А.А. Рубчинский

Международная лаборатория выбора и анализа решений Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», университет «Дубна»

КВАЗИСПРАВЕДЛИВЫЙ ДЕЛЕЖ С НЕСКОЛЬКИМИ УЧАСТНИКАМИ

Введение

В середине 1990-х годов американскими учеными Брамсом и Тэйлором была предложена новая модель разрешения конфликтов. В этой модели конфликт состоит в разногласиях сразу по нескольким вопросам (пунктам), причем важность этих пунктов для различных участников, вообще говоря, различна. Именно эти различия позволяют предложить такой вариант улаживания конфликта, при котором каждый получает то, что его больше устраивает по его собственной оценке. В книге [Cohen, 1994], посвященной переговорам, утверждается: «Успешный подход к переговорам заключается в выяснении того, что в действительности нужно противной стороне, и в доведении до ее сознания того, каким образом она могла бы добиться желаемого, не мешая мне получить свое».

Предложенное уже в первых работах на эту тему формальное определение справедливого дележа требует одновременного выполнения условий равноценности, отсутствия зависти и эффективности. В то же время как при наличии неделимых пунктов, так и для числа участников конфликта, большего двух, наличие справедливых дележей не гарантируется. Многочисленные примеры этому при неделимости некоторых пунктов для двух участников приведены в работах [Rubchinsky, 2009; 2010], а при делимости всех пунктов для большего числа участников — в книге [Brams, Taylor, 1999] и в цитируемых в ней статьях [Willson, 1998; Reijnierse, Potters, 1998]. В качестве выхода из такого положения в обоих случаях предлагаются различные модификации самого определения справедливого дележа. При этом положительными результатами являются доказательства наличия справедливых (в том или ином смысле) дележей, а также алгоритмы их нахождения.

В книге [Brams, Taylor, 1999] уже относительно трех «классических» условий справедливости говорится, что выбор тех из них, которые можно отбросить, является неформальным и определяемым конкретной ситуацией. В публикациях по этой теме обычно обсуждаются и предлагаются те или иные модификации условий справедливости, а затем доказываются утверждения о существовании (при рассматриваемых модификациях) справедливых дележей. Естественно, справедливые (в том или ином смысле) дележи, вообще говоря, могут оказаться различными. Однако множество, на котором рассматриваются соответствующие оптимизационные задачи, во всех случаях является одним и тем же — множеством всех допустимых дележей. Определение структуры этого множества при любом числе участников и при любом распределении делимых и неделимых пунктов оказывается важным «техническим» этапом при поиске справедливых в любом смысле дележей. Поэтому анализ множества всех дележей, нахождение его характерных точек, паретовской границы и т.д. представляются важными задачами. Именно им и посвящена настоящая работа.

Для выделения окончания утверждений и доказательств используется знак ■.

Основные понятия и обозначения

Введем необходимые формальные понятия и обозначения, следуя в основном изложению в работе [Rubchinsky, 2010]. Предположим, что всего имеется L делимых и M неделимых пунктов. Пронумеруем пункты так, чтобы сначала шли делимые пункты, а потом — неделимые. Случаи $L = 0$ (делимые пункты отсутствуют) и $M = 0$ (неделимые пункты отсутствуют) не исключаются. Число участников обозначим через m.

Сами участники *независимо друг от друга* определяют числа a_{ij} — относительные важности i-го пункта для j-го участника, $i = 1, ..., L + M$; $j = 1, ..., m$. Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей важности. Предполагается, что эти важности нормированы в том смысле, что сумма важностей является одной и той же для всех участников, т.е.

$$\sum_{i=1}^{L} a_{ij} + \sum_{i=L+1}^{L+M} a_{ij} = D \ (j = 1, \ \dots, \ m). \tag{1}$$

Обычно считается, что число $D = 100$, что позволяет интерпретировать важность a_{ij} как процент значимости i-го пункта для j-го участника. Число D и значимость a_{ij} предполагаются целыми числами.

