t \in W_i$. Поэтому $xV_i \in V_1, yV_i \in V_i$, $i=1,2$. Мы получили разложение исходного представления алгебры $\mathbb{K}\langle x,y\rangle$. Значит, построенный функтор переводит неразложимые представления в неразложимые.

Пусть теперь для двух представлений V_1, V_2 алгебры $\mathbb{K}\langle x,y\rangle$ представления $N_1 = M \otimes_{\mathbb{K}\langle x,y\rangle} V_1$, $N_2 = M \otimes_{\mathbb{K}\langle x,y\rangle} V_2$ изоморфны. Тогда их размерности равны и существует обратимый сплетающий оператор, то есть такой оператор S, что $Sa_1 = a_2S$, $Sb_1 = b_2S$ (Номер соответствует номеру представления V_i). Записав S в виде $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}$.

Теперь, перемножив блочные матрицы и приравняв коэффициенты мы получим, что $S_{21} = S_{31} = S_{41} = S_{32} = S_{42} = S_{43} = S_{23} = 0$, $S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44}$. Кроме того, $S_{22}Y_1 = Y_2S_{44}$, $S_{22}X_1 = X_2S_{44}$. Поэтому мы получили сплетающий оператор для прелставлений V_1, V_2. Он обратим, так как в силу равенства нулю всех нижних блоков блочной матрицы S и равенства всех ее диагональных блоков, $\det S = \det S_{22}^4$, то есть матрица S_{22} обратима. Значит, описываемый функтор переводит неизоморфные представления в неизоморфные. Этот факт завершает доказательство дикости двумерной абелевой алгебры Ли.

Следовательно, все двумерные алгебры Ли – дикие.

2.2. **Разрешимые алгебры – дикие.** Пусть теперь $L \triangleright I$, $\dim(L/I) = 2$. Тогда L – дикая, так как L/I – двумерная, следовательно, дикая.

В частности, если L – разрешимая алгебра Ли, то в силу Теоремы Ли в ней есть флаг из идеалов, в частности, идеал любой размерности, не превышающей размерность L. Следовательно, если размерность L не меньше двух, то в ней существует идеал коразмерности 2. Таким образом, верно следующее утверждение:

Предложение 2. *Все разрешимые алгебры Ли являются дикими.*

2.3. **Полупростые алгебры – ручные.** С другой стороны, из классической теории представлений полупростых алгебр Ли известно, что все неприводимые представления параметризуются целочисленными доминантными формами на корневой решетке, то есть дискретным множеством параметров и исчерпывают все неразложимые представления. Поэтому все полупростые алгебры ручные.

2.4. **Одномерные расширения полупростых – ручные.** Следующее утверждение должно быть известным, но автору не удалось найти подходящую ссылку, поэтому оно здесь приведено с полным доказательством. Это доказательство аналогично доказательству из книги ([7], с. 225).

Предложение 3. *Пусть* $L = \widehat{L} \oplus L_1$ *– алгебра Ли, такая что* $\widehat{L}$ *- полупростая;* (M, f) *– неразложимое представление* L. *Тогда существуют такие неразложимые представления* (M_1, f_1) *алгебры* $\widehat{L}$ *и* (M_2, f_2) *– алгебры* L_1, *что* $M = M_1 \otimes M_2$, $f(X+Y) = f_1(X) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes f_2(Y)$, *где* $X \in \widehat{L}$, $Y \in L_1$, id *– тождественный оператор.*

Доказательство. Поскольку $\widehat{L} \ni X \mapsto f(X)$ – вполне приводимое представление (в силу полупростоты алгебры $\widehat{L}$), мы можем считать, что $f(X) = \begin{pmatrix} F_1(X) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(X) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_k(X) \end{pmatrix}$, где F_i – неприводимое представление алгебры $\widehat{L}$ размерности h_1. Далее можно считать, что $F_1 = ...F_p$, а представления $F_q, q > p$ не эквивалентны F_1. Пусть S_{ij} – $h_i \times h_j$-матрицы и $S = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{k1} & \dots & S_{kk} \end{pmatrix} \in gl(n, \mathbb{K})$. Предположим, что $f(X)S = Sf(X)$ для любого $X \in \widehat{L}$. Тогда $f_i(X)S_{ij} = S_{ij}f_j(X)$ при $i, j = 1, \dots k$. По лемме Шура ([7], с. 225) имеем, что $S_{ij} = s_{ij}1_{h_1}$, $s_{ij} \in \mathbb{K}$ при $i, j = 1, \dots p$ и $S_{ij} = 0$ при $i \leqslant p < j$ и $j \leqslant p < i$.

Теперь применим этот результат к $S = f(Y)$, $Y \in L_1$. Если бы $p \neq k$, то из соотношений $S_{ij} = 0$ при $i \leqslant p < j$ и $j \leqslant p < i$ следовало бы, что (M, f) – разложимо. Значит, $p = k$.

Введем обозначение $f_1(X) = F_1(X)$ для $X \in \widehat{L}$, $f_2(Y) = (s_{ij}) \in gl(p, \mathbb{K})$, $Y \in \langle \lambda e \rangle$. M очевидным образом распадается в тензорное произведение. Тогда имеем:

$$f(X) = f_1(X) \otimes 1_p, X \in \widehat{L};$$

$$f(Y) = 1_h \otimes f_2(Y), Y \in \langle \lambda e \rangle.$$

Очевидно, что если представление (f_2, M_2) распадается в прямую сумму других представлений, то и представление f также распадается в прямую сумму двух представлений. Следовательно, (f_2, M_2) – неразложимое представление. Обратно, если (f_2, M_2) – неразложимо, то и представление (f, M) также неразложимо. □

Замечание 1. Прямая сумма ручной и полупростой алгебр – ручная. Представления алгебры $\langle \lambda e \rangle$, очевидно, задаются образом элемента $e \mapsto f_2(e)$. Следовательно, все неразложимые представления алгебры $L = \widehat{L} \oplus \langle \lambda e \rangle$, $\widehat{L}$ – простая, задаются неприводимым представлением алгебры $\widehat{L}$ и жордановой клеткой. Поэтому все такие алгебры ручные.

