

УДК 551.515.3;517.958

## ОБЪЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНОЙ СТРУКТУРЫ АТМОСФЕРНЫХ ФРОНТОВ

© 2012 г. Ф. Л. Быков, В. А. Гордин

Научно-исследовательский университет – Высшая школа экономики

109028 Москва, Покровский б-р, 11

Гидрометцентр России

123376 Москва, Большой Предтеченский пер., 9-13

E-mail: vagordin@mail.ru

Поступила в редакцию 15.10.2010 г.

Предложена вычислительная методика диагностики трехмерной геометрии атмосферных фронтов по полям температуры, ветра и геопотенциала на трехмерной регулярной сетке. Обсуждается сам критерий, по которому диагностируется фронт. Веса, с которыми входит информация об указанных полях, оптимизируются, исходя из максимального различия между корреляционными функциями: а) для пар частиц, разделенных фронтом и б) для пар из одной синоптической массы. Эти веса получились различными для различных барических уровней. Оценка корреляционных функций и оптимизация весов проводилась на архиве полей объективного анализа NCEP на полуградусной широтно-долготной сетке и данных аэрологических наблюдений. Приведены результаты численных экспериментов построения атмосферных фронтов. Применение описанной методики к полям прогноза на срок до 36 часов показало, что ошибки прогностической модели вносят сравнительно слабое искажение в геометрию атмосферных фронтов.

**Ключевые слова:** контактный разрыв, предиктор, гессиан, корреляционная функция, компактная схема, ветер, геопотенциал, температура.

### ВВЕДЕНИЕ

Эволюция атмосферы описывается системой уравнений газовой динамики, в которую добавлены “неадиабатические” слагаемые, описывающие турбулентную вязкость, солнечную радиацию, фазовые переходы и т. п. В идеальной системе (т. е. без этих добавок) можно классифицировать разрывы в решениях этой квазилинейной системы уравнений в частных производных: ударные волны и тангенциальные разрывы.

Ударные волны могут быть природными или техногенными и распространяются со звуковой скоростью. Протяженные (порядка тысяч километров) тангенциальные разрывы интерпретируются как атмосферные фронты.

В поле ветра на линии атмосферного фронта составляющая ветра, касательная к этой линии, разрывна, а перпендикулярная – непрерывна, но имеет излом. Температура разрывна. Давление и геопотенциал имеют излом. В природе атмосферный фронт, хорошо выраженный в одном поле, необязательно выражен в другом. Для практического численного анализа геометрии фронта нужно использовать всю доступную информацию о метеополях.

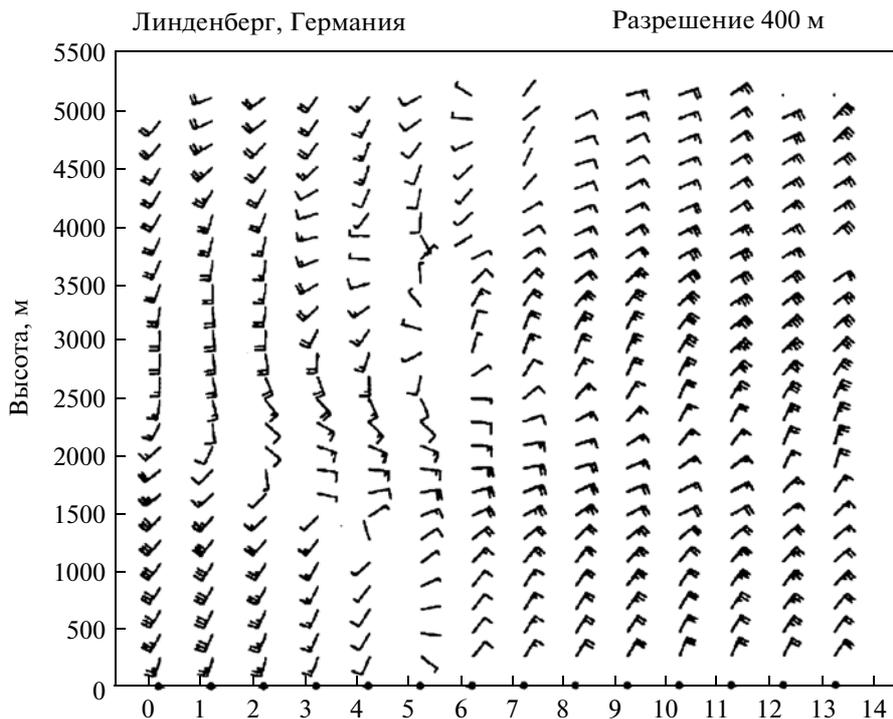
Настоящая работа посвящена диагностике атмосферных фронтов по данным объективного анализа ветра, геопотенциала и температуры на

регулярной трехмерной сетке в  $p$ -системе координат. Разработанная методика применима и к аналогичным прогностическим полям.

В идеальной трехмерной модели [1] атмосферный фронт – поверхность в трехмерном пространстве, наклоненная по отношению к уровню моря. Типичный угол ее наклона  $\sim 1^\circ$ .

Для идеальной системы можно доказать неустойчивость тангенциальных разрывов по отношению к малым возмущениям [2]. Но в модели вязкой и учитывающей вертикальную стратификацию атмосферы тангенциальные разрывы вполне могут существовать конечное время, что и подтверждается метеорологическими наблюдениями. Вместо двумерной поверхности в моделях, учитывающих турбулентную вязкость (и в реальной атмосфере) приходим к “размазыванию” атмосферного фронта; до зоны шириной в несколько десятков километров (редко менее километра), которая может перемещаться со временем.

Двумерную задачу диагностики можно сформулировать как поиск положения линий (полос) пересечения атмосферных фронтов с барической поверхностью  $p = \text{const}$ , с уровнем в  $\sigma$ -системе координат, с поверхностью Земли, с реальным или воображаемым уровнем моря по данным на дискретном множестве точек, в которых распо-



**Рис. 1.** Из [6]. Поле горизонтального ветра (обозначение стрелками), измеренное профайлером во время прохождения атмосферного фронта над станцией Линденберг (Германия) в переменных  $t$  (ч),  $z$  (м). Длинное перо на стрелке соответствует 5 м/с, а короткое – 2.5 м/с.

жены пункты наблюдения, или на регулярной прогностической сетке.

При трехмерном объективном анализе нужно также установить связь между фронтальными линиями на смежных барических уровнях и построить наклонную поверхность в трехмерном пространстве – атмосферный фронт. При этом искомая поверхность может не быть гладкой и иметь особенности, дыры и т. п.

На рис. 1 показан пример динамики поля горизонтального ветра, направление которого поменялось с южного и юго-западного на северо-восточное. Время смены направления на противоположное на каждой высоте занимало 1–2 часа, при том что компонента скорости ветра, нормальная к фронту, была весьма мала. Вертикально-временная геометрия происходящих на рис. 1 изменений достаточно сложная, следовательно, нельзя предполагать, что глобально фронтальная поверхность хорошо аппроксимируетсядвигающейся наклонной плоскостью. С другой стороны, результаты измерения на соседних уровнях здесь достаточно близки. Следовательно, примерно такая густота вертикальных уровней требуется для адекватного описания геометрии атмосферного фронта.

В [3] предлагаются следующие определения для свободной атмосферы: бароклинная зона (обычная ее ширина 200–800 км), когда  $|\nabla T| > 1^\circ\text{C}/100 \text{ км}$ ; фронтальная зона (50–200 км) – когда  $|\nabla T| > 3^\circ\text{C}/100 \text{ км}$ . Предлагаемые нами критерии фронта существенно более сложны, но дают лучшие результаты.

Для диагностики геометрии фронта предстоит найти “оптимальный” критерий фронта. По нашему мнению, критерием оптимальности можно считать адекватность получившегося разделения проведенными фронтами синоптических воздушных масс. Иначе говоря, критерий фронта должен быть таким, чтобы разница между корреляционными функциями для основных метеорологических полей в двух случаях: а) соответствующие точки разделены построенной линией; б) не разделены, – была наибольшей.

### 1. ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНЫХ МЕТЕОПОЛЕЙ И ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЕЙ ПРЕДИКТОРОВ АТМОСФЕРНОГО ФРОНТА

В этом параграфе по каждому из основных метеорологических полей построим поле предиктора – скалярное поле, большие значения которого должны означать большую вероятность того, что где-то поблизости проходит атмосферный фронт.

Подчеркнем: термин “предиктор” здесь никак не связан с прогнозом.

### 1.1. Атмосферный фронт в поле давления

Известно (см., например, [4, 5]), что в поле  $p_s$  атмосферный фронт проявляется как “скрытая ложбина”. В классическом подходе по сеточным значениям оценивают лапласиан  $\Delta p_s$ , который на линии фронта принимает большие значения.

В случае ложбины велика (по сравнению со вторыми производными в точках, не лежащих на фронте) вторая производная только в направлении, перпендикулярном линии фронта. Лапласиан же представляет собой сумму вторых производных  $p_s$  в двух ортогональных направлениях, например, вдоль и поперек фронта. Вторая производная  $p_s$  вдоль фронта заурядна, и если считать ее статистически независимой от второй производной в ортогональном направлении, добавление ее в предиктор ложбины ухудшает его качество в среднем в  $\sqrt{2}$  раз.

Чтобы “избавиться” от второй производной вдоль фронта, будем использовать иной функциональный показатель: наибольшее собственное число  $L(x, y)$  матрицы Гессе – матрицы вторых производных, которая в случае плоскости и сферы имеет вид:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p_s}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 p_s}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ и} \quad H(\lambda, \varphi) = \quad (1)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{\sin \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial p_s}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 p_s}{\partial \lambda^2} \right) & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} \right) & \frac{\partial^2 p_s}{\partial \varphi^2} \end{vmatrix}$$

соответственно.

Для вычисления функции  $L(x, y)$  необходимо сначала оценить все вторые производные. На сфере их вычисляем при помощи специального дискретного преобразования Фурье (см. п. 1.4), а на плоскости – при помощи компактных схем [7].