Каждый дележ x может быть представлен в виде пары $\langle x, \sigma \rangle$, где матрица $x = (x_{ij})$ $(i = 1, ..., L; j = 1, ..., m)$, матрица $\sigma = (\sigma_{ij})$ $(i = 1, ..., M; j = 1, ..., m)$. Для всех элементов матрицы x выполнено неравенство $0 \le x_{ij} \le 1$ (x_{ij} есть доля i-го пункта, доставшаяся j-му участнику), а для всех элементов матрицы σ выполнено $\sigma_{ij} \in \{0,1\}$ ($\sigma_{ij} = 1$ означает, что $(i + L)$-й пункт целиком достался j-му участнику). Для всех строк матрицы x выполнено равенство: $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$ $(i = 1, \ldots, L)$, а для всех строк матрицы σ выполнено равенство $\sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} = 1$ $(i = 1, \ldots, M)$. Для любого дележа $\langle x, \sigma \rangle$ положим:

$$g_j^d(x) = \sum_{i=1}^{L} a_{ij} x_{ij} (j = 1, \ldots, m), \tag{2a}$$

$$g_j^w(\sigma) = \sum_{i=1}^{M} a_{L+i,j} \sigma_{ij} (j = 1, \ldots, m), \tag{2b}$$

$$g_j(x, \sigma) = g_j^d(x) + g_j^w(\sigma) (j = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

Формулы (2a), (2b), (3) означают, что общий доход любого участника является суммой двух слагаемых — дохода $g_j^d(x)$ от делимых пунктов и дохода $g_j^w(\sigma)$ от неделимых пунктов. Переходя от индивидуальных доходов к векторным, введем в рассмотрение векторы $g^d(y) = (g_1^d(y), \ldots, g_m^d(y))$, $g^w(\sigma) = (g_1^w(\sigma), \ldots, g_m^w(\sigma))$, $g(x, \sigma) = (g_1(x, \sigma), \ldots, g_m(x, \sigma))$, определяющие доходы всех участников от делимых и неделимых пунктов. Переходя от доходов, соответствующих конкретным дележам $\langle x, \sigma \rangle$, к множеству всех дележей Z, положим $G^d = \{g^d(x) | \langle x, \sigma \rangle \in Z\}$, $G^w = \{g^w(\sigma) | \langle x, \sigma \rangle \in Z\}$, $G = \{g(x, \sigma) | \langle x, \sigma \rangle \in Z\}$. Множество G представляет собой множество всех возможных векторных доходов при всех возможных дележах $\langle x, \sigma \rangle \in Z$. Оно называется ***множеством достижимости***, поскольку каждый векторный доход $g \in G$ может быть получен как результат некоторого дележа. По построению множество достижимости G является образом множества всех платежей Z при линейном отображении, определяемом формулами (2a), (2b), (3).

Учитывая, что в любом дележе распределение любого пункта между участниками может быть выбрано независимо от распределений других пунктов, получим важное равенство $G = G^d + G^w$, где G является множеством достижимости.

Модифицированные условия справедливости и оптимизационные постановки задач поиска справедливых дележей

Напомним содержательно важные свойства дележей. Эти свойства реально относятся не к исходным дележам, а к соответствующим им векторным доходам. Именно в этих терминах они и будут формулироваться, а сам исходный дележ $\langle x, \sigma \rangle$, определяющий доход $g(x, \sigma)$, будет в большинстве формул опускаться. Доход $g \in G$ называется:

- ***пропорциональным***, если

$$g_j \geq D / m \ (j = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

т.е. каждый из m участников получает не менее m-й части от максимально возможной суммы в D баллов по *своей собственной оценке*;

- ***равноценным***, если

$$g_p = g_q \ (p, q = 1, ..., m), \tag{5}$$

т.е. все получают поровну по *своим собственным оценкам*;

- ***эффективным***, если

$$g \in G^P, \tag{6}$$

т.е. вектор g недоминируем по Парето никаким другим вектором h. Это означает, что если доход h_i у некоторого участника больше, чем доход g_i, то какой-то другой участник обязательно получит меньше;

- ***свободным от зависти***, если для любых $j, p = 1, ..., m, j \neq p$

$$g_j \geq \sum_{i=1}^{L} a_{ij} x_{ip} + \sum_{i=1}^{M} a_{L+i,j} \sigma_{ip}, \tag{7}$$

т.е. доход j-го участника по его собственной оценке не может быть меньше дохода любого другого участника по оценке *того же j-го участника* (здесь компоненты дележа $\langle x, \sigma \rangle$ относятся к p-му участнику).

