

ПОТОКИ ЧЕРРИ НА ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ

С. Х. АРАНСОН, Е. В. ЖУЖОМА, Т. В. МЕЛВЕДЕВ

Целью статьи является исследование взаимосвязи между гладкими и топологическими свойствами для нового класса динамических систем на двумерной сфере S^2 , так называемых потоков Черри. До сих пор такие потоки рассматривались лишь на двумерном торе T^2 [1]–[3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Поток f^t на T^2 называется *поток Черри*, если:

1) f^t имеет на T^2 квазиминимальное множество $\Omega(f^t)$, содержащее конечное число состояний равновесия O_i ($i = \overline{1, k}$), являющихся грубыми седлами;¹

2) для каждого седла $O_i \in \Omega(f^t)$ среди его сепаратрис L_j^i ($j = \overline{1, 4}$) при циклическом обходе вокруг O_i сепаратриса L_3^i , которую назовем *черной сепаратрисой*, не лежит в $\Omega(f^t)$ и не имеет $\Omega(f^t)$ своим предельным множеством, а L_1^i, L_2^i, L_4^i имеют $\Omega(f^t)$ своим α - или ω - предельным множеством.²

Связные компоненты множества $T^2 \setminus (\Omega(f^t) \cup_{i=1}^4 L_2^i \cup L_4^i)$, содержащие черные сепаратрисы, называются *черными ячейками*, остальные компоненты этого множества называются *серыми ячейками*.

Для седла $O_i \in \Omega(f^t)$ обозначим через $\lambda_1^i (\lambda_2^i)$ собственное значение, соответствующее сепаратрисам $L_2^i, L_4^i (L_1^i, L_3^i)$. Величина $\nu_i = -\lambda_2^i / \lambda_1^i$ называется *характеристической величиной седла O_i* .

Представим S^2 в виде R^2/G , где группа G преобразований евклидовой плоскости R^2 порождена отображениями $x' = (-1)^k x + m$, $y' = (-1)^k y + n$, $m, n, k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – группа целых чисел). Естественная проекция $\pi: R^2 \rightarrow S^2$ является разветвленным универсальным накрытием с точками разветвления $O_{m,n} \left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2} \right) \in R^2$ индекса ветвления два каждая. На S^2 получаем множество ветвления Σ , состоящее из четырех отмеченных точек s_i ($i = \overline{1, 4}$), являющихся проекцией точек разветвления. Пусть $\Gamma \subset G$ подгруппа преобразований вида: $x' = x + m$, $y' = y + n$ ($m, n \in \mathbb{Z}$). Тогда $R^2/\Gamma = T^2$ и проекция $p: R^2/\Gamma \rightarrow R^2/G$ является двулистным разветвленным накрытием.

Рассмотрим на S^2 слоение F_0 с особенностями s_i ($i = \overline{1, k}$, $k \geq 5$), где $s_j \in \Sigma$ ($j = \overline{1, 4}$) – иглы [4], [5], а остальные особенности s_i имеют целый индекс Пуанкаре. Тогда на T^2 существует накрывающее относительно проекции p слоение $\hat{F}_0 = p^{-1}(F_0)$, особенности которого имеют целый индекс.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Слоение F_0 на S^2 называется *отмеченным C^r -слоением Черри*, если накрывающее слоение $\hat{F}_0$ на T^2 вкладывается в поток Черри $\hat{f}^t$, индуцированный векторным полем гладкости C^r .

Рассмотрим теперь слоение F на S^2 , у которого четыре иглы не обязательно совпадают с множеством отмеченных точек Σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Слоение F называется *C^r -слоением Черри на S^2* , если существует C^∞ -дiffeоморфизм $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ такой, что φ переводит иглы слоения F в точки из Σ и слоение $\varphi(F)$ является отмеченным C^r -слоением Черри на S^2 .

Для слоения Черри F на S^2 обозначим через $\Omega(F)$ его квазиминимальное множество, через $\text{Sing}(F)$ – множество его особенностей, и через $\text{Sep}(F)$ – множество сепаратрис игловых особенностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-01407) и International Science Foundation. Long-Term Research Grants in the Fundamental Sciences (Grant R99000).

¹ Квазиминимальным множеством $\Omega(f^t)$ потока f^t называется замыкание незамкнутой устойчивой по Пуассону полутраектории.