### 1.2. Дискретное преобразование Фурье для функций на двумерной сфере. Вычисление их производных

Пусть  $A_n$  – евклидово пространство функций на правильном  $n$ -угольнике. Функции  $\{\exp ijx\}_{j=0}^{n-1}$  образуют в этом пространстве ортогональный базис. Преобразование Фурье функции  $f(x) \in A_n$  есть набор коэффициентов разложения функции  $f(x)$  в про-

странстве функций по этому базису  $\tilde{f}(j) = F_{x \rightarrow j}[f(x)]$ :

$$\tilde{f}(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) e^{-ix_k j}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Аналогично, обратное преобразование Фурье (прообраз) есть  $f(x_k) = F_{j \rightarrow x}^{-1}[\tilde{f}(j)]$ :

$$f(x_k) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{f}(j) e^{ix_k j}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Если  $f$  принимает только действительные значения, то для любого  $1 \leq j < n$  числа  $\tilde{f}(j)$  и  $\tilde{f}(n+1-j)$  комплексно сопряжены друг с другом.

Образ преобразования Фурье производной  $\frac{\partial^s}{\partial x^s} f(x)$  при  $f \in A_n$  равен  $(ij)^s \tilde{f}(j)$ . Поэтому:

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} f(x) = F_{j \rightarrow x}^{-1} \left[ (ij)^s F_{x \rightarrow j}(f(x)) \right]. \quad (2)$$

Теперь мы можем вычислить производную по долготе любого порядка от функции, дискретно заданной на сфере.

В метеорологических задачах на глобусе преобразование Фурье по долготе оказывается естественным и полезным. Однако при приближении к полюсу шаг сетки уменьшается многократно, поэтому чем ближе к полюсу, тем больше мод по долготе нужно обнулять (так как моды большими номерами связаны по большей части с ошибками дискретизации, производимой при передаче по каналам связи). Мы не обнуляли моды с индексом, меньшим  $m = 2 + m_{\max}(n-1)\sin\varphi$ , где  $\varphi$  – коширота,  $m_{\max} = 1/2$  при вычислении градиента температуры и  $m_{\max} = 1/4$  в остальных случаях. Кроме того, для сглаживания результата,  $j$ -я мода после дифференцирования домножалась на  $\cos \frac{\pi(j-1)}{2m}$ .

### 1.3. Вычисление производных по широте при помощи преобразования Фурье

Рассмотрим гладкую скалярную функцию на сфере  $P(\lambda, \varphi)$  и результат ее преобразования Фурье по долготе  $f_j(\varphi) = F_{\lambda \rightarrow j}[P(\lambda, \varphi)]$ . Асимптотика в точке полюса (т.е. при  $\varphi \rightarrow 0$ ) для  $j$ -й моды имеет вид, см. [8–10]:

$$f_j(\varphi) = \gamma_0 \varphi^j + \gamma_1 \varphi^{j+2} + \gamma_2 \varphi^{j+4} + \dots \quad (3)$$

Относительно точки полюса нечетная мода ведет себя как нечетная функция, т.е. функция

$$\hat{f}_j(\varphi) = \begin{cases} f(\varphi) & \varphi \in [0, \pi] \\ -f(-\varphi) & \varphi \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

гладка в полюсах  $\varphi = 0, \pi$ , и ее можно рассматривать как гладкую функцию на окружности

$\varphi \in [-\pi; \pi]$ . Четная мода относительно точек полюсов — четная функция, и значит, функция

$$\hat{f}_j(\varphi) = \begin{cases} f(\varphi) & \varphi \in [0; \pi], \\ f(-\varphi) & \varphi \in [-\pi; 0] \end{cases}$$

гладка в точках  $\varphi = 0, \pi$ , и ее тоже можно рассматривать как гладкую функцию на окружности.

Функцию кошироты  $\hat{f}_j(\varphi)$  можно дифференцировать с помощью преобразования Фурье: продифференцировав периодическую функцию  $\hat{f}_j(\varphi)$  согласно (2), ограничим результат на отрезок  $[0; \pi]$  и получим искомую производную  $f_j'(\varphi)$  при  $\varphi \in [0; \pi]$ .

В случае же, когда вместо скалярной функции рассматривается одна из компонент гладкого векторного поля на сфере (нас интересует поле ветра), асимптотики для  $j$ -й моды в окрестности полюса таковы, см. [10]:

$$f(\varphi) = \begin{cases} \gamma_1 \varphi^{j-1} + \gamma_2 \varphi^{j+1} + \gamma_3 \varphi^{j+3} + \dots, & j > 0 \\ \gamma_1 \varphi + \gamma_2 \varphi^3 + \gamma_3 \varphi^5 + \dots, & j = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Это позволяет использовать тот же алгоритм от компонент векторного поля для вычисления производных, что и для скалярных функций, поменяв местами случаи четной и нечетной моды. Более подробно граничные условия и асимптотики для векторных полей в окрестности полюса рассмотрены в [8].

#### 1.4. Более экономичный способ вычисления производной по широте

Приведем способ вычисления производной по кошироте, не требующий вычисления прямого и обратного преобразований Фурье по долготе, а значит, более быстрый, чем в п. 1.3.

Будем в случае дифференцирования по кошироте скалярной функции рассматривать функцию на данном меридиане, дополненную до периодической значениями на противоположном меридиане

$$\hat{f}(\lambda, \varphi) = \begin{cases} f(\lambda, \varphi), & \varphi \in [0, \pi], \lambda \in [0, 2\pi), \\ f(\lambda + \pi, -\varphi), & \varphi \in [-\pi, 0], \lambda \in [0, \pi], \\ f(\lambda - \pi, -\varphi), & \varphi \in [-\pi, 0], \lambda \in [\pi, 2\pi). \end{cases} \quad (5)$$

А в случае компонент векторного поля — обратными к ним:

$$\hat{f}(\lambda, \varphi) = \begin{cases} f(\lambda, \varphi), & \varphi \in [0, \pi], \lambda \in [0, 2\pi), \\ -f(\lambda + \pi, -\varphi), & \varphi \in [-\pi, 0], \lambda \in [0, \pi], \\ -f(\lambda - \pi, -\varphi), & \varphi \in [-\pi, 0], \lambda \in [\pi, 2\pi). \end{cases} \quad (6)$$

Знак минус появляется в (6) из-за того, что при переходе через полюс положительное направление зональной и меридиональной компонент ветра в сферических координатах изменяется на противоположное.

На используемых в настоящее время широтно-долготных сетках в оперативных схемах анализа и прогноза число точек по долготе четно, и значения сеточной функции на меридиане, противоположном данному, также известны. Продолжения функций (5), (6) индуцированы отображением сферы в тор, на котором все значения исходной функции повторены дважды. Для перехода обратно на сферу достаточно ограничить функцию на положительные значения  $\varphi$ .

#### 1.5. Экстраполяция в точки полюса

Во многих формулах, приведенных ниже, присутствует операция деления на  $\sin \varphi$ , неопределенная в точках полюсов. Однако во всех этих формулах числитель в точке полюса тоже равен нулю. Чтобы произвести деление в точке полюса, сделаем это сначала во всех остальных точках, а затем экстраполируем<sup>1</sup> по кошироте результат в точки полюсов, используя асимптотики (3) или (4).

Построим формулы пятого порядка точности для экстраполяции гладкой скалярной функции в точку Северного полюса. Все моды с ненулевым индексом по долготе,  $j \neq 0$ , в точках полюсов равны нулю. Перепишем формулу (3) для  $j = 0$ :

$$f_0(\varphi) = \gamma_0 + \gamma_1 \varphi^2 + \gamma_2 \varphi^4 + O(\varphi^6).$$

Значения нулевой моды  $y_1 = f_0(h)$ ,  $y_2 = f_0(2h)$ ,  $y_3 = f_0(3h)$  предполагаем известными. Получаем систему линейных уравнений на  $\gamma_0, \gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$\begin{cases} y_1 = \gamma_0 + h^2 \gamma_1 + h^4 \gamma_2, \\ y_2 = \gamma_0 + 4h^2 \gamma_1 + 16h^4 \gamma_2, \\ y_3 = \gamma_0 + 9h^2 \gamma_1 + 81h^4 \gamma_2, \end{cases}$$

из которой находим  $f_0(0) = \gamma_0 = (15y_1 - 6y_2 + y_3)/10$ .

Формула для экстраполяции компоненты векторного поля отличается от формулы для скалярной функции только тем, что вместо  $j = 0$  отличными от 0 в точке полюса являются моды с  $j = 1$  и  $n - 1$ .

#### 1.6. Матрица Гессе в сферических координатах

Пусть известны значения в точках широтно-долготной сетки некоторой действительной функции  $P(\lambda_k, \varphi_n)$ ,  $0 \leq p \leq n$ ,  $0 \leq k \leq m$ , где  $\varphi$  — коширота,  $\lambda$  — долгота.

Найдем выражение для матрицы Гессе в точке сферы с координатами  $(\lambda^0, \varphi^0)$  для функции в сферических координатах. В локальных геодезических координатах  $x$  и  $y$ , где кошироте соответствует  $y$ , а долготе —  $x$ , оно совпадает с выражением

<sup>1</sup> На самом деле это не экстраполяция, а интерполяция, так как приполюсные точки полностью окружают полюс.

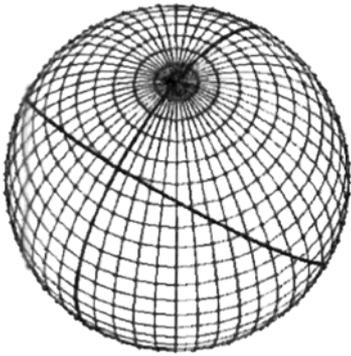


Рис. 2. Широтно-долготная сетка и геодезические на сфере.

ем (1) для касательной декартовой плоскости при  $x = y = 0$ .

Дифференцирование по  $y$  дает тот же результат, что и дифференцирование по  $\varphi$ , поскольку  $y = \varphi - \varphi^0$ , а значит, геодезическая  $x = 0$  совпадает с кривой  $\lambda = \lambda^0$ .