Остановимся на формуле (7) подробнее. В отличие от предшествующих формул (4)–(6) в нее компоненты дележа $\langle x, \sigma \rangle$ *входят в явном виде*. Однако в пространстве доходов $m \times (m - 1)$ линейных неравенств (7) определяют ровно столько же линейных неравенств:

$$(\alpha_{jp}, g) \geq \beta_{jp} \ (j, p = 1, ..., m, j \neq p) \tag{8}$$

относительно переменных g_j ($j = 1,..., m$), причем коэффициенты неравенств — компоненты векторов α_{jp} — и их правые части β_{jp} выражаются линейно через элементы исходной матрицы важностей a средствами стандартной линейной алгебры.

Таким образом, «классические» содержательные свойства дележей формулируются в виде формальных условий на доходы в линейном евклидовом пространстве E^m размерности m. Пропорциональность следует из отсутствия зависти, так что можно ограничиться тремя свойствами.

Дележ называется ***справедливым***, если соответствующий ему доход одновременно равноценен, эффективен и свободен от зависти. В книге [Brams, Taylor, 1996] рассмотрены справедливые дележи при делимости всех пунктов и числе участников, равном двум. Они существуют для любой матрицы важности A и легко находятся предложенным авторами методом «подстраивающегося победителя». Однако при трех участниках этот метод неприменим, и (как уже указывалось) справедливые дележи могут отсутствовать.

В разделе «Распространение на троих и более участников» 5-й главы книги [Brams, Taylor, 1999] рассмотрены три варианта отказа от одного из трех «классических» условий справедливости и установлено наличие решения при выполнении любых двух условий.

Приведем шесть модифицированных постановок задач поиска справедливого (в том или ином смысле) дележа в виде задач оптимизации на множестве достижимости G. Это возможно сделать именно потому, что основные свойства дележей представлены как свойства соответствующих им доходов (см. формулы (4), (5), (6) и (8)).

1. Справедливым называется дележ, обладающий свойствами равноценности и эффективности. В силу этих свойств все такие дележи максимизируют доход одного участника. Для поиска справедливых (в этом смысле) дележей можно решать задачу оптимизации 1:

$$g_1 \to \max_{g \in G}$$

при условиях

$$g_j = g_1 \ (j = 2, \ldots, m),$$

$(g_1, \ldots, g_m) \in G^P$ (паретовская граница множества G).

Для случая делимости всех пунктов ($M = 0$) доказательство существования решений задачи 1 и метод их нахождения приведены в работе [Willson, 1998].

2. Справедливым называется дележ, обладающий свойствами эффективности и отсутствия зависти. Такую задачу можно рассматривать как задачу оптимизации 2:

$$\max_j g_j - \min_j g_j \to \min_{g \in G}$$

при условиях

$$(g_1, \ldots, g_m) \in G^P,$$

$$(\alpha_{jp}, g) \geq \beta_{jp} \ (j, p = 1, \ldots, m, j \neq p).$$

Для случая делимости всех пунктов ($M = 0$) доказательство существования решений задачи 2 и метод их нахождения приведены в статье [Reijnierse and Potters, 1998].

3. Справедливым называется дележ, обладающий свойствами равноценности и отсутствия зависти. Такую задачу можно рассматривать как задачу оптимизации 3:

$$g_1 \to \max_{g \in G}$$

при условиях

$$g_j = g_1 (j = 2, ..., m),$$
$$(\alpha_{jp}, g) \geq \beta_{jp} \ (j, p = 1, ..., m, j \neq p).$$

Для случая делимости всех пунктов ($M = 0$) доказательство существования решений задачи 3 и метод их нахождения приведены в разделе «Распространение на троих и более участников» 5-й главы книги [Brams, Taylor, 1999].

Заметим, что при отказе от условия делимости всех пунктов существование решений задач 1–3 не гарантируется. Однако во всех случаях условия задачи оптимизации совпадают с требуемыми свойствами, поэтому все справедливые (в том или ином смысле) дележи *с гарантией совпадают* с некоторыми точками из множества достижимости, определяемыми указанными условиями.