Замечание 2. Если один из сомножителей приводим, то и тензорное произведение приводимо. Поэтому неприводимые предствления $L = \widehat{L} \oplus \langle \lambda e \rangle$, $\widehat{L}$ – простая, – это неприводимые представления алгебры $\widehat{L}$, на которых элемент e действует умножением на константу.

3. Колчан алгебры с абелевым радикалом

Сведем теперь исследование представлений алгебры Ли с абелевым радикалом к исследованию представлений некоторого колчана.

Лемма 1. *Пусть $\widehat{L} = L \leftthreetimes I$ – алгебра Ли такая, что L – полупростая, I – абелев идеал. Тогда категория представлений алгебры $\widehat{L}$ эквивалентна категории пар (M, ϕ), где M – L-модуль , $\phi : I \otimes M \to M$ – морфизм модулей такой, что*

$$\phi \circ (\mathrm{id} \otimes \phi) \left((I \wedge I) \otimes M \right) = 0, \tag{1}$$

с морфизмами – коммутативными диаграммами:

$$\begin{tikzcd} I \otimes M \arrow[r, "\phi"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \theta"] & M \arrow[d, "\theta"'] \\ I \otimes N \arrow[r, "\psi"] & N \end{tikzcd}, \tag{2}$$

где θ – морфизм модулей. В дальнейшем под парами будем понимать пары (M, ϕ).

Доказательство. Пусть M – $\widehat{L}$-модуль, тогда M – и L-модуль. Зададим отображение $\phi : I \otimes M \to M$: $i \otimes m \mapsto im$. Тогда для любых $i, j \in I, m \in M$:

$$\phi \circ (\mathrm{id} \otimes \phi)((i \otimes j - j \otimes i) \otimes (m)) = i(jm) - j(im) = [i, j]m = 0.$$

Поэтому условие 1 выполняется.

Кроме того:

$$l\phi(i \otimes m) = lim = [l, i]m + ilm = \phi(l(i \otimes m))$$

Поэтому ϕ – морфизм модулей.

Обратно, пусть ϕ – морфизм модулей $\phi : I \otimes M \to M$ с условием 1. Зададим действие для $i \in I, m \in M$: $im := \phi(i \otimes m)$. В силу условия 1 получим для $i, j \in I, m \in M$: $[i, j]m = ijm - jim = 0$, кроме того, для $l \in L, i \in I, m \in M$:

$$[l, i]m = \phi([l, i] \otimes m) = \phi(l(i \otimes m) - i \otimes lm) = l\phi(i \otimes m) - ilm =$$

$$= lim - ilm.$$

Поэтому с таким действием M является $\widehat{L}$-модулем.

Очевидно, что композиция двух описанных отображений является изоморфизмом. Тем самым задано соответствие на объектах категорий.

Пусть теперь A – морфизм $\widehat{L}$-модулей $A : M \to N$, тогда зададим морфизм L-модулей $\theta = A$. Тогда для $i \in I, m \in M$:

$$\theta(\phi(i \otimes m)) = \theta(im) = A(im) = iA(m) = i\theta(m) = \psi(i \otimes \theta(m)).$$

Поэтому это отображение задает коммутуливный квадрат (2). Далее, если два морфизма модулей делают коммутативным квадрат (2), то и их композиция – тоже в силу функториальности тензорного произведения. Из тех же вычислений следует, что каждый коммутативный квадрат

(2) задает отображение $\widehat{L}$-модулей и построенные в обе стороны функторы фвляются взаимно сопряженными. Тем самым эквивалентность рассматриваемых категорий доказана. $\square$

Замечание 3. Рассмотрим конечномерные представления (бесконечномерной) алгебры $L \leftthreetimes F(I)$, где $F(I)$ – свободная алгебра Ли, порожденная I, при чем L действует на I естественным образом, а действие L на члены градуировки высших степеней определяется по правилу Лейбница. Тогда аналогично доказательству предудущей Леммы получаем, что категория конечномерных представлений $L \leftthreetimes F(I)$ эквивалентна категории пар (M, ϕ), где M – L-модуль , $\phi : I \otimes M \to M$, с морфизмами – коммутативными квадратами (2) (но без условия (1)).

Зафиксируем теперь до конца пункта полупростую алгебру Ли L и L-модуль I. Занумеруем теперь как-нибудь все попарно неэквивалентные неприводимые представления полупростой алгебры L (Это можно сделать, так как их счетное множество), представление с номером i будем обозначать M_i. Введем теперь для данной алгебры Ли с абелевым радикалом $L \leftthreetimes I$ счетный колчан K_I. Стрелок из точки k в точку l будет столько, какова кратность вхождения M_l в разложение $I \otimes M_k$. С этого момента буквы и до конца пункта буквы α и β будут означать стрелки K_I, а π будет означать пути длины 2. Для стрелки или пути μ обозначим $s(\mu)$ и $t(\mu)$ начало и конец μ соответственно. Таким образом, мы имеем:

$$I \otimes M_k \simeq \bigoplus_{k:s(\alpha)=k} M_{t(\alpha)} \tag{3}$$

Следующяя лемма является почти очевидной.