Геодезическая  $y = 0$  касается параллели  $\varphi = \varphi^0$  (рис. 2), поэтому первая производная по долготе совпадает с первой производной по  $x$ , деленной на  $\sin \varphi^0$ :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(\lambda^0, \varphi^0) = \frac{1}{\sin \varphi^0} \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda^0, \varphi^0).$$

Найдем вторую производную функции  $P$  по  $x$ . Выпишем в сферических координатах уравнение геодезической  $y = 0$ :

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi^0}{\cos(\lambda - \lambda^0)}\right).$$

Дифференцируя дважды по  $\lambda$  функцию

$$P\left(\lambda, \arctg\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi^0}{\cos(\lambda - \lambda^0)}\right)\right),$$

и деля на  $\sin^2 \varphi^0$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{\sin \varphi^0} \left( \cos \varphi^0 \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi^0} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right).$$

Итак, матрица Гессе для гладкой функции в сферических координатах имеет вид (1), а после преобразования Фурье по долготе  $F_{\lambda \rightarrow j}$ :

$$\tilde{H}(j, \varphi) = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{\sin \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} - \frac{j^2 \tilde{P}}{\sin \varphi} \right) & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{ij \tilde{P}}{\sin \varphi} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{ij \tilde{P}}{\sin \varphi} \right) & \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial \varphi^2} \end{array} \right\|.$$

Отметим, что разность функций  $\cos \varphi \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi}$  и  $\frac{j^2 \tilde{P}}{\sin \varphi}$  обращается в точке полюса в нуль, но, вообще говоря, при  $j \neq 0$  не каждая из них по отдельности.

Теперь чтобы оценить наибольшее собственное число матрицы Гессе для функции, заданной на широтно-долготной сетке, нужно аппроксимировать первую и вторую производные по  $\varphi$  функций  $\tilde{P}$  и  $\frac{ij \tilde{P}}{\sin \varphi}$ , выполнить обратные преобразования Фурье по долготе и решить задачу на собственные значения для матрицы второго порядка во всех точках сетки.

### 1.7. Атмосферный фронт в поле ветра

По полю ветра на заданном барическом уровне  $p = \text{const}$  также можно обнаружить места его пересечения с поверхностью фронта — здесь имеется скачок тангенциальной (к поверхности фронта) компоненты ветра, который может быть “размазан” под действием турбулентной вязкости.

Для поиска зоны атмосферного фронта на барическом уровне вычисляют вертикальный компонент вихря скорости ветра — скалярную функцию от  $u$  и  $v$ , где в декартовых координатах  $u$  — составляющая ветра, соответствующая  $x$ , а  $v$  —  $y$ :

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Вихрь в сферических координатах ( $u$  — зональная составляющая ветра,  $v$  — меридиональная):

$$\zeta = \frac{1}{\sin \varphi} \left( \frac{\partial(u \sin \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right).$$

На линии фронта может терпеть разрыв касательная к фронту компонента ветра, но заранее неизвестно, как ориентирована линия разрыва.

Введем единичный вектор, перпендикулярный к линии разрыва  $\mathbf{b} = \langle \cos s, \sin s \rangle$ , и обозначим  $w$  — проекцию ветра  $\langle u, v \rangle$  на  $\mathbf{b}$ . Будем искать  $R$  — максимальное по  $s$  значение производной  $w$  по направлению  $\mathbf{b}^\perp = \langle -\sin s, \cos s \rangle$ , перпендикулярному к  $\mathbf{b}$ . На тангенциальном разрыве  $R$  бесконечно. Вихрь скорости получается, если к  $R$  добавить производную вдоль  $\mathbf{b}$  проекции ветра на  $\mathbf{b}$ . Это второе слагаемое на линии фронта даже в идеальной модели — ограниченная функция, и его добавление при приближенных вычислениях лишь зашумляет результат. Прямым вычислением доказывается следующая

**Таблица 1.** Таблица среднеквадратичных значений предикторов

Уровень, гПа	Среднеквадратичное значение $ \nabla T $ , $10^{-4} \text{C}^\circ/\text{км}$	Среднеквадратичное значение $ L $ , $10^{-8} \text{ км}^{-1}$	Среднеквадратичное значение $ R $ , $10^{-6} \text{ с}^{-1}$	Уровень, гПа	Среднеквадратичное значение $ \nabla T $ , $10^{-4} \text{C}^\circ/\text{км}$	Среднеквадратичное значение $ L $ , $10^{-8} \text{ км}^{-1}$	Среднеквадратичное значение $ R $ , $10^{-6} \text{ с}^{-1}$
1000	175 (264)	50 (90)	19.3 (20.3)	200	98.9	34.1	34.2
925	135 (158)	45.1 (72.4)	27.4 (28.2)	150	77.9	26.8	25.3
850	130 (148)	41.6 (57.4)	27.2 (28.2)	100	77.7	23.6	20
700	128 (138)	35.3 (37)	28 (28.7)	70	73.3	23.3	20.3
500	101	42.4	35.1	50	67.6	25.3	22.4
400	93.8	53.1	42.4	30	67.2	31.3	27.7
300	86.4	55	48.1	20	73.1	36.4	32.6
250	99.7	46.1	43.8	10	79.7	47.1	39.8

Примечания. Осреднение за период в 250 дней с марта по ноябрь 2007 г. включительно по данным 12-ти часового прогноза NCEP на 00 часов по Гринвичу на сетке с шагом  $1^\circ$ . В скобках указывается также значение, получающееся, если осреднять по всей сетке, а не только по точкам, находящимися над поверхностью Земли.

**Лемма 1.** Число  $R$  равно наибольшему собственному значению матрицы:

$$K = \frac{1}{\sin \varphi} \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial(u \sin \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(v \sin \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(v \sin \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) & -\frac{\partial v}{\partial \lambda} \end{array} \right\| \text{ или}$$

$$K = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) & -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\|$$

в сферическом и плоском случаях соответственно.

**Замечание 1.** Если ветер геострофический [5], [9], то матрица Гессе (1) геопотенциала совпадает с матрицей  $K(\varphi, \lambda)$ . В этом случае качестве внедиагональных элементов можно брать любое из слагаемых  $\frac{\partial(v \sin \varphi)}{\partial \varphi}$  и  $-\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ .

**Замечание 2.** Нормальная к фронту компонента ветра может терпеть излом на линии фронта, но при численном анализе это нельзя использовать для диагностики фронта. Действительно, неточности вычисления направления фронта приводят к тому, что вычисленная нормальная к фронту компонента поля ветра не будет совпадать с истинной, и уже не обязательно будет непрерывна. Последующее вычисление второй производной даст некорректный результат.

### 1.8. Атмосферный фронт в поле температуры

В поле температуры на фиксированном барическом уровне атмосферный фронт в идеальной модели – линия скачка двумерной функции. Чтобы диагностировать атмосферный фронт по данным о температуре на барическом уровне, в нашем алгоритме вычисляется модуль горизонтального градиента от температуры  $|\nabla T|$ , хотя возможны и другие варианты, (см. [11]).

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ФРОНТАЛЬНЫХ ЗОН

Три поля предикторов фронта были построены по основным метеорологическим полям (геопотенциал, ветер и температура) на широтно-долготной сетке с шагом  $h$  (кривизна  $L(\varphi, \lambda)$  графика геопотенциала, наибольшее собственное число  $R(\varphi, \lambda)$  матрицы  $K(\varphi, \lambda)$  и модуль градиента температуры соответственно). Эти поля принимают сравнительно большие значения вблизи фронта. Теперь на основании каждого из трех полей предикторов (или комбинации из них) построим фронтальные зоны и сравним результаты.

### 2.1. Нормировка полей предикторов

Сначала нормируем поля предикторов, поделив их на средние значения, для того чтобы дальнейший алгоритм и используемые константы не зависели ни от барического уровня, ни от используемого поля предикторов. Тогда мы сможем легко использовать и всевозможные комбинированные предикторы, например, среднее арифметическое каких-то двух исходных.

Нормируем каждое поле, поделив на его среднеквадратичное значение (см. табл. 1), взятое по значениям только в тех точках сетки, которые находятся над поверхностью Земли. Если не сделать эту оговорку (в табл. 1 взять значения в скобках), то мы рискуем в дальнейшем на нижних барических уровнях (700 гПа и ниже) получить только фиктивные фронтальные зоны, совпадающие с горными массивами.

Действительно, в табл. 1 среднеквадратичных значений в скобках указывается также значение (для  $|\nabla T|$  и  $|L|$  существенно большее), осредненное по всей сетке, а не только по точкам, находящимся над поверхностью Земли.

Везде далее используются предикторы, нормированные на величины из табл. 1.

## 2.2. Построение фронтальных зон на барическом уровне

Кратко опишем<sup>2</sup> алгоритм построения фронтальных зон, получающий на входе дискретное поле  $P$  – некий нормированный предиктор атмосферного фронта и выдающий множество, составленное из квадратов со стороной, равной шагу сетки, и центрами, совпадающими с точками сетки. Все множества, строящиеся ниже, состоят из таких квадратов, поэтому будем отождествлять эти квадраты и их центры.

Назовем точку сетки  $x_*$  “подозрительной” на принадлежность к фронтальной зоне, если  $P(x_*) > C_0$  (полагалось  $C_0 = 0.6$ ).

Положим  $A(P)$  – множество квадратов со сторонами, равными  $h$ , и центрами в подозрительных точках сетки. Тогда  $A(P)$  заведомо содержит все фронтальные зоны, однако может быть слишком “толстым” (включает “лишние” точки).

Основная вычислительная проблема: выделить среди множества близких “подозрительных” точек те, вблизи которых фронт наиболее сильно выражен. Выбранные точки должны сложиться в некоторую линию, которую и назовем затем фронтальной.

Формализуем понятие гребня (гребень в поле предиктора и будет интерпретироваться как атмосферный фронт). Гребень для двумерного поля  $P$  – линия, точки которой характеризуются следующим свойством: функция  $P$  вдоль прямых, близких к ее нормали, имеет именно в точке гребня условный локальный максимум. Такие прямые назовем хорошими для данной точки гребня. Если гребень – тонкая (в масштабе  $h$ ) полоса, то в каждой его точке хорошие прямые заматают достаточно широкий сектор.

Искомый гребень  $B(P)$  – подмножество дискретного множества  $A(P)$ . На сетке без дополнительной переинтерполяции мы можем использовать не континуум прямых, проходящих через точку сетки  $x_* \in A(P)$ , а всего четыре (две параллельные осям и две пересекающие их под углом  $45^\circ$ ) прямых и соединяющих ее с двумя из восьми соседних. Мы предлагаем следующее условие “двух соседних прямых” (ДСП). Рассмотрим две пары прямых, проходящих через  $x_*$ . Первая пара прямых – параллельные осям координат, вторая – под углом  $45^\circ$  к ним. Квадрат  $K$  (где  $x_*$  – центр квадрата  $K$  из  $A(P)$ ) включим в  $B(P)$ , если и только если для точки  $x_*$  хотя бы одна прямая из каждой пары – хорошая. Эквивалентная формулировка: среди четырех прямых можно указать две хорошие, причем угол между ними равен  $45^\circ$ .