4. Справедливым называется дележ, обладающий свойством эффективности и максимизирующий выражение $\min_j g_j$ на паретовской границе G^P множестве достижимости G. Такая задача уже сформулирована как задача оптимизации (задача оптимизации 4):

$$\min_j g_j \to \max_{g \in G}$$

при условии

$$(g_1, ..., g_m) \in G^P.$$

5. Справедливым называется дележ, обладающий свойством эффективности и минимизирующий выражение $\max_j g_j - \min_j g_j$ на паретовской границе G^P множества достижимости G. Такая задача уже сформулирована как задача оптимизации (задача оптимизации 5):

$$(\max_j g_j - \min_j g_j) \to \min_{g \in G}$$

при условии

$$(g_1, ..., g_m) \in G^P.$$

6. Справедливым называется дележ, обладающий свойством равноценности и максимизирующий выражение g_1 на множестве достижимости G. Такая задача уже сформулирована как задача оптимизации (задача оптимизации 6):

$$g_1 \to \max_{g \in G}$$

при условии

$$g_j = g_1 \ (j = 2, ..., m).$$

В работе [Rubchinsky, 2009] при $m = 2$ установлено существование дележей с требуемыми свойствами в задачах 4 и 5 и показано, что в задаче 6 их существование не гарантировано.

Рассмотрим теперь целевые функции и условия во всех шести приведенных задачах оптимизации совместно. Целевые функции имеют один из следующих трех видов: g_1, $\max_j g_j - \min_j g_j$, $\min_j g_j$. Условия имеют один из следующих трех видов: $g_j = g_1$ ($j = 2, ..., m$), $(\alpha_{jp}, g) \geq \beta_{jp}$ ($j, p = 1, ..., m, j \neq p$), $(g_1, ..., g_m) \in G^P$ (паретовская граница множества G).

Заметим, что все данные целевые функции являются линейными на множествах

$$U_\pi = \{g \in E^m \mid g_{i_1} \leq g_{i_2} \leq \ldots \leq g_{i_m}, (i_1, i_2, \ldots, i_m) = \pi\}. \tag{9}$$

Множества U_π являются выпуклыми многогранными конусами, так как вместе с любой точкой $g \in U_\pi$ для любого неотрицательного числа λ существует точка $\lambda g \in U_\pi$. Общий подход к решению поставленных в этом разделе оптимизационных задач рассматривается в следующем разделе.

Построение универсального множества для задач оптимизации 1–6

Формула $G = G^d + G^w$ из раздела 2 дает достаточно грубое представление о структуре множества достижимости, но все же позволяет получить следующее.

Утверждение 1. Множество достижимости G является объединением выпуклых многогранников, полученных из одного и того же выпуклого многогранника G^d параллельным переносом на векторы, образующие конечное множество G^w■.

Все рассмотренные в предыдущем разделе задачи оптимизации 1–6 являются задачами оптимизации на данном множестве G указанного типа. По построению множество G^w является конечным множеством векторов из E^m: $G^w = \{g_1^w, ..., g_t^w\}$. Обозначим через $G(i, \pi)$ пересечение множества $G^d + g_i^w$ с множеством U_π, определенным формулой (9), и с множествами, определяемыми условиями вида (5) и (8). Все пересекающиеся множества являются выпуклыми многогранниками, в силу чего их пересечение $G(i, \pi)$ также является выпуклым многогранником. По построению каждый из этих многогранников содержится в одном из множеств U_π. В конце предыдущего раздела утверждалось, что на множествах U_π все рассматриваемые целевые функции линейны. Следовательно, то же самое верно для содержащихся в них выпуклых многогранников $G(i, \pi)$. Обозначим через $V(i, \pi)$ конечное множество вершин $G(i, \pi)$. Напомним, что решение линейной задачи оптимизации на выпуклом многограннике совпадает с одной из его вершин. Поэтому проведенными рассуждениями доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. Решение любой из рассмотренных в предыдущем разделе задач справедливого дележа, представленных в виде задач оптимизации 1–6, содержится в конечном множестве

$$V(A) = \bigcup_{\pi} \bigcup_{i}^{T} V(i, \pi) \blacksquare \tag{10}$$

Таким образом, $V(A)$ — это универсальное конечное множество, зависящее только от самой задачи, но не от используемого определения справедливости. При этом оно всегда содержит точки (доходы), соответствующие справедливым (в различном смысле) дележам.