Лемма 2. *В вышепринятых обозначениях мы имеем:*

$$I \otimes I \otimes M_k \simeq \bigoplus_{\pi:s(\pi)=k} M_{t(\pi)}. \tag{4}$$

Доказательство. Пользуясь форулой (3) два раза, вычисляем:

$$I \otimes I \otimes M_k \simeq \bigoplus_{s(\alpha)=k} I \otimes M_{t(\alpha)} \simeq \bigoplus_{s(\alpha)=k} \bigoplus_{s(\beta)=t(\alpha)} M_{t(\beta)} \simeq \bigoplus_{s(\pi)=k} M_{t(\pi)}. \tag{5}$$

$\square$

Лемма 3. *(i)Категория конечномерных представлений колчана K_I эквивалентна категории $\mathcal{K}_I$ пар $(M, \phi : I \otimes M \to M)$, с морфизмами – коммутативными квадратами (2). (ii) Категория пар $(M, \phi : I \otimes M \to M)$ со свойством (1) эквивалентна категории конечномерных представлений колчана K_I с однородными соотношениями степени 2, причем размерность пространства соотношений на путях длины 2 из точки k в точку l равна кратности вхождения простого модуля M_l в разложение модуля $I \wedge I \otimes M_k$.*

Доказательство. (i)Рассмотрим пару $p_1 = (M, \phi : I \otimes M \to M)$. Разложим M в сумму неприводимых компонент:

$$M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i \otimes M_i,$$

где V_i – конечномерное пространство и $\dim(V_i)$ – кратность вхождения M_i в M. При этом в силу конечномерности лишь конечное число пространств V_i ненулевые. Тогда в силу формулы (3) мы имеем:

$$I \otimes M \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i \otimes I \otimes M_i \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{s(\alpha)=i} V_i \otimes M_{t(\alpha)} \tag{6}$$

Следовательно, отображение ϕ распадается в прямую сумму отображений из $V_i \otimes M_{t(\alpha)}$ для всех α таких, что $s(\alpha) = i$ в $V_j \otimes M_j$. В силу леммы Шура имеем, что для неизоморфных модулей $M_{t(\alpha)}$ и M_j (то есть в случае если $t(\alpha) \neq j$) существуют только нулевые морфизмы между $V_i \otimes M_{t(\alpha)}$ и $V_j \otimes M_j$, а для изоморфных морфизм имеет вид $A_{p_1,\alpha} \otimes \mathrm{id}$. Заметим, что построенный набор пространств $\{V_i\}$ и отображений $\{A_{p_1,\alpha}\}$ является представлением колчана K_I.

Рассмотрим морфизм пар из $p_1 = (M, \phi)$ в $p_2 = (N, \psi)$, то есть коммутативную диаграмму (2). Запишем разложения $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i \otimes M_i$, $N = \bigoplus_{i=1}^{\infty} U_i \otimes M_i$. Морфизм θ распадается в прямую сумму морфизмов из $V_i \otimes M_i$ в $U_j \otimes M_j$ и для $i \neq j$ это отображение может быть только нулевым, а для $i = j$ оно имеет вид $T_i \otimes \mathrm{id}$, где T_i – линейное отображение из V_i в U_i. Морфизм $\mathrm{id} \otimes \theta$ из диаграмы (2) тогда является прямой суммой морфизмов вида $T_i \otimes \mathrm{id}$ из $V_i \otimes M_{t(\alpha)}$ в $U_i \otimes M_{t(\alpha)}$ для $s(\alpha) = i$. Запишем теперь условие коммутативности диаграмы (2) на каждом подмодуле $V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)}$:

$$T_{t(\alpha)} \otimes \mathrm{id} \circ A_{p_1,\alpha} \otimes \mathrm{id} = A_{p_2,\alpha} \otimes \mathrm{id} \circ T_{s(\alpha)} \otimes \mathrm{id},$$

то есть:

$$T_{t(\alpha)} \circ A_{p_1,\alpha} = A_{p_2,\alpha} \circ T_{s(\alpha)}.$$

Но это – условие на то, что набор отображений $\{T_i\}$ пространств в точках колчана является морфизмом представлений колчана из $\{V_i, A_{p_1,\alpha}\}$ в $\{U_i, A_{p_2,\alpha}\}$. Тем самым мы получили отображение на объектах и морфизмах. Функториальность этого отображения очевидна.

Наоборот, рассмотрим представление $\{V_i, A_\alpha\}$ колчана K_I. Построим L-модуль $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i \otimes M_i$. Зададим морфизм $\phi : I \otimes M \to M$ на подмодулях $V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)} \to V_{t(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)}$ набором отображений $A_\alpha \otimes \mathrm{id}$. Тем самым мы задали отображение на объектах рассматриваемых категорий. Так же по морфизму $\{T_i\}$ представлений колчана построим морфизм пар, задав отображение на подпространствах $T_i \otimes \mathrm{id} : V_i \otimes M_i \to U_i \otimes M_i$. Как было показано выше, утверждение о том, что этот морфизм модулей задает морфизм пар, эквивалентно тому, что $\{T_i\}$ – морфизм представлений K_I. Тем самым мы построили функтор и нетрудно видеть, что построенные здесь функторы являются взаимно сопряженными. Следовательно, рассматриваемые категории эквивалентны.