При условии ДСП множество  $B(P)$  не слишком “толстое”. Это утверждает следующая

**Лемма 2.** *Если для каждой точки множества  $B(P)$  или горизонтальная, или вертикальная прямая, проходящая через нее – хорошая, то  $B(P)$  не будет содержать никакие четыре точки сетки  $A_1A_2A_3A_4$ , образующие квадрат со стороной  $h$ .*

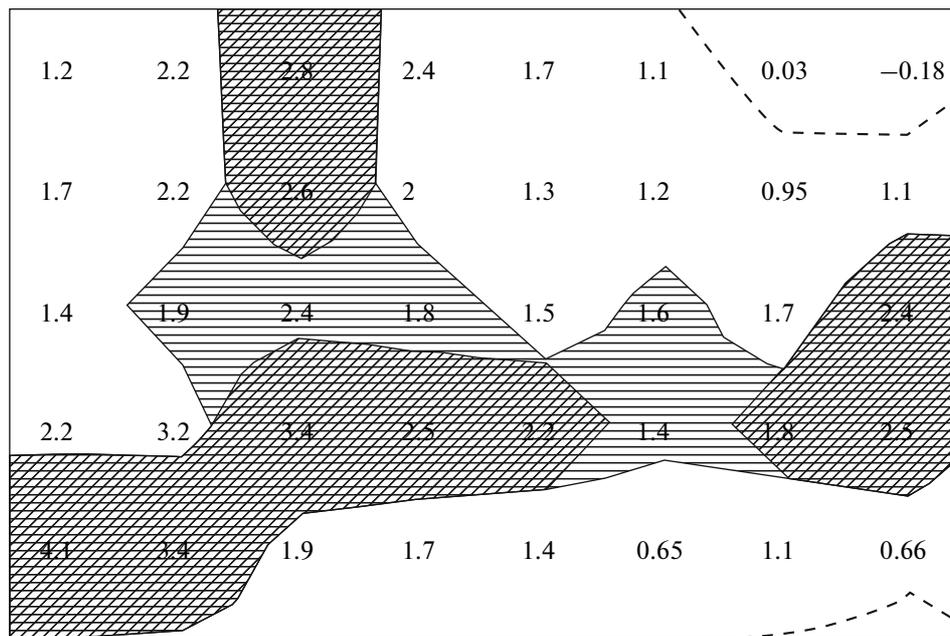
На рис. 3 видно, что при таком алгоритме у  $B(P)$  может быть слишком большое (неоправданное с метеорологической точки зрения) для окончательного результата количество компонент связности. Соединим некоторые компоненты связности, вернув в  $B(P)$  некоторые точки из  $A(P)$ , а именно те, добавление которых объединяет компоненты связности  $B(P)$ . Иными словами построим множество  $C(P)$ , состоящее из точек  $B(P)$  и квадратов из  $A(P)$ , являющихся соседними одновременно с двумя разными компонентами связности  $B(P)$  (здесь считается, что у каждого квадрата сетки 8 соседних). Однако, как показано на рис. 3, мы добавили в  $C(P)$  излишнее количество квадратов. Поэтому уточним алгоритм: добавим только те, для центра которых хотя бы одна из четырех прямых хорошая.

Далее для подавления возможных шумов<sup>3</sup> удалим из  $C(P)$  те компоненты связности, площадь которых (заметим, что площадь квадрата сетки на кошироте  $\varphi$  равна  $2h \sin(h/2) \sin \varphi \approx h^2 \sin \varphi$ ) меньше  $5h^2$  или такие, что максимальное значение поля  $P$  в которых меньше  $C_1$  – некоторой константы (например,  $C_1 = 1$ ). В этом случае считаем фронт слишком коротким или слабо выраженным соответственно (рис. 4).

Построенное множество  $C(P)$  будем считать совокупностью найденных фронтальных зон.

<sup>2</sup> Подробное описание алгоритма довольно громоздко и будет приведено в отдельной публикации.

<sup>3</sup> Вызванных, например, неустойчивостью критерия: при малом возмущении поля  $P$  какой-то квадрат, ранее входивший в  $B(P)$ , может быть отброшен.



**Рис. 3.** Реальный пример работы алгоритма выделения фронтальных зон. Пунктиром обведено множество “подозрительных” точек  $A(P) = \{x | P(x) > C_0 = 0.6\}$ . Диагональной штриховкой отмечено множество  $B(P)$ , а горизонтальной – множество построенных фронтальных зон  $C(P)$ . На рисунке границы этих множеств сглажены, множества  $A(P)$ ,  $B(P)$  и  $C(P)$  состоят из квадратов со сторонами, параллельными осям. Нанесены значения поля  $L$ . Если добавлять в  $C(P)$  только точки, для которых существует хорошая прямая, то здесь во множестве  $C(P) \setminus B(P)$  не будет квадратов со значениями в центрах 1.4, 1.8, и 1.9 (останутся только 1.6 и 2.4).

### 2.3. Вертикальное согласование фронтальных зон

Для построения фронтальных зон здесь использовались поля объективного анализа (ОА) и прогнозов на 12, 24 и 36 часов с вертикальным разрешением 50 гПа и горизонтальным –  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ . Таким образом, в трехмерной задаче при переходе на один уровень ниже горизонтальное смещение реальной фронтальной зоны не может составлять более 1–2 шагов сетки по горизонтали (иначе это разные фронтальные зоны). В наших экспериментах наиболее качественно фронтальные зоны удается строить на уровнях 400–300 гПа; чем ниже, тем хуже качество построения, т. е. хуже прослеживаются отдельные участки фронта, и фронт становится разрывным.

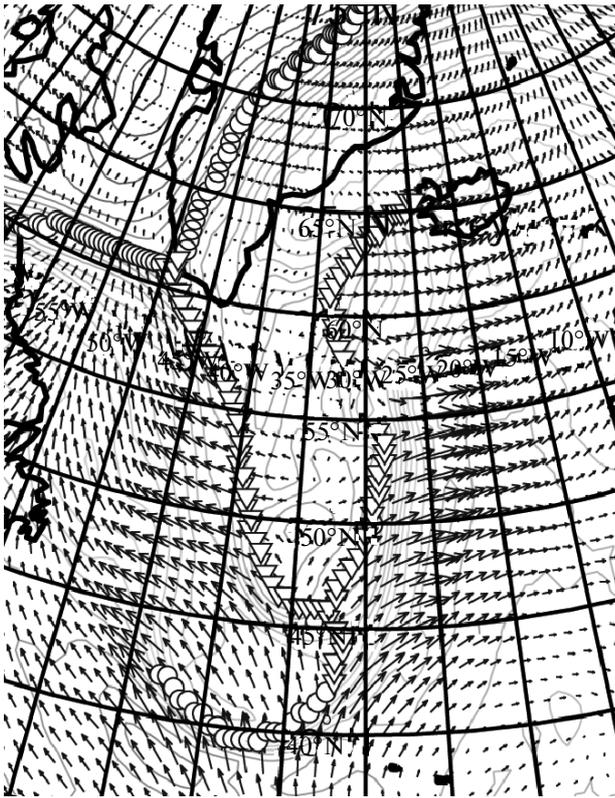
Пример вертикального меридионального сечения с проведенными фронтами приведен на рис. 5.

Наибольший синоптический интерес, напротив, представляют фронтальные зоны на уровне поверхности Земли и на небольшой высоте. При последовательном (сверху вниз) построении фронтальных зон на каждом следующем барическом уровне будем учитывать результат уже построенного анализа на предыдущем. Уровень 400 гПа будем считать за базовый, к полю предиктора на этом уровне прибавляется константа

$B_v = 0.2$ . Каждый раз, переходя к построению фронтальных зон на более низких уровнях, вблизи (непосредственно под точками фронта на более высоком уровне, а также на расстоянии не более 3 шагов по горизонтали в сторону градиента температуры, т.е.  $1.5^\circ$  широты или долготы) фронтальной зоны на уровне выше будем добавлять в поле предиктора постоянный “бонус”  $B_v$ . При такой вертикальной связи фронтальные зоны получаются более непрерывными по вертикали, а так как бонус постоянный, то смещения фронтальных зон из-за бонуса не происходит (максимум достигается на том же гребне, что и без бонуса).

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Основным критерием качества алгоритма построения фронтальных областей является то, насколько сильно отличаются массы воздуха, разделяемые построенными фронтальными областями. Принимая гипотезу однородности и изотропности метеорологических полей внутри одной воздушной массы по горизонтальным переменным [7, 12–14], оценим двумерные авто- и кросс-корреляционные функции (КФ) от расстояния по го-



**Рис. 4.** Линии атмосферных фронтов над Северной Атлантикой на уровне 500 гПа, рассчитанных по оптимальному критерию (см. ниже часть 4) по данным ОА NCEP от 00 ч 10 апреля 2010 г. Показаны изолинии температуры и поле ветра. Часть фронта хорошо проявляется в поле температуры (это показывают кружочки на линии), а часть – в поле геопотенциала (треугольники).

ризонтиали температуры, геопотенциала, продольного и поперечного компонент ветра на разных барических уровнях. В [12], [13] оценивались трехмерные КФ – здесь мы сочли для наших целей достаточным вычисление двумерных КФ.

В [7], [13] оценивалась анизотропия, и было показано, что наибольшую погрешность гипотеза изотропии имеет в тропической стратосфере. В интересующей нас области (внетропическая тропосфера) эта гипотеза адекватна наблюдениям.

### 3.1. Определение принадлежности двух точек на одном уровне к разным воздушным массам

Пусть на одном барическом уровне заданы две точки  $W$  и  $Q$ , и требуется определить, проходит ли между ними фронт, т.е. следует ли их считать принадлежащими к одной или же к разным воздушным массам. Если  $W \in C(P)$  или  $Q \in C(P)$ , то нельзя однозначно решить, какая из двух возможностей имеет место, поэтому при вычислении КФ (см. ниже) такие пары станций в статистике отбрасывались.

Если удастся найти путь из  $W$  в  $Q$ , близкий к кратчайшему пути из  $W$  в  $Q$  и не пересекающий фронтальные области, будем считать, что  $W$  и  $Q$  лежат в одной воздушной массе (случай А), если нет – в различных (случай Б).

Соединим  $W$  и  $Q$  кратчайшей геодезической и рассмотрим ее  $h$ -окрестность  $U_h$ . Если обе исходные точки лежат в одной компоненте связности (здесь будем полагать, что у каждого квадрата 4 соседних) множества  $U_h \setminus C(P)$ , то будем считать их принадлежащими к одной воздушной массе, а если нет – то к различным.