Вычислительная сложность предложенной процедуры построения универсального множества приближенно определяется следующим образом. В рассматриваемой модели есть три параметра, влияющих на количество операций: число участников m, число пунктов $n = L + M$ и число D, равное сумме важностей всех пунктов. Естественно, что перебор присутствует. Но экспоненциальная оценка есть только по параметру m. В частности, один алгоритм связан с необходимостью просмотра всех перестановок длины m. Однако, ориентируясь на реальные ситуации, можно считать, что число участников не превосходит 5–6, поэтому перебор по m весьма невелик. Построение множеств G^d и G^w имеет (очень грубую) степенную оценку D^{m-1}. Наконец, число пунктов *n, вообще, не входит в оценки*: во всех случаях, в которых рассматриваются делимые пункты, неделимые пункты или все пункты, число операций оценивается предыдущими оценками, зависящими от m и D. Заметим, что подавляющее большинство множеств $G(i, \varpi)$ оказываются пустыми, что также сильно влияет (в сторону уменьшения) на время выполнения алгоритмов.

Заключение

В данной работе рассмотрена наиболее общая ситуация в рамках модели справедливого дележа, предложенной Брамсом и Тэйлором и развитая в работах других ученых. То есть предполагается любое число участников при наличии как делимых, так и неделимых пунктов. При этих условиях установлена общая структура множества достижимости и разработан алгоритм, позволяющий найти конечное множество в пространстве доходов, названное универсальным множеством. Это название определяется тем, что такое множество содержит решения задачи о справедливом дележе для самых разных представлений о справедливости, во всяком случае для всех, которые содержатся к настоящему моменту в литературе, и для любых их комбинаций.

Дальнейшее развитие связано с двумя основными направлениями. Первое направление находится в рамках той же модели Брамса–Тэйлора. Представляется целесообразным:

• разработать диалоговую программную систему, реализующую предложенные алгоритмы, и провести на ней серьезные вычислительные эксперименты;

• рассмотреть важный вопрос о нахождении таких решений, которые обеспечивали бы минимальное число реальных актов деления. В частности, при отсутствии неделимых пунктов число актов деления не превышает $m - 1$, что установлено в уже цитированной работе [Willson, 1998]. Однако при наличии неделимых пунктов этот вопрос ранее не ставился;

• рассмотреть реальные ситуации, в которых применение подхода, основанного на справедливых дележах, представляется полезным и перспективным. В частности, возможно использование этих идей при распределении финансирования на различные цели между регионами.

Второе направление связано с модификациями самой модели. Основная цель возможных модификаций — уменьшение требований к информации, запрашиваемой у участников, с одновременной возможностью получения содержательно понятных и глубоких результатов. Это требует дальнейшего анализа ряда конфликтных ситуаций и поиска адекватных им моделей распределительного типа, возможно, за счет учета многокритериальности при оценке участниками различных пунктов.

Автор благодарит Международную лабораторию анализа и выбора решений за частичную поддержку (проекты ЦФИ 53.0 и 55.0).

Литература

1. *Cohen H.* You Can Negotiate Anything. Zebra Books, 1994. (Русский перевод: Коэн Г. Обо всем можно договориться. М.: АСТ, 2010.)

2. *Brams S.J., Taylor A.D.* Fair Division. Cambridge University Press, 1996.

3. *Brams S.J., Taylor A.D.* The Win-Win Solution. W.W. Norton & Company, 1999. (Русский перевод: Брамс С.Д., Тэйлор А.Д. Делим по справедливости. М.: СИНТЕГ, 2002.)

4. *Rubchinsky A.* Fair Division with Divisible and Indivisible Items: Working paper WP7/2009/05. M.: NRU Higher School of Economics, 2009.

5. *Rubchinsky A.* Brams-Taylor Model of Fair Division for Divisible and Indivisible Items // Mathematical Social Science. 2010. Vol. 60. Iss. 1. P. 1–14.

6. *Willson S.J.* Fair Division Using Linear Programming. Preprint, Department of Mathematics. Iowa State University, 1998.

7. *Reijnierse J.H., Potters J.A.M.* On Finding an Envy-Free Pareto-Optimal Decision // Mathematical Programming. 1998. Vol. 83. No. 2. P. 291–311.