(ii) Рассмотрим полную подкатегорию пар $p = (M, \phi : I \otimes M \to M)$ со свойством (1). В силу формулы (6) мы имеем:

$$I \otimes I \otimes M \simeq I \otimes \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigoplus_{s(\alpha)=i} V_i \otimes M_{t(\alpha)} \simeq I \otimes \bigoplus_{\alpha} V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)} \tag{7}$$

Применив результаты предыдущего пункта получаем, что образ одного прямого слагаемого $I \otimes V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)}$ под действием отображения $\mathrm{id} \otimes \phi$ будет лежать в $I \otimes V_{t(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)}$ и отображение на этом слагаемом будет иметь вид $\mathrm{id} \otimes A_{p,\alpha} \otimes \mathrm{id}$.

$$I \otimes V \otimes M_{t(\alpha)} \simeq V \otimes \bigoplus_{s(\beta)=t(\alpha)} M_{t(\beta)}.$$

Поэтому $I \otimes V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\alpha)} \simeq \bigoplus_{t(\alpha)=s(\beta)} V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\beta)}$ и отображение $\mathrm{id} \otimes \phi$ будет переводить прямое слагаемае $V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\beta)}$ в прямое слагаемое $V_{t(\alpha)} \otimes M_{t(\beta)}$ и иметь вид $A_{p,\alpha} \otimes \mathrm{id}$. Поэтому отображение $\phi \circ (\mathrm{id} \otimes \phi)$ на каждом прямом слагаемом $V_{s(\alpha)} \otimes M_{t(\beta)}$ (напомним, что $t(\alpha) = s(\beta)$) имеет вид $A_{p,\beta} A_{p,\alpha} \otimes \mathrm{id}$.

Рассмотрим ограничение отображения $\phi \circ (\mathrm{id} \otimes \phi)$ на $(I \wedge I) \otimes M$, то есть пару $p_1 = (M, \phi \circ (\mathrm{id} \otimes \phi))$. На прямых слагаемых оно имеет вид $A_{p_1,\gamma} \otimes \mathrm{id}$, где γ – стрелка в $K_{(I \wedge I)}$. Тогда условие (1) эквивалентно тому, что все $A_{p_1,\gamma} = 0$. Но по построению все $A_{p_1,\gamma}$ являются линейными комбинациями линейных отображений вида $A_{p,\beta} A_{p,\alpha}$. Следовательно, условие (1) эквивалентно некоторому набору линейных соотношений на $A_{p,\beta} A_{p,\alpha}$, причем для точек k и l количество соотношений для путей длины 2 равно кратности вхождения M_l в $(I \wedge I) \otimes M_k$. Поэтому эквивалентность категорий из пункта (i) задает эквивалентность полных подкатегорий пар с условием (1) и представлений колчана K_I с тербуемым в условии Леммы количеством соотношений длины 2 между каждой парой точек.

Тем самым доказательство Леммы завершено.

□

Теорема 1. *Категория конечномерных представлений $L \leftthreetimes F(I)$ эквивалентна категории представлений колчана K_I. Категория конечномерных представлений $L \leftthreetimes I$ эквивалентна категории представлений колчана K_I с набором соотношений второй степени, количество которых для путей из точки k в l равно кратности вхождения M_l в $(I \wedge I) \otimes M_k$.*

Доказательство. Утверждение Теоремы легко следует из Леммы 3, Замечания 3 и Леммы 1. □

4. Исследование представлений колчана K_I, дикость алгебр с абелевым радикалом

Из теоремы () следует, что если для колчана K_I алгебра $kK_I/rad(kK_I)^2$ дикая, то и алгебра $L \leftthreetimes I$ дикая, так как категория ее представлений эквивалентна категории представлений алгебры с факторалгеброй, изоморфной алгебре $kK_I/rad(kK_I)^2$. Очевидно, что $kK_I/rad(kK_I)^2$ дикая, если K_I дикий колчан без последовательных стрелок. В общем случае имеется следующий, принадлежащий Габриелю критерий того, что фактор по квадрату радикала алгебры путей колчана дикий. Ссылку на него найти не удалось, так что приведем набросок доказательства.

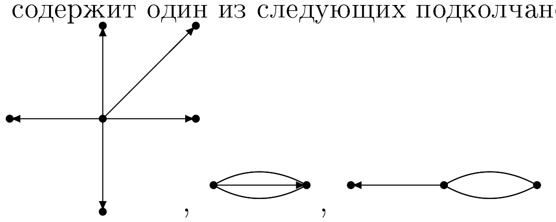
Предложение 4. *Пусть* Γ *– колчан. Тогда алгебра* $\mathbb{K}\Gamma/rad(\mathbb{K}\Gamma)^2$ *дикая тогда и только тогда, когда следующий колчан* Γ' *является диким. Точки* Γ' *– это точки* i', i'' *для каждой точки* i *из* Γ*. Стрелок из* i' *в* j'' *– столько, сколько из* i *в* j *в колчане* Γ*, и других стрелок нет.*

Для доказательства нужно взять представление Γ, в качестве пространства в каждой точке j'' взять сумму образов всех стрелок, входящих в j, а в качестве пространства в точках j' - фактор пространства в точке j по сумме этих образов. Таким образом получим все неразложимые представления Γ' кроме тривиальных в точках j''. Колчан Γ' называется дублем Габриэля колчана Γ.

Отсюда сразу же получаем следующее

Предложение 5. *Пусть* I *–* L*-модуль такой, что для него существует такой неприводимый* L*-модуль* M*, что* $I \otimes M$ *содержит 5 различных неприводимых компонент, или компоненту кратности не меньше 3, или компоненту кратности 2 и еще одну ненулевой кратности (и все эти компоненты отличны от* M*). Тогда алгебра* $L \leftthreetimes I$ *– дикая.*

Доказательство. В описанных выше случаях дубль Габриэля колчана K_I содержит один из следующих подколчанов:



Эти колчаны дикие [8].