Значительно ускорить приведенный здесь алгоритм можно, если рассматривать не само множество  $U_h \setminus C(P)$ , а последовательные сечения меридианами.

### 3.2. Нормировка метеорологических полей

Для того чтобы вычислить КФ основных метеорологических полей, необходимо сначала их нормировать, т.е. вычесть среднее  $Sf(x)$  и поделить на корень из оценки дисперсии:

$$F(x) = \frac{f(x) - Sf(x)}{\sqrt{S(f(x) - Sf(x))^2}}.$$

Возможны следующие варианты оценки среднего значения  $Sf(x)$ .

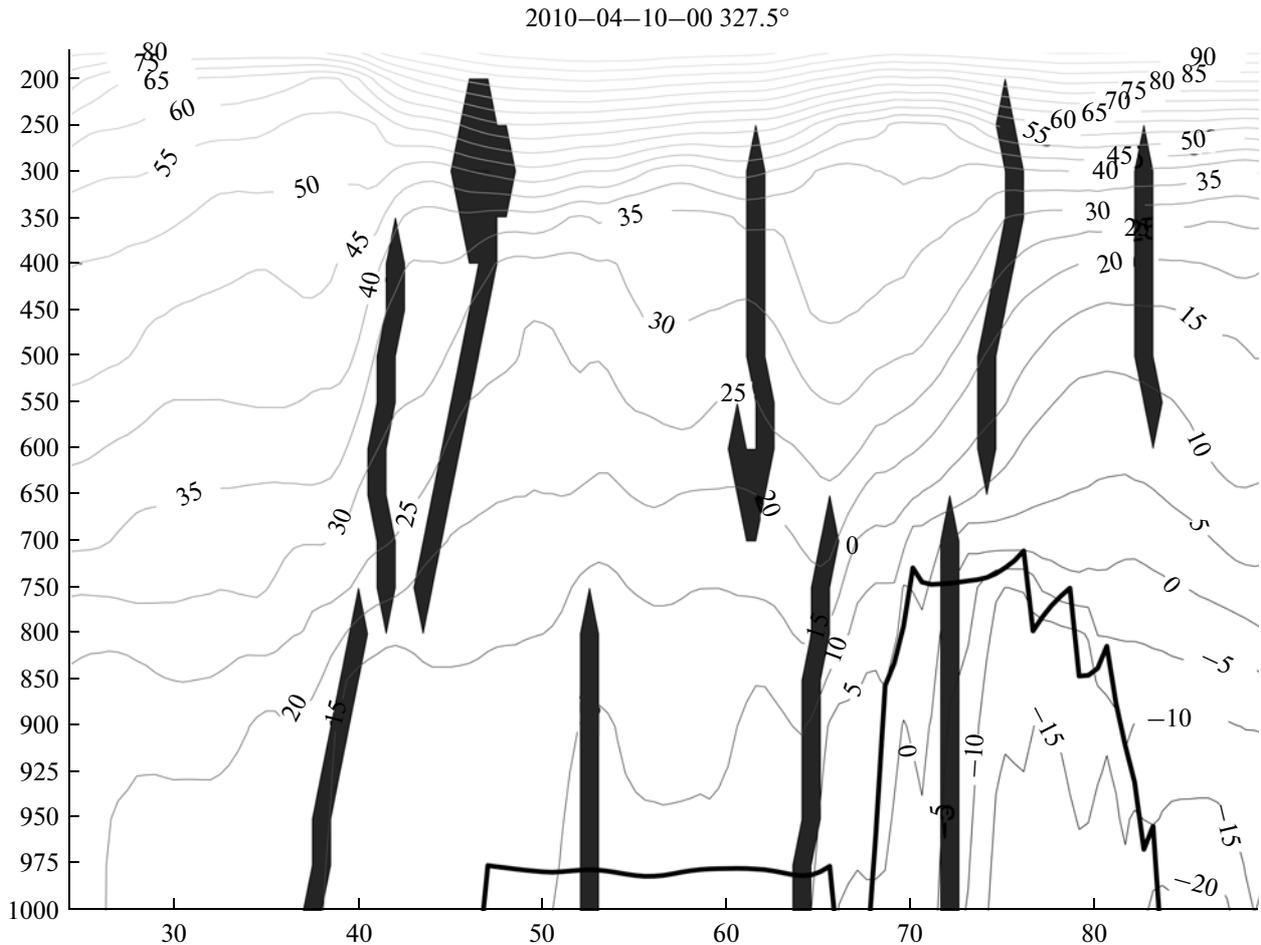
1. Среднемесячное (или среднее за декаду) значение.
2. Прогноз на момент реализации  $f(x)$  с минимальной заблаговременностью (как правило, 6 или 12 часов).
3. Сумма прогноза минимальной заблаговременности и среднего отклонения<sup>4</sup> факта от прогноза для данной станции.

Первый случай более важен для понимания физики атмосферы, а второй и третий – для практической задачи анализа и прогноза<sup>5</sup>. Если во втором случае окажется, что КФ для точек, разделенных построенной нами фронтальной зоной, заметно отличается от КФ для неразделенной ими, то, используя в каждом из двух случаев свою КФ вместо усредненной, мы сможем уменьшить погрешность интерполяции в точки сетки, улучшим поля ОА (а значит, и основывающийся на них прогноз), особенно вблизи фронтальных зон.

В данной работе использовался простейший способ нормировки 1. В качестве полей для по-

<sup>4</sup> Прогнозы могут иметь небольшую систематическую ошибку: осредненные, скажем, за месяц прогностические поля могут отличаться от реальных средних полей, осредненных за тот же период; [15].

<sup>5</sup> В настоящее время в оперативном ОА ГМЦ РФ производится интерполяция именно полей отклонений данных от прогноза на срок анализа. При этом используются КФ для этих отклонений; [4, 5].



**Рис. 5.** Меридиональное сечение фронта меридианом 32.5 W рассчитанного по оптимальному критерию (см. ниже часть 4) по данным ОА NCEP от 00 ч 24 декабря 2009 г. Жирная линия – граница атмосферы, тонкие линии – изотермы потенциальной температуры. По горизонтали – градусы северной широты. По вертикали – давление (гПа). Горизонтальную картину можно увидеть на рис. 4.

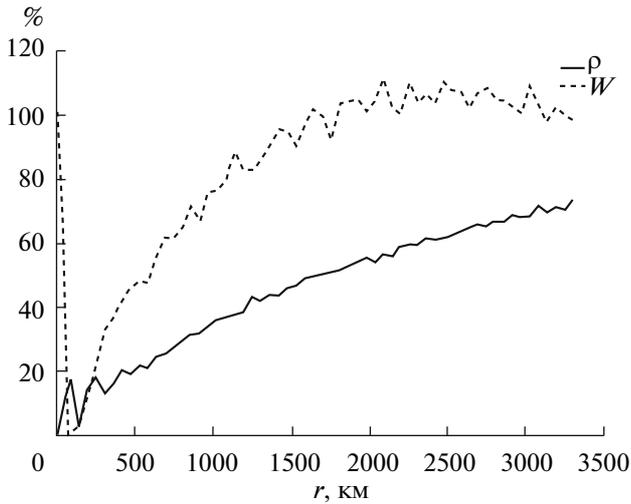
строения предикторов брались поля из накопленного архива из 336 полей анализа NCEP на сетке с шагом  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ .

### 3.3. Оценка корреляционных функций

Для оценки двумерных КФ (зависящих от расстояния и уровня) объединим всевозможные пары станций в группы в зависимости от расстояния между ними: первая группа – от 0 до  $\Delta r = 50$  км, вторая – от  $\Delta r$  до  $2\Delta r$  и т.д. Пары станций, расстояние  $r$  между которыми более  $R = 3000$  км, рассматривать не будем, так же как и пары, в которых хотя бы одна станция лежит южнее  $30^\circ$  северной широты. Последнее ограничение принято из-за того, что атмосферные фронты наблюдаются только во внетропической зоне, а в Южном полушарии сеть аэрологических станций слишком редка для нашей цели – определения количественных параметров алгоритма диагностики атмосферных фронтов.

Выбранное ограничение максимального расстояния  $R$  между станциями оправдано, так как, во-первых, на больших расстояниях модули всех КФ не превосходят 0.1 (см. [12]) а, во-вторых, в задачах ОА такие расстояния обычно не употребляются. Если в описанных ниже экспериментах использовать иные, но близкие  $R$ , в пределах 2000–4000 км все основные результаты изменяются слабо.

Внутри каждой группы разделим пары станций на две подгруппы: к первой отнесем те, между которыми проходит фронт, ко второй – все остальные (естественно, это разбиение на подгруппы меняется день ото дня и от уровня к уровню). Вычисляя корреляции значений метеорологических полей для каждой из получившихся групп отдельно, получим две двумерные КФ – для случая А, когда брались пары точек, разделенных фронтальной зоной, и для случая Б – неразделенных. Соотношение между частотами случаев А и Б изображено на рис. 6.



**Рис. 6.** Статистика разделения метеостанций фронтом. Сплошная линия ( $\rho$ ) – доля числа пар станций, разделенных фронтом, среди всех пар станций в зависимости от расстояния  $r$  (км). Пунктирная ( $W$ ) – отношение числа пар станций, расположенных на расстояниях в пределах  $(r - 25, r + 25)$  к общему числу всех станций. Таким образом, к случаю А относится  $w = MW\rho$  пар станций, а к случаю Б  $w = MW(1 - \rho)$ , где  $M$  – количество станций. Рассматривались только пары станций севернее  $30^\circ \text{ N}$ .

В результате мы получаем две ступенчатые (с шагом  $\Delta r$ ) матричные КФ:  $S_{ij}(r)$ , соответствующую случаю А, и  $U_{ij}(r)$  – случаю Б. Здесь и далее  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , первая компонента соответствует температуре, вторая – геопотенциалу, третья – продольной компоненте ветра, четвертая – поперечной.

### 3.4. Сглаживание корреляционных функций

Для выбора оптимального критерия фронтальной зоны необходимо уметь оценивать, насколько сильно при данном критерии отличаются массы воздуха по разные стороны, а значит, и оценивать различие КФ для случаев А и Б.