² Из определения 1 следует, что для каждого седла $O_i \in \Omega(f^t)$ сепаратриса L_1^i и, по крайней мере, одна из сепаратрис L_2^i, L_4^i устойчива по Пуассону либо при $t \rightarrow -\infty$, либо при $t \rightarrow +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Поток f^t на S^2 называется *потокот Черри C^r -интегрального типа*, если: 1) интегральные кривые потока f^t образуют C^r -слоение Черри $F = F(f^t)$; 2) через каждую точку множества $S^2 \setminus [\Omega(F) \cup \text{Sing}(F) \cup \text{Sep}(F)]$ проходит одномерная траектория потока f^t .

Если L – одномерная траектория потока Черри f^t на S^2 , то ее α - или ω -предельное множество, за исключением конечного числа точек, локально гомеоморфно прямому произведению канторовского множества на отрезок (в современной терминологии такое предельное множество, если оно является асимптотически притягивающим или отталкивающим, называется *странным аттрактором* или *странным репеллером*; потоки со странными аттракторами и странными репеллерами на S^2 исследовались в [6]).

Не ограничивая общности, можем считать (см. определение 3), что у слоения Черри (и соответствующего потока Черри) на S^2 иглы лежат в Σ . Каждому седлу $O \in \Omega(\hat{f}^t)$ потока Черри $\hat{f}^t$ на T^2 соответствует характеристическая величина. Поэтому каждому слоению Черри и потоку Черри на S^2 ставится в соответствие набор характеристических величин $\nu_i > 0$ ($i = 1, k$). Пусть F – слоение Черри на S^2 , $p^{-1}(F)$ – накрывающее слоение на T^2 , которое вкладывается в поток $\hat{f}^t$, и пусть μ – число вращения Пуанкаре потока $\hat{f}^t$. Множество чисел $(c + d \cdot \mu)(a + b \cdot \mu)^{-1}$, где $ad - bc = \pm 1$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$), называется *орбитой вращения слоения F* и обозначается $\mu[F]$. Аналогичное понятие вводится и для потоков Черри на S^2 .

ТЕОРЕМА 1. Если потоки Черри (слоения Черри) на S^2 топологически эквивалентны, то их орбиты вращения совпадают.

ТЕОРЕМА 2. Пусть f^t – поток Черри S^2 C^r -интегрального типа ($r \geq 5$), и пусть ν_i ($i = 1, k$) – набор его характеристических величин. Тогда $\sum_{i=1}^k (\nu_i - 1)^2 > 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть F – C^r -слоение ($r \geq 5$) Черри на S^2 . Тогда $\Omega(F)$ содержит седловую особенность с характеристической величиной, отличной от единицы.

ТЕОРЕМА 4. На S^2 существует поток Черри C^1 -интегрального типа с набором характеристических величин ν_i ($i = 1, k$), каждая из которых равна единице.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Поток Черри f^t на T^2 называется *простейшим*, если он содержит ровно одну черную ячейку и не имеет серых ячеек, причем в черной ячейке лежит ровно одно состояние равновесия – узел.

С помощью накрывающего слоения определяется черная и серая ячейка слоения Черри на S^2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Слоение Черри (и соответствующий поток Черри) на S^2 называется *простейшим*, если это слоение (поток) имеет одну черную ячейку, не имеет серых ячеек, и в черной ячейке лежит ровно одна особенность – узел.

На торе орбита вращения является полным топологическим инвариантом для простейших потоков Данжуа [7] и простейших потоков Черри [3]. Однако на сфере это не так.

ТЕОРЕМА 5. На S^2 существует континуум попарно топологически не эквивалентных простейших потоков Черри (слоений Черри) с одинаковой орбитой вращения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полным топологическим инвариантом потока Черри и слоения Черри на S^2 является характеристический класс с точностью до соизмеримости, который вводится аналогично характеристическому классу потоков Данжуа на торе [7] и сингулярных потоков на сфере [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cherry T. M. // Proc. Lond. Math. Soc. 1937. V. 2. № 44. P. 175–215. [2] Арансон С. Х. // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. научн. тр. Горький: Горьк. ун-т. 1985. С. 3–18. [3] Martens M., van Strien S., de Melo W., Mendes P. // Ergod. Th. Dyn. Sys. 1990. V. 10. № 3. P. 531–554. [4] Арансон С. Х. // УМН. 1986. Т. 41. № 3(249). С. 167–168; ГГУ им. Н. И. Лобачевского. Горький. 1988. С. 1–194. Леп. в ВИНТИ, № 6887B88. [5] Арансон С. Х., Жужома Е. В. // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. научн. тр. Горький: Горьк. ун-т. 1984. С. 3–10. [6] Арансон С. Х. // УМН. 1990. Т. 45. № 4(274). С. 139–140. [7] Арансон С. Х., Жужома Е. В. // Изв. Вузов. Математика. 1976. № 5(168). С. 104–107.