Функциональный анализ и его приложения
2010, т. 44, вып. 1, с. 44–58

УДК 515.162

Дисковые одинарные числа Гурвица*

© 2010. С. М. Натанзон

Памяти Израиля Моисеевича Гельфанда

Исследованы числа Гурвица, отвечающие накрытиям диска с единственным непростым критическим значением, расположенным на границе. Найдены дифференциальные уравнения, описывающие производящую функцию этих чисел.

§1. Введение

Классическое число Гурвица — это взвешенное число накрытий компактной поверхности S рода g с предписанным типом критических значений [6]. Точное определение состоит в следующем. Рассмотрим разветвленное накрытие $\varphi\colon \Omega \to S$ поверхности S компактной поверхностью Ω. Накрытия φ и $\varphi'\colon \Omega' \to S$ считаются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $f\colon \Omega \to \Omega'$, такой, что $\varphi' f = \varphi$. Обозначим через $\mathrm{Aut}(\varphi)$ группу автоэквивалентностей накрытия φ и через $|\mathrm{Aut}(\varphi)|$ ее порядок.

В окрестности каждой точки $y \in \Omega$ накрытие φ эквивалентно факторизации по группе вращений порядка $n(y)$ с неподвижной точкой y. *Типом значения* $x \in S$ называется моном $a_{n(y_1)} \cdots a_{n(y_k)}$, где $\varphi^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_k\}$. Значения всех типов, кроме типа a_1^k, называются *критическими.* Значения типа $a_1^{k-1}a_2$ называются *простыми критическими значениями.*

Зафиксируем на поверхности S конечное число точек $x_1, \dots, x_v$. Зафиксируем мономы $a^1, \dots, a^v$ от переменных a_i. *Классическим числом Гурвица* называется величина $\langle a^1, \dots, a^v \rangle_g = \sum |\mathrm{Aut}(\varphi)|^{-1}$, где сумма берется по всем классам эквивалентности накрытий, имеющих значения типов $a^1, \dots, a^v$ в точках $x_1, \dots, x_v$ и не имеющих других критических значений. Число Гурвица вида $\langle a \rangle^m = \langle a, a_1^{k-1}a_2, \dots, a_1^{k-1}a_2 \rangle_0$, где a — произвольный моном от переменных a_i, а m — число мономов вида $a_1^{k-1}a_2$ в скобке, называется *классическим одинарным числом Гурвица.* Классические одинарные числа Гурвица тесно связаны с теорией пересечений на пространстве модулей компактных римановых поверхностей с проколами [7].

Сопоставим переменным a_i переменные p_i и мономам $a = a_{i_1} \cdots a_{i_r}$ мономы $p_a = p_{i_1} \cdots p_{i_r}$. Производящая функция для одинарных чисел Гурвица равна $\Phi(\lambda, p_1, p_2, \dots) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{\lambda^m}{m!} \sum_a \langle a \rangle^m p_a$, где вторая сумма берется по всем мономам. Согласно [5], производящая функция $\Phi(\lambda, p_1, p_2, \dots)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое часто называют «cut-and-join»:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = L_\lambda \Phi, \qquad L_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{ij} (i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + \sum_{ij} ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\,.$$

*Исследование частично поддержано грантами НШ-709.2008.1 и РФФИ 08-01-00110-а.

Доказательство фактически основано на том, что классические числа Гурвица являются корреляторами некоторой замкнутой двумерной топологической теории поля [3]. Это дифференциальное уравнение обладает рядом замечательных свойств. Ему удовлетворяет, например, производящая функция ходжевых интегралов [12].

Определение чисел Гурвица можно распространить на случай накрытий произвольных поверхностей с границей с помощью произвольных поверхностей с границей [1]. В настоящей статье определяются и исследуются *дисковые одинарные числа Гурвица*. Они отвечают накрытиям диска с единственным непростым критическим значением, расположенным на границе. Найдены, в частности, рекуррентные соотношения, позволяющие найти все дисковые одинарные числа Гурвица.

Производящие функции дисковых одинарных чисел Гурвица определяются как функции, зависящие от комплексных параметров α, β, γ (аналог параметра λ в классической ситуации) и четырех бесконечных серий переменных $\acute{p}_i$, $\grave{p}_i$, $\bar{p}_i$, $\dot{p}_i$, описывающих топологический тип непростого критического значения (аналог переменных p_i в классической ситуации). Аналогом уравнения $\partial\Phi/\partial\lambda = L