Простейшие варианты оценки различий:

1. Расстояние между КФ:  $S_{ij}(r)$  и  $U_{ij}(r)$  в метрике  $L^2[\mathbb{R}_+]$ .
2. То же, но с учетом количества измерений на парах станций, попавших в данный диапазон расстояний (см. график  $W$  на рис. 6).
3. То же, но нормированное на сумму  $L^2$ -норм:

$$\frac{\|S_{ij} - U_{ij}\|}{\|S_{ij}\| + \|U_{ij}\|}.$$

Однако из-за недостаточной выборки нельзя непосредственно использовать ни один из приведенных здесь вариантов с оцененными в предыдущем параграфе КФ, так как они сильно осциллируют, и оценки получатся ненадежные. Для по-

лучения качественной оценки необходимо предварительное сглаживание<sup>6</sup>.

Согласно теореме Бохнера [14], [16], положительно определенная КФ скалярного изотропного однородного поля раскладывается в интеграл Фурье–Бесселя:

$$K(r) = a_0\delta(r) + \int_{k=0}^{\infty} a(k)\mathbf{J}_0(kr)kdk,$$

где  $a_0 + \int_{k=0}^{\infty} a(k)kdk = 1$ ,  $a_0 \geq 0$  и  $a(k) \geq 0$ , а  $\mathbf{J}_0$  – нулевая функция Бесселя,  $\delta$  – дельта-функция.

В случае совместной оценки КФ для нескольких скалярных полей, например, температуры и геопотенциала, коэффициенты  $a_0$  и  $a(k)$  в этой теореме заменяются на симметричные положительно определенные матрицы  $A_0$  и  $A(k)$ . В описанных ниже экспериментах четырехкомпонентное случайное поле составлено из этих скалярных полей и продольной и поперечной компонент ветра. Авто- и кросскорреляции для компонент ветра должны раскладываться по  $-J_0''(kr)$ , а их кросскорреляции со скалярными полями – по  $J_0'(kr)$  (здесь ' – производная по  $r$ ). Подробнее см. [7], [12], [14], [16].

Введем преднорму<sup>7</sup> в пространстве КФ с весами, пропорциональными количеству пар измерений в степени  $2/3$ , попавших в данный интервал по расстоянию:

$$\|S(r)\|_{\text{КФ}} = \frac{1}{\sum_{s=0}^M w(s)^{2/3}} \sum_{s=0}^M w(s)^{2/3} \sum_{i,j=1}^4 S_{ij}^2(s\Delta r), \quad (7)$$

где  $M = R/\Delta r$ , а  $w(s)$  – количество пар измерений для рассматриваемого случая, отстоящих друг от друга на больше, чем  $(s - 1)\Delta r$ , но меньше, чем на  $s\Delta r$ .

Найдем положительно определенную КФ, ближайшую в смысле преднормы (7) к функции  $S_{ij}(r)$ , полученной прямой оценкой. Это необходимо, так как в данных измерений много пробелов, и для оценок КФ типа  $S_{ij}(r)$  положительная определенность не гарантируется. Аналогично мы поступим и с  $U_{ij}(r)$ .

<sup>6</sup> Проецирование КФ на конечномерный конус в пространстве положительно определенных КФ. Другими словами, мы проводим регуляризацию оценки КФ.

<sup>7</sup> Эта, и другие близкие к ней преднормы, обеспечивают хорошее приближение КФ, если число измерений существенно различно для разных  $r$ .

**Таблица 2.** Характерные значения погрешностей  $e(k_1, \dots, k_N)$  приближения КФ  $S_{ij}(r)$  положительно определенной КФ вида (8) в зависимости от  $N$

$N$	2	3	4	5	6	7	8	9
$e(k_1, \dots, k_N)$	0.00074	0.000636	0.00054	0.000503	0.000415	0.000378	0.000322	0.000273

Будем, меняя матрицы  $A^n$ , приближать матричную корреляционную функцию  $S(r)$  методом наименьших квадратов функциями вида

$$K_{A_0, \dots, A_N}(r) = A^0 \delta(r) + \sum_{n=1}^N \mathcal{F}^n(A^n, k_n r), \quad (8)$$

где  $k_n \geq 0$  – положительные масштабные множители,  $\mathcal{F}^n$  – следующая симметричная матричная функция:

$$\mathcal{F}^n(A^n, y) = \begin{vmatrix} \delta_n a_{11}^n J_0(y) & \delta_n a_{12}^n J_0(y) & \vartheta_n a_{13}^n J_0'(y) & \vartheta_n a_{14}^n J_0'(y) \\ \delta_n a_{21}^n J_0(y) & \delta_n a_{22}^n J_0(y) & \vartheta_n a_{23}^n J_0'(y) & \vartheta_n a_{24}^n J_0'(y) \\ \vartheta_n a_{31}^n J_0'(y) & \vartheta_n a_{32}^n J_0'(y) & -\varepsilon_n a_{33}^n J_0''(y) & -\varepsilon_n a_{34}^n J_0''(y) \\ \vartheta_n a_{41}^n J_0'(y) & \vartheta_n a_{42}^n J_0'(y) & -\varepsilon_n a_{43}^n J_0''(y) & -\varepsilon_n a_{44}^n J_0''(y) \end{vmatrix},$$

где  $\delta_n$ ,  $\varepsilon_n$  и  $\vartheta_n = \sqrt{\delta_n \varepsilon_n}$  – нормировочные коэффициенты, которые выбирались следующим образом:  $\delta_n^{-1} = \|\mathcal{F}^n(A', k_n r)\|_{\text{КФ}}$ , и  $\varepsilon_n^{-1} = \|\mathcal{F}^n(A'', k_n r)\|_{\text{КФ}}$ , где  $A'$  – матрица с единственным ненулевым элементом  $A'_{11} = 1$ , а  $A''$  – с ненулевым элементом  $A''_{33} = 1$ . Таким образом, КФ приближенно раскладывается по  $N$  нормированным функциям Бесселя. Проводились эксперименты при  $N = 2, \dots, 10$ .

Затем будем заменять матрицы  $A^n = \|a_{ij}^n\|$  на ближайšie к ним положительно определенные симметричные матрицы  $B^n = \|b_{ij}^n\|$  (соответствующий алгоритм, основанный на теории возмущений самосопряженных операторов, описан в [4], [5], [7], [12]).

При замене следует учитывать линейные ограничения: матрицы  $B^n$  должны быть таковы, чтобы в матрице  $K_{B^0, \dots, B^N}(0)$  на диагонали стояли единицы и матрица  $B^0$  имела следующий вид:

$$B^0 = \begin{vmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 & 0 & 0 \\ b_{12}^0 & b_{22}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{33}^0 \end{vmatrix}.$$

Поясним причину выбора нормировок  $\delta_n$  и  $\varepsilon_n$  в функции  $\mathcal{F}^n(A, r)$ . Норма  $\|\mathbf{J}_0''(k_n r)\|_{\text{КФ}}$  имеет порядок  $k_n^2$ , и при относительно небольших значениях  $k_n$  порядка 20 (здесь  $r$  измерялось в тыс. км) для обеспечения числа обусловленности порядка  $c = 1/1000$  матрицу  $A$  (когда она неположительно определенная) приходится иногда менять слишком сильно (на величину не меньше, чем  $\sim ck_n^2 = 0.4$ ), и основная гипотеза теории возмущений не выполняется. При выбранных нормировках матриц такой проблемы не возникает.

Масштабные множители  $k_1, \dots, k_N$  в аргументах функции Бесселя также подлежат оптимизации. Для этого после замены КФ на аппроксимацию (8) вычислим погрешность приближения в смысле предметрики, порожденной преднормой (7):

$$e(k_1, \dots, k_N) = \sqrt{\|S(r) - K_{B^0, \dots, B^N}(r)\|_{\text{КФ}}}.$$

Для каждого уровня, и отдельно для случаев А и Б, сначала перебиралось 400 пар характерных значений  $k_1$  (в диапазоне 0.01–15) и  $k_2$  (в диапазоне 10–70), для них вычислялись погрешности  $e(k_1, k_2)$ . В качестве первого приближения бралась та пара, на которой достигался минимум  $e(k_1, k_2)$ . Затем  $e(k_1, k_2)$  минимизировалось методом градиентного спуска.

Выберем теперь первое приближение  $k_3 = 1.5k_2$  и будем методом градиентного спуска минимизировать  $e(k_1, k_2, k_3)$  и так далее. Сделав  $N - 2$  шага, найдем наилучшее приближение нашей функции функцией вида (8).

Примерная зависимость погрешности приближения  $e(k_1, \dots, k_N)$  от  $N$  показана в табл. 2. Далее использовалось значение  $N = 5$  так как дальнейшее увеличение  $N$  не дает существенного уменьшения погрешности.

Если перед вычислением КФ нормировать поля на отклонения от среднемесячных значений (см. п. 3.2), то значения на диагонали матрицы  $A^0$  интерпретируются как средняя дисперсия приборов (зондов), которыми измеряли значения метеорологических полей. А если нормировать поля на отклонения от прогноза, то – как точность прогностической схемы.

**Таблица 3.** Оптимальные значения  $\alpha$  и  $\beta$ , на которых достигается максимум разницы  $d(\alpha, \beta)$  КФ  $S_{ij}(r)$  и  $U_{ij}(r)$  в зависимости от уровня, и соответствующие коэффициенты перенормировки  $\mu_{\alpha\beta}$ , и погрешности сглаживания КФ

Уровень, гПа	$\alpha$	$\beta$	$1 - \alpha - \beta$	$\mu_{\alpha\beta}$	$d(\alpha, \beta)$	$e_5^S(\alpha, \beta)$	$e_5^U(\alpha, \beta)$
Февраль							
300	0.682	0.0582	0.259	0.992	0.0733	0.00141	0.00176
400	0.726	0.0558	0.218	1.07	0.0963	0.00177	0.00407
500	0.753	0.0545	0.192	0.968	0.0796	0.0019	0.00596
700	0.785	0.0545	0.161	0.855	0.0634	0.00172	0.00178
850	0.799	0.056	0.145	0.823	0.0569	0.00139	0.00214
925	0.805	0.057	0.138	0.799	0.0595	0.00155	0.0025
1000	0.809	0.0583	0.132	0.76	0.0805	0.00573	0.0076
Июнь							
300	0.727	0.0506	0.223	0.965	0.103	0.00189	0.00185
400	0.772	0.0437	0.184	1.09	0.107	0.0021	0.00156
500	0.8	0.0391	0.161	1.04	0.0973	0.00229	0.00168
700	0.833	0.0339	0.133	0.852	0.0633	0.00198	0.002
850	0.848	0.0325	0.12	0.769	0.0522	0.003	0.00185
925	0.854	0.0322	0.114	0.757	0.0557	0.0024	0.00206
1000	0.859	0.0323	0.109	0.765	0.0955	0.0117	0.0107

### 3.5. Оценка разницы корреляционных функций

Проделав описанное с КФ в случаях А и Б, получим две матричные корреляционные функции  $S_{ij}$  и  $U_{ij}$ . Разницу между ними будем оценивать по формуле:

$$d_{ij} = \int_0^R |S_{ij} - U_{ij}|^2 r dr.$$

Общую разницу между двумя КФ будем оценивать как сумму

$$d = \frac{\sum_{i,j=1}^4 w_{ij} d_{ij}}{\sum_{i,j=1}^4 w_{ij}}, \quad (9)$$

где  $w_{ij} \geq 0$  – весовые коэффициенты. Мы использовали здесь следующие веса:

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Двойки на диагонали весовой матрицы  $W$  компенсируют “неравенство”: матрица  $d_{ij}$  симметрична и, значит, недиагональные элементы дают вклад в сумму (9) дважды.

### 4. ОПТИМАЛЬНЫЕ КОМБИНАЦИИ ПРЕДИКТОРОВ ФРОНТА

В §1 были построены различные предикторы атмосферного фронта. Для любого поля-предиктора  $P$  можно оценить КФ  $S_{ij}(r)$  и  $U_{ij}(r)$ . Разность между ними и показывает, насколько сильно отличаются массы воздуха по разные стороны от построенных фронтальных зон, а тем самым и качество их (зон) построения. Меняя поле  $P$ , стараемся добиться наибольшей разницы  $d$  между КФ  $S_{ij}(r)$  и  $U_{ij}(r)$ . У нас также есть механизм, позволяющий влиять на результат построения фронтальных зон  $C(P)$  – выбор поля  $P$  используемого в алгоритме, описанном в п. 2.2.

Поле  $P$  – результат действия некоторого оператора  $F$  на основные метеорологические поля: температуру, геопотенциал и ветер. В §1 для каждого барического уровня на основании каждого из этих полей были построены предикторы: модуль градиента температуры  $G = |\nabla T|$ , наибольшее собственное число матрицы Гессе для геопотенциала  $L$  и наибольшее собственное число  $R$  матрицы  $K$  для ветра. Построим сложный оптимальный предиктор атмосферного фронта в виде некоторой монотонно возрастающей по всем переменным функции  $F = F(G, R, L)$  от трех данных предикторов.

Самые простые монотонно возрастающие функции трех переменных – линейные с неотри-

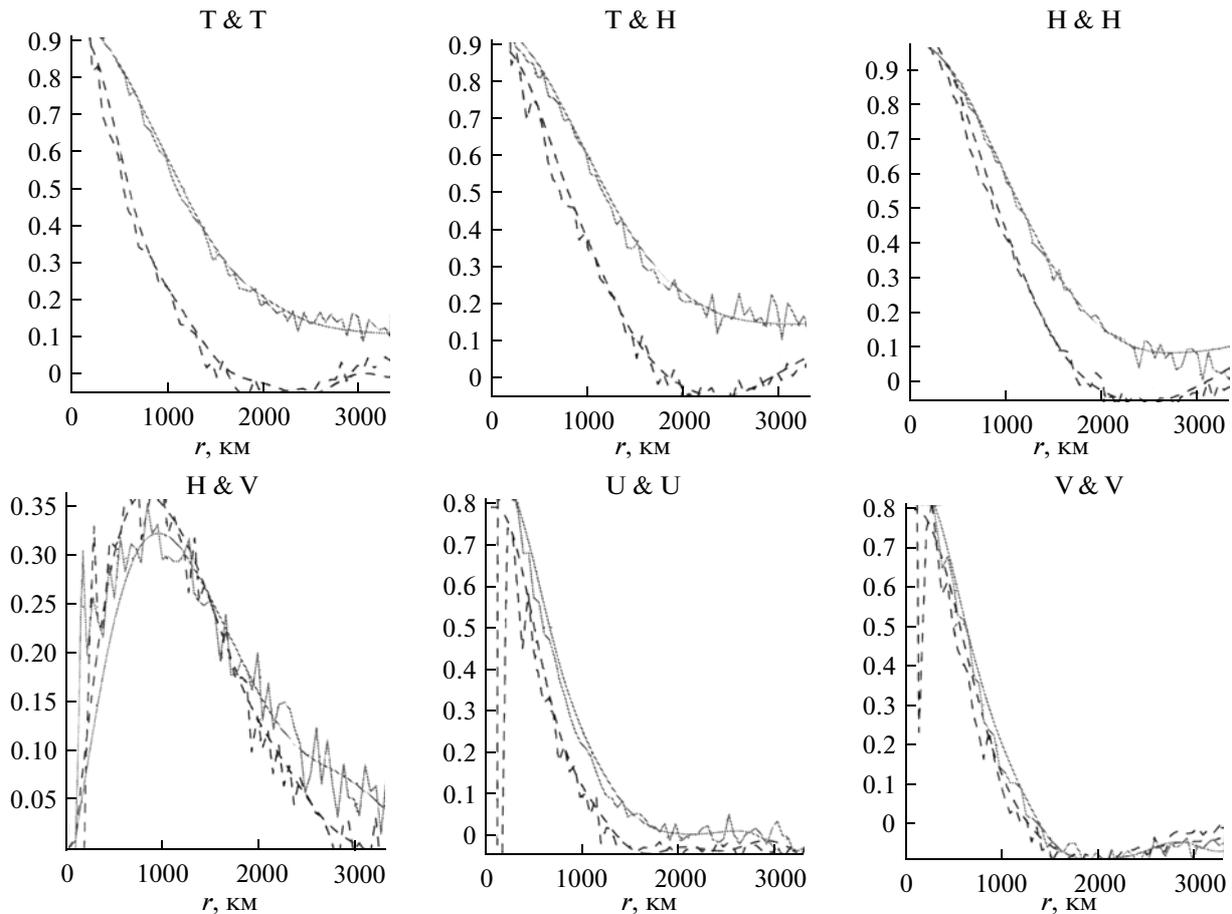


Рис. 7. Корреляционные функции на 400 гПа за апрель и результаты их сглаживания. Штриховая линия – случай А, точки разделены фронтальной зоной, сплошная – Б, не разделены.  $u$  – продольная компонента ветра,  $V$  – поперечная.

цательными коэффициентами. Будем искать  $F$  в виде

$$F = F_{\alpha\beta} = \alpha G + \beta R + (1 - \alpha - \beta)L, \quad (11)$$

где  $0 \leq \alpha, \beta$  и  $\alpha + \beta \leq 1$ .

#### 4.1. Результаты поиска оптимальных предикторов

Выбирая коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  из множества  $\{0; 0, 1; \dots; 1\}$  такими, чтобы было выполнено  $\alpha + \beta \leq 1$  (всего 66 пар), будем оценивать разницу  $d^{lm}(\alpha, \beta)$  между КФ в зависимости от уровня  $l$  и месяца  $m$ .

Так как нужно обеспечить непрерывную зависимость результата от времени года и уровня, то будем искать оптимальные  $\alpha$  и  $\beta$  в виде

$$\alpha = c_1 + c_2 \sin m + c_3 \cos m + c_4 l + c_5 \sin 2m + c_6 \cos 2m + c_7 l \sin m + c_8 l \cos m + c_9 l^2 + c_{10} l^3,$$

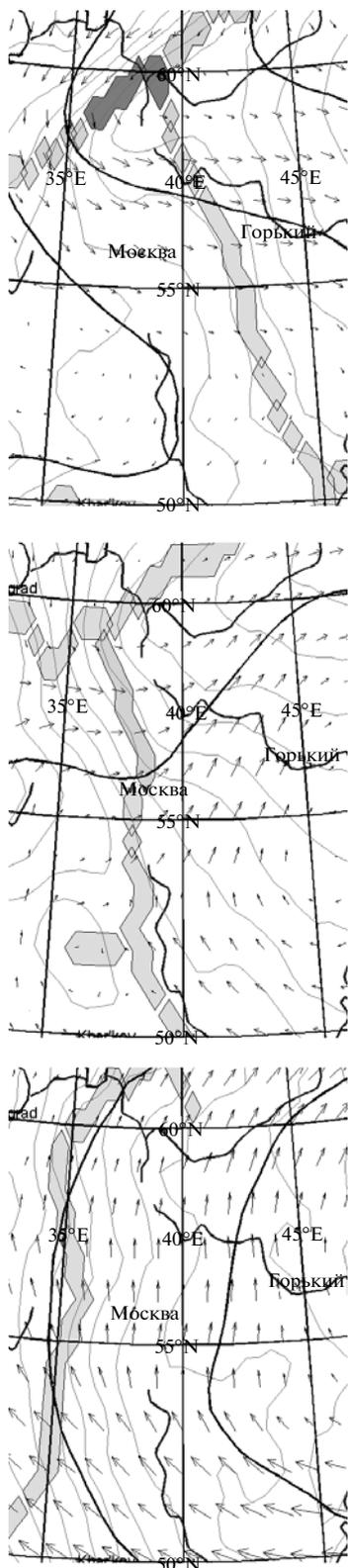
$$\beta = c_{11} + c_{12} \sin m + c_{13} \cos m + c_{14} l + c_{15} \sin 2m + c_{16} \cos 2m + c_{17} l \sin m + c_{18} l \cos m + c_{19} l^2 + c_{20} l^3,$$

где  $m = \pi[M + (D - 15)/30 + (T + Z)/24/30]/6$ , где  $M$  – номер месяца,  $D$  – дня,  $T$  – время суток и  $Z$  – заблаговременность прогноза (0 в случае ОА), а

$$l = \frac{\ln p - \ln 1000}{\ln 300 - \ln 1000}.$$

По найденным значениям  $d^{lm}(\alpha, \beta)$  для каждого уровня и месяца строится свой сплайн  $d_s^{lm}(\alpha, \beta)$  после чего методом градиентного спуска максимизируется функция

$$D(c_1, \dots, c_{20}) = \frac{\sum_{m=1}^{12} \sum_{l=0}^1 d_s^{lm}(\alpha, \beta) \sum_{r=0}^{3000} (w_U(\alpha, \beta) w_S(\alpha, \beta))^{1/3}}{\sum_{m=1}^{12} \sum_{l=0}^1 \sum_{r=0}^{3000} (w_U(\alpha, \beta) w_S(\alpha, \beta))^{1/3}}.$$



**Рис. 8.** Карты построенных по оптимальному критерию фронтальных зон в районе Москвы на уровнях (сверху вниз) 500, 700 и 950 гПа. Нанесены изолинии температуры (тонкие линии) через  $1^{\circ}\text{C}$ , геопотенциала (толстые) через 20 м и поле ветра на одноградусной сетке. Также отмечены крупные реки.

Пары найденных оптимальных  $\alpha$  и  $\beta$  для  $m = 2$  и  $m = 7$  вместе с коэффициентами  $\mu_{\alpha\beta}^8$  приведены в табл. 3.

#### 4.2. Результаты оценок корреляционных функций

На рис. 7 приведены сглаженные КФ для различных полей на 400 гПа в апреле. Для разделения пар станций на случаи А и Б для каждого барического уровня использовался оптимальный критерий, определенный в п. 4.1. Он был вычислен на основании архива ОА на сетке с шагом  $0.5^{\circ}$  с ноября 2009 г. по декабрь 2010 г. (в общей сложности 336 сроков).

В табл. 3 приведены результаты поиска оптимальных предикторов фронта. Значения  $d(\alpha, \beta)$  показывают, что в феврале максимум фронтальной активности приходится на уровне 400–500 гПа, а в июле он поднимается на уровни 300–400 гПа. Этим оправдывается выбор уровня 400 гПа, как базового при вертикальном согласовании фронтальных зон, см. п. 2.3.

#### 5. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ФРОНТАЛЬНЫХ ЗОН

Рассмотрим подробно метеополя за два дня, 7 декабря 2009 г. и 17 апреля 2010 г. Эти две даты примечательны ошибками краткосрочного прогноза осадков над Москвой, максимальными за зимний период 2009–2010 гг. В этих случаях даже задним числом синоптики затруднялись объяснить ошибки прогнозов. В первом случае для Москвы было предсказано на порядок меньшее количество осадков, чем выпало. Во втором, напротив, было предсказано существенное количество осадков при прохождении атмосферного фронта, но осадков не было вовсе. Для наших расчетов использовались данные ОА NSCP на полуградусной сетке.

На рис. 8 показаны карты фронтальных зон в районе Москвы за 7 декабря 2009 г. Нанесены изолинии температуры через  $1^{\circ}\text{C}$  (тонкие линии), и изолинии геопотенциала через 20 м (толстые линии) и поле ветра на одноградусной широтно-долготной сетке. Закрашены фронтальные зоны. Видно (не только по данным картам, а по картам на всех уровнях), что атмосферный фронт действительно проходил, и был расположен над Москвой с наклоном в восточную сторону, при этом над Москвой фронт был в 00 часов примерно на высоте 700 гПа.

<sup>8</sup> Коэффициенты перенормировки  $\mu_{\alpha\beta}$  обеспечивают одинаковую среднюю площадь фронтальных зон при различных  $\alpha$  и  $\beta$ , что дает корректное сравнение разных предикторов.



**Рис. 9.** Карты построенных по оптимальному критерию фронтальных зон в районе Москвы за 17 апреля 2010 г. на уровнях (сверху вниз) 500, 700 и 950 гПа.

На рис. 9 показаны карты фронтальных зон в районе Москвы за 17 апреля 2010 г. Видно (и не только по данным картам, а по картам на всех уровнях), что над Москвой фронта обнаружено не было.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложены предикторы фронтальных зон, обеспечивающие более точное описание фронтальных зон, чем традиционно используемые вертикальная компонента вихря скорости ветра и горизонтальный оператор Лапласа от геопотенциала (давления на уровне моря). Это наибольшие собственные числа матриц, составленных из первых горизонтальных производных горизонтального ветра и вторых горизонтальных производных (матрицы Гессе) геопотенциала (давления на уровне моря) соответственно.

2. Для расчетов по данным на регулярной дискретной двумерной сетке вместо традиционных методов второго порядка используются точные методы, основанные на специальном дискретном преобразовании Фурье, в случае сферы, а в случае плоскости – компактные схемы высокого (не ниже 4-го) порядка аппроксимации.

3. Разработаны эвристические методы проведения линий атмосферных фронтов вдоль “гребней” поля предиктора.

4. Получены оценки корреляционных функций (КФ) для кластеров во множестве пар точек: двух точек, разделенных атмосферным фронтом (принадлежат разным воздушным массам) и не разделенных (принадлежат одной воздушной массе), соответственно. КФ вычислялись для нормированных на среднемесячное значение данных измерений на аэрологических станциях. Использовался накопленный авторами архив наблюдений и ОА NCEP на сетке  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  за 336 дней. Эксперименты производились для территории к северу от  $30^\circ$  N. Учет различий в КФ для двух кластеров может быть использован при усвоении (ОА) данных наблюдений для уменьшения погрешности интерполяции данных наблюдений в точки сетки прогностической модели.

5. Предложены методы комбинирования нескольких (трех) полей предикторов, и экспериментально для каждого барического уровня подобраны оптимальные веса для исходных предикторов. Оптимизация весов проводилась по следующему критерию качества: максимальное различие между КФ  $S_{ij}(r)$  и  $U_{ij}(r)$ , т. е. между КФ для двух кластеров.

6. Для каждого месяца и уровня вычислены “оптимальные” коэффициенты для предикторов. При использовании этих коэффициентов на каждом уровне строятся согласованные по вертикали фронтальные зоны. При этом во фронтальных поверхностях возможно наличие “дыр”, и эти поверхности не всегда простираются от поверхности Земли до тропопаузы. Поэтому графическое представление результатов нетривиально.

7. Разработанное программное обеспечение для диагностики геометрии атмосферных фронтов применялось и к прогностическим полям температуры, ветра и геопотенциала по модели NCEP с пространственным разрешением  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  с заблаговременностью 12, 24 и 36 часов. Погрешно-

сти прогноза фронтов при такой заблаговременности влияют сравнительно слабо. Топология фронтов в целом сохраняется (около 4–6 процентов в прогнозе на 12 часов, 6–9 процентов на 24 часа и 7–10 процентов на 36 часов фронтов от общей длины не находят подтверждения в анализе и столько же появляются в анализе), средний сдвиг фронта при переходе от полей прогноза к полям ОА на срок прогноза составляет около 60–70 км (вне зависимости от заблаговременности прогноза).

8. Следует ожидать, что с улучшением пространственного разрешения ОА и прогностических моделей и с улучшением точности прогнозов метеорологических полей качество диагностики геометрии атмосферных фронтов будет так же улучшаться.

Авторы благодарны М.Г. Найшулеру и Б.Е. Пескову за полезные обсуждения синоптической интерпретации наших результатов. А.Н. Багров и А.Ю. Недачина помогли нам в работе с базами данных ГМЦ РФ. Работа была частично поддержана грантом ГУ-ВШЭ (ТЗ-47, 2009).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. М., Наука, 1986. 733 с.
2. Кочин Н.Е. Собрание сочинений. Т. 1. М.: АН СССР, 1949. 615 с.
3. Geb M. Neue Aspekte und Interpolationen zum Luftmassen und Frontenkonzept. // *Met. Abh. Fr. Univ. Berlin*. 1971. Bd. 109. S. 1–138.
4. Гордин В.А. Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Вычислительные аспекты. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 264 с.
5. Gordin V.A. *Mathematical Problems and Methods in Hydrodynamical Weather Forecasting*. Amsterdam: Gordon & Breach Publ. House, 2000. 842 p.
6. Neisser J., Gørsdorf V., Steinhagen H. *Instruments and Observing Methods*. 1994. Rep. WMO N 57, WMO/TD-588, 430 p.
7. Гордин В.А. Как это посчитать? Обработка метеорологической информации на компьютере. М.: МЦНМО, 2005. 279 с.
8. Гордин В.А., Халявин А.В. Проекционные методы подавления ошибок метеополей перед вычислением производных // *Метеорология и гидрология*. № 10. 2007. С. 55–65.
9. Гордин В.А. Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Аналитические аспекты. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 256 с.
10. Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. М.: Физматлит, 2010. 733 с.
11. Huber-Pock F., Kress Ch. An Operational Model of Objective Frontal Analysis Based on ECMWF Products // *Meteorol. Atmosp. Phys.* 1989. V. 40. № 4. P. 170–180.
12. Алдухов О.А., Гордин В.А. Трехмерные корреляционные функции основных аэрологических величин // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2001. Т. 37. № 1. С. 3–23.
13. Алдухов О.А., Гордин В.А. Оценки анизотропии корреляционной структуры полей метеорологических величин по наблюдениям глобальной аэрологической сети // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2005. Т. 41. № 3. С. 399–409.
14. Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика*. Т. 1. Л.: Гидрометеиздат, 1992. 696 с. Т. 2. 1996. М.: Наука, 742 с.
15. Алдухов О.А., Багров А.Н., Гордин В.А. Статистические характеристики прогностических метеорологических полей и их использование для объективного анализа // *Метеорология и гидрология*. 2002. № 10. С. 18–33.
16. Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства*. М.: Физматгиз, 1961. 472 с.

## Objective Analysis of the Structure of Three-Dimensional Atmospheric Fronts

F. L. Bykov<sup>a</sup> and V. A. Gordin<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Moscow State University, Moscow, 119992 Russia*

<sup>b</sup> *Hydrometeorological Centre of Russia, Bol'shoi Predtechenskii per. 9–13, Moscow, 123376 Russia*

*e-mail: vagordin@mail.ru*

Received October 15, 2010

**Abstract**—A computational method for diagnosing three-dimensional atmospheric fronts from temperature, wind, and geopotential fields on a three-dimensional regular grid is proposed. The criterion, which serves for the diagnosis of atmospheric fronts, is discussed. The weights of the input information about the mentioned fields are optimized based on the maximal difference between the correlation functions for (a) pairs of particles separated by the front and (b) pairs from one synoptic mass. These weights were different for different baric levels. The correlation functions and the optimization of weights were estimated on the basis of the archive of fields of the NCEP objective analysis on the half-degree latitude–longitude grid and data from aerological observations. The results of numerical experiments on the construction of atmospheric fronts are presented. Applying the described method to fields predicted for a term of up to 36 h showed that errors in the prognostic models introduce a relatively weak distortion into the geometry of atmospheric fronts.

**Keywords:** contact discontinuity, predictor, Hessian, correlation function, compact scheme, wind, geopotential, temperature.