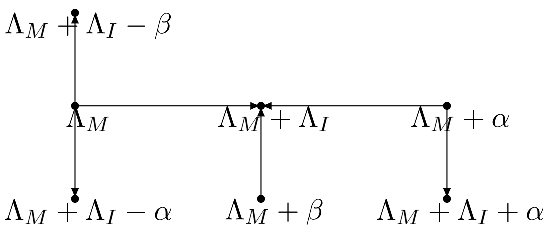
$\square$

Предложение 6. *Пусть* L *– полупростая алгебра Ли,* I *– простой* L*-модуль такой, что (i) для некоторых двух простых корней* $\alpha^\vee$*,* $\beta^\vee$*:* $\langle \Lambda_I, \alpha^\vee \rangle \geqslant 1$*,* $\langle \Lambda_I, \beta^\vee \rangle \geqslant 1$ *или (ii) для его старшего веса* Λ_I *и для некоторого простого корня* $\alpha^\vee$ *из подалгебры Картана верно* $\langle \Lambda_I, \alpha^\vee \rangle \geqslant 2$*, (iii) вообще модуль* I *простой имеющий размерность больше 2. Тогда алгебра* $L \leftthreetimes I$ *– дикая.*

Доказательство. Если для некоторых модулей N_1, N_2 со старшими весами $\Lambda_{N_1}, \Lambda_{N_2}$: $\langle \Lambda_{N_i}, \alpha^\vee \rangle \geqslant 1$, $i = 1, 2$, то тензорное произведение $N_1 \otimes N_2$ содержит в разложении простой модуль со старшим весом $\Lambda_{N_1} + \Lambda_{N_2} - \alpha$. Действительно, пусть n_1, n_2 – старшие вектора этих модулей. Рассмотрим вектор $\langle \Lambda_{N_2}, \alpha^\vee \rangle f_\alpha n_1 \otimes n_2 - \langle \Lambda_{N_1}, \alpha^\vee \rangle n_1 \otimes f_\alpha n_2$. Нетрудно видеть, что этот элемент имеет вес $\Lambda_{N_1} + \Lambda_{N_2} - \alpha$, ненулевой, так как $f_\alpha n_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\langle \Lambda_{N_i}, \alpha^\vee \rangle = 0$, и обнуляется всеми положительными корнями. Следовательно, он является старшим весовым элементом некоторого простого подмодуля.

Если же $\langle \Lambda_{N_i}, \alpha^\vee \rangle \geqslant 2$, то все элементы $f_\alpha f_\alpha n_1 \otimes n_2$, $f_\alpha n_1 \otimes f_\alpha n_2$, $n_1 \otimes f_\alpha f_\alpha n_2$ ненулевые. Для простого корня $\beta \neq \alpha$ e_β обнуляет все эти элементы, так как коммутирует с f_α. Элемент e_α переводит пространство, порожденное этими элементами в двумерное. Поэтому существует линейная комбинация элементов $f_\alpha f_\alpha n_1 \otimes n_2$, $f_\alpha n_1 \otimes f_\alpha n_2$, $n_1 \otimes f_\alpha f_\alpha n_2$, обнуляемая этим элементом. Но тогда эта линейная комбинация обнуляется всеми положительными корнями, то есть является старшим весом некоторого простого подмодуля. Поэтому тензорное произведение $N_1 \otimes N_2$ содержит простое прямое слагаемое со старшим весом $\Lambda_{N_1} + \Lambda_{N_2} - 2\alpha$.

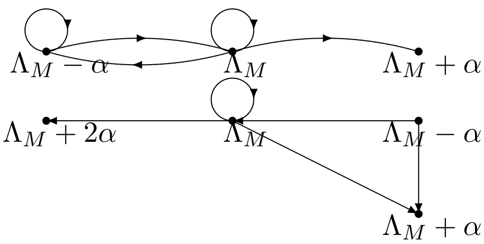
(i)Рассмотрим простой модуль M такой, что для его старшего веса Λ_M формы $\Lambda_M + \alpha$, $\Lambda_M + \beta$ также являются доманинтными и $\langle \Lambda_M, \alpha^\vee \rangle \geqslant 1$, $\langle \Lambda_M, \beta^\vee \rangle \geqslant 1$. По доказанному выше тензорное произведение $I \otimes M$ содержит в разлодении подмодули со старшими весами $\Lambda_M + \Lambda_I - \alpha$, $\Lambda_M + \Lambda_I - \beta$. Также это произведение содержит простой подмодуль со старшим весом $\Lambda_M + \Lambda_I$. Далее, для модуля N со старшим весом $\Lambda_M + \alpha$ в разложении $I \otimes N$ есть подмодули со старшими весами $\Lambda_M + \Lambda_I$, $\Lambda_M + \Lambda_I + \alpha$, и для модуля со старшим весом $\Lambda_M + \beta$ один из простых подмодулей разлодения тензорного произведения этого модуля на I имеет старший вес $\Lambda_M + \Lambda_I$ (так как $\langle \Lambda_M + \alpha, \alpha^\vee \rangle \geqslant 1$, $\langle \Lambda_M + \beta, \beta^\vee \rangle \geqslant 1$). Все эти модули различны в силу свойств рассматриваемого модуля I, кроме случая $I = \alpha + \beta$. Поэтому колчан K_I содержит следующий подколчан:



В случае $I = \alpha + \beta$ дубль Габриеля колчана K_I будет содержать рассматриваемый колчан.

Этот колчан дикий и без последовательных стрелок, поэтому в силу Теоремы (4) алгебра $L \leftthreetimes I$ – дикая.

(ii) Пусть M – такой простой модуль, что для его старшего веса Λ_M форма $\Lambda_M - 2\alpha$ также является доманинтной. Тогда $\langle \Lambda_M - \alpha, \alpha^\vee \rangle \geqslant 1$, следовательно, по доказанному выше $I \otimes M$ содержит в разложении простые модули весов $\Lambda_M + \Lambda_I$, $\Lambda_M + \Lambda_I - \alpha$, $\Lambda_M + \Lambda_I - 2\alpha$, а произведение модуля со старшим весом $\Lambda_M - \alpha$ на I содержит подмодули со старшими весами $\Lambda_M + \Lambda_I - \alpha$, $\Lambda_M + \Lambda_I - 2\alpha$. Поэтому в зависимости от того, равняется ли Λ_I α,2α или ни тому, ни другому, K_I содержит один из следующих подколчанов:



$$\begin{tikzcd}
\Lambda_M + \Lambda_I & \Lambda_M \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda_M + \Lambda_I - 2\alpha \\
& \Lambda_M + \Lambda_I - \alpha & \Lambda_M - \alpha \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

У всех этих колчанов дикий фактор по квадрату радикала (так как дикий дубль Габриэля). Поэтому алгебра $L \leftthreetimes I$ – дикая.

(iii) Из вышедоказанного следует, что алгебра Ли $L \otimes I$, где L – полупростая, I – L-модуль, дикая, если в разложении I присутствует нефундаментальное представление. Напомним, что представление называется фундаментальным, если его старший вес обнуляет все элементы h_α для простых весов α, кроме одного, на котором принимает значение 1.

Рассмотрим фундаментальное представление I. Пусть m – его старший весовой вектор. Пусть α – такой (единственный) вес, что $f_\alpha m \neq 0$. Если это представление не двумерно, то существует такой вес β, что $f_\beta f_\alpha m \neq 0$. Пусть теперь N – такой L-модуль, что для его старшего весового вектора n элементы $f_\alpha f_\beta n$ и $f_\beta f_\alpha n$ линейно независимы и то же самое верно для модуля со старшим весом $\Lambda_N + \alpha$. Рассмотрим элементы тензорного произведения $I \otimes N$ веса $\Lambda_N + \Lambda_I - \alpha - \beta$: $f_\alpha f_\beta m \otimes n$, $f_\beta m \otimes f_\alpha n$, $m \otimes f_\alpha f_\beta n$, $m \otimes f_\beta f_\alpha n$. Они линейно независимы. Непосредственным вычислением получаем, что оператор умножения на e_α имеет на этом пространстве одномерный образ, а оператор умножения на e_β – двумерный. Поэтому ядра этих операторов имеют ненулевое пересечение, следовательно, существует ненулевой элемент веса $\Lambda_N + \Lambda_I - \alpha - \beta$, обнуляемый всеми положительными корнями. Поэтому в рассматриваемом тензорном произведении существует простой подмодуль с рассматриваемым старшим весом. Поэтому аналогично предыдущему пункту получаем в колчане K_I один из описанных в предыдущем пункте подколчанов. Следовательно, если модуль I простой и имеет размерность больше 2, то алгебра $L \leftthreetimes I$ – дикая. $\square$

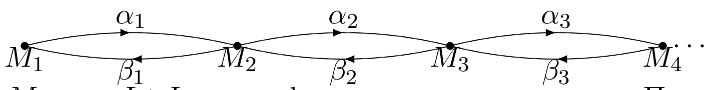
Если модуль I не является простым, $I = J \oplus J'$, то алгебра $L \leftthreetimes J$ является факторалгеброй $L \leftthreetimes I$. Поэтому из Предложения 6 следует, что алгебра $L \leftthreetimes I$ дикая, если одно из неприводимых прямых слагаемых модуля I имеет размерность больше двух.

4.1. **Случай двумерного модуля.**

Лемма 4. *Алгебры Ли с двумерным абелевым радикалом дикие.*

Доказательство. Если радикал приводим как модуль над полупростой частью, то есть распадается в прямую сумму двух одномерных, то колчан K_I представляет собой несвязное объединение точек с двумя петлями, так как тензорное произведение любого модуля N на одномерный изоморфно N. $I \wedge I$ одномерен, поэтому получаем задачу описания представлений пары матриц с одним однородным соотношением второый степени. Эта задача дикая при любом соотношении в силу работы [6]. Остается случай двумерного неприводимого модуля. Двумерный неприводиый модуль I бывает только над алгебрами Ли вида $L = sl_2 \oplus \widehat{L}$, $\widehat{L}$ – полупростая, действующая на I тривиально. В этом случае $L \leftthreetimes I \simeq sl_2 \leftthreetimes I \oplus \widehat{L}$. Вследствие Предложения 3, прямая сумма полупростой и ручной алгебр Ли – ручная. Поэтому достаточно иследовать алгебру $sl_2 \leftthreetimes I$.

Рассмотрим случай двумерного модуля над sl_2. В силу формулы Клебша-Гордона колчан K_I для двумерного имеет вид:

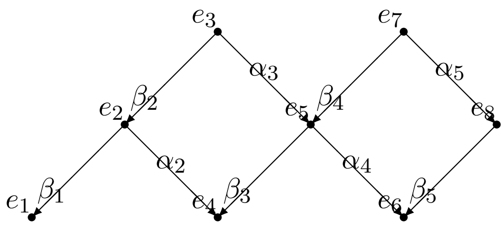


Модуль $I \wedge I$ изоморфен одномерному модулю. Поэтому соотношения будут только вида $k_i\alpha_i\beta_i + l_i\beta_{i+1}\alpha_{i+1} = 0$ при некоторых константах k_i и l_i. Эта задача дикая при любых константах, так как у подколчана на ее 6 последовательных точках имеется накрывающая, у которой форма Титса не является неотрицательно определенной.

Форма Титса для колчана с соотношениями – это следующая квадратичная форма на пространстве $\mathbb{K}^n$, где n – число точек колчана. Пусть $\{v_1, \dots v_n\}$ – базис пространства $\mathbb{K}^n$, $\{e_1, \dots e_n\}$ – множество точек колчана, l_{ij} – размерность пространства стрелок из e_i в e_j, r_{ij} – размерность пространства соотношений на пути из e_i в e_j. Тогда форма Титса – это следующая квадратичная форма:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}(l_{ij} + l_{ji})\alpha_i\alpha_j + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}(r_{ij} + r_{ji})\alpha_i\alpha_j.$$

Искомая накрывающая алгебра – это алгебра следующего колчана Q с соотношениями:



,

с одним линейным соотношением на $\beta_2\alpha_2$, $\alpha_3\beta_3$ и одним соотношением на $\beta_4\alpha_4$, $\alpha_5\beta_5$, а именно $k_2\alpha_2\beta_2 + l_2\beta_3\alpha_3 = 0$ и $k_4\alpha_4\beta_4 + l_4\beta_5\alpha_5 = 0$.

Форма Титса этого колчана принимает отрицательное значение на векторе $v_1 + 2v_2 + 2v_3 + 2v_4 + 4v_5 + 2v_6 + 2v_7 + 2v_8$.

Опишем функтор из категории представлений рассмартивемого колчана в категорию представлений подколчана K_I, содержащего точки, соответствующие модулям размерности от 1 до 6, и все стрелки между этими точками. Пусть U – некоторое представление колчана Q, U_i – пространства в точках, U_α – отображения между ними. Положим $V_1 = U_1$, $V_2 = U_2$, $V_3 = U_3 \oplus U_4$, $V_4 = U_5$, $V_5 = U_6 \oplus U_7$, $V_6 = U_8$. Далее, положим $V_{\alpha_1} = 0$, $V_{\beta_1} = U_{\beta_1}$, $V_{\alpha_2} = (0, U_{\alpha_2})$, $V_{\beta_2} = (0, U_{\beta_2})^t$, $V_{\alpha_3} = (U_{\alpha_3}, 0)$, $V_{\beta_3} = (U_{\beta_3}, 0)^t$, $V_{\alpha_4} = (0, U_{\alpha_4})$, $V_{\beta_4} = (0, U_{\beta_4})^t$, $V_{\alpha_5} = (U_{\alpha_5}, 0)$, $V_{\beta_5} = (U_{\beta_5}, 0)^t$, где запись (a, b) означает отображение a в первое прямое слагаемое и отображение b во второе, а запись $(a, b)^t$ означает сумму отображиний из первого и второго прямых слагаемых.

Непосредственно проверяется, что построенное отображение действительно задает функтор из категории представлений одного колчана в категорию представлений другого и тот факт, что этот функтор переводин неразложимые представления в неразложимые и неизоморфные в неизоморфные.

Поэтому алгебра $sl_2 \leftthreetimes I$ дикая.

□

Следовательно, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $L = \widehat{L} \leftthreetimes I$ – алгебра Ли с абелевым радикадом. Тогда L ручная тогда и только тогда, когда модуль I – одномерный. В противном случае L – дикая.*

Доказательство. Если размерность I больше одного, то L – дикая по Лемме (4) или Предложению (6). □

5. Случай неабелевого радикала

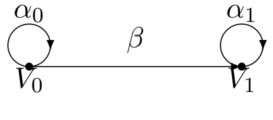
Рассмотрим теперь алгебры Ли с неабелевым радикалом. Алгебра $L/[R,R]$ имеет абелев радикал. Если она дикая, то и L – дикая. Теперь рассмотрим алгебры с ручным фактором по квадрату радикала. Все такие факторалгебры описываются Теоремой 2.

5.1. **Алгебры с одномерным фактором радикала по квадрату радикала.** Теперь рассмотрим случай, когда фактор радикала по его квадрату – одномерен. Будем считать алгебру L неразрешимой. Очевидно, чтобы доказать дикость таких алгебр, достаточно доказать дикость их факторов по второй производной радикала. Поэтому будем считать, что квадрат радикала – абелев.

Рассмотрим расширения при помощи модуля J алгебр вида $L_0 \oplus I$, где L_0 – полупроста, I – одномерна. Очевидно, что модуль J можно считать неприводимым (если нет – можно перейти к факторалгебре), то есть, в силу Предложения 3, просто L_0-модулем, на котором некоторая образующая I действует тождественным либо нулевым образом. Во втором случае получаем алгебру с абелевым радикалом размерности больше, чем 1. Поэтому все такие алгебры – дикие в силу теоремы 2. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда J является неприводимым L_0-модулем и некоторая образующая I действует на этом модуле тождественно. Кроме того, расширение можно считать полупрямым произведением, так как алгебра $L_0 \oplus I$ имеет тривиальные вторые когомологии (см, например, [10]). Теперь достаточно доказать следующее предложение.

Предложение 7. *Пусть $L = (L_0 \oplus I) \leftthreetimes J$ – алгебра Ли такая, что L_0 – полупроста, I – одномерна, J – неприводимый L_0-модуль, на котором образующая I действует тождественно. Тогда L – дикая.*

Доказательство. Рассмотрим следующий колчан Q с соотношениями:



$\alpha_1\beta = \beta\alpha_0 + \beta$.

Этот колчан дикий (см., например, [5]). Построим функтор из категории представлений этого колчана в категорию представлений алгебры $L = (L_0 \oplus I) \leftthreetimes J$. Пусть $(V_0, V_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$ – представление рассматривыемого колчана, где V_0, V_1 – пространства в точках, $\alpha_i : V_i \to V_i$, $\beta : V_0 \to V_1$. Построим следующее представление алгебры L:

$M = V_0 \oplus V_1 \otimes J$ как L_0-модули. Выберем некоторую образующую I, $I = \langle e \rangle$ и положим для $v_k \in V_k$, и $j, j' \in J$: $e \cdot v_0 = \alpha_i(v_0)$, $e \cdot v_1 \otimes j = \alpha_1(v_1) \otimes j$, $j \cdot v_0 = \beta(v_0) \otimes j$, $j \cdot v_1 \otimes j' = 0$. Легко проверяется, что это представление и что естественно определенное отображение на морфизмах задает точный функтор F. Предположим, что построенное представление разложимою Пусть элемент $v_0 + v_1 \otimes j$ принадлежит одному прямому слагаемомуб $v_0 + v_1 \otimes j \in U'$. Тогда умножением на элементы из полупростой алгебры L_0 мы получим, что $v_1 \otimes J \subseteq U'$, в частрости, $v_1 \otimes j \in U'$, а значит и $v_0 \in U'$. Поэтому прямые слагаемые имеют вид $U_0' \oplus U_1' \otimes J$, $U_0'' \oplus U_1'' \otimes J$. Очевидным образом получаем, что пространства U_0', U_0'' инвариантны под действием α_0, U_1', U_1'' под действием α_1, и β переводит U_0' в U_1' и U_0'' в U_1''. Поэтому мы получили разложение представления колчана. Следовательно, построенный функтор переводит неразложимые представления в неразложимые.

Рассмотрим произвольный морфизм θ L-модулей рассматриваемого вида, назовем эти модули $U_0 \oplus U_1 \otimes J$ и $V_0 \oplus V_1 \otimes J$. Тогда, в силу Леммы Шура получаем, что $\theta(U_0) \subseteq V_0$, $\theta(U_1 \otimes J) \subseteq V_1 \otimes J$, при чем для некоторого линейного оператора верно, что $\theta(U_1 \otimes J) = \eta(U_1) \otimes J$. Непосредственно проверяется, что $\theta|_{U_0}, \eta$ задает представление рассматриваемого колчана с соотношениями, данное отображение функториально и является сопряженным функтором к рассматриваемому, если рассматривать его как функтор на полную подкатегорию модулей вида $U \oplus U \otimes J$. Поэтому построенный нами функтор является вложением категорий.

Из этого следует, что все алгебры вида $L = (L_0 \oplus I) \leftthreetimes J$ – дикие.

□

Замечание 4. Из результатов этого параграфа и Теоремы 2 следует, что все алгебры Ли с неабелевым радикалом – дикие.

5.2. **Основная теорема.** Из всего доказанного выше следует следующая теорема:

Теорема 3. *Ручными являются следующие алгебры Ли:*

1) полупростые;

2) одномерная алгебра;

3) прямые суммы полупростых с одномерной.

Все остальные – дикие.

Доказательство. Все полупростые алгебры ручные в силу классической теории представлений алгебр Ли. Все разрешимые алгебры – дикие в силу Предложения 2.

Будем теперь считать, что данная алгебра не содержит разрешимых прямых слагаемых.

Рассмотрим разложение Леви данной алгебры Ли $\widehat{L}$: $\widehat{L} = L \leftthreetimes R$, L – полупростая, R – радикал. Если $R/[R,R]$ – одномерна, то, в силу предложений 7 и 3, L дикая тогда и только тогда, когда R – не одномерен, и ручная, когда R – одномерен.

Пусть теперь $\dim I = \dim R/[R,R] > 1$. Тогда $L/[R,R]$ – дикая в силу Теоремы 2. Поэтому L – тоже дикая.

□

Замечание 5. В работе [10] приведен список конечномерных алгебр Ли, имеющих тривиальные вторые когомологии в любом конечномерном модуле. Этот список совпадает со списком ручных алгебр Ли. Таким образом, конечномерная алгебра Ли является ручной тогда и только тогда, когда она имеет тривиальные вторые когомологии в любом конечномерном модуле.

Автор выражает благодарность профессору Ю. С. Самойленко за постановку задачи и помощь при написании работы, профассору С. А. Овсиенко за помощь в некоторых доказательствах и рецензенту за ценные замечания.

Список литературы

[1] Гельфанд И. М, Пономарев В. А. Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве. Функц. Анализ и его приложения 3, вып 4 (1969), 81-82.
[2] Дрозд Ю. А. Ручные и дикие матричные задачи. Акад. наук Украины, инст. мат., Киев, 1977, 104-114.
[3] Дрозд Ю. А. Представления коммутативных алгебр. Функц. Анализ и его приложения 6, вып 4 (1973), 41-43.
[4] On Cohen–Macaulay Modules on Surfase Singularities Yuriy A. Drozd, Gert-Martin Greuel, and Irina Kashuba Moscow Mathematical Journal, Vol. 3, No 2, (2003), 397–418.
[5] Yang Han, Wild Two-Point Algebras, Journal of Algebra 247, p. 57-77 (2002)
[6] Самойленко Ю. С., Островский В. Л. О паре операторов, связанных квадратичным соотношением. Функц. Анализ и его приложения.
[7] Гото, Гроссханс. Полупростые алгебры Ли. Мир, 1981.
[8] Назарова Л. А. Представления колчанов бесконечного типа. Известия академии наук СССР. 37 (1973), 752-791.
[9] Gabriel P, Roiter A. V. Representations of finite dimensionak algebras. - Encuclopaedia of Math. Sci. (Algebra 8). - 73. - Springer-Verlag, Berlin, 1992, 177 p.
[10] Zusmanovich P. A converce to the second Whitehead Lemma. J. Lie Theory, 2008, vol. 18, pp. 295-299.
[11] Morita K (1958). Duality of modules and its applications to the theory of rings with minimal condition. Science reports of the Tokyo Kyoiku Diagaku. Section A 6(150):83-142.

Механико-математический факультет, КНУ им. Т. Г. Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01033, Украина
E-mail address: makedonskyi@univ.kiev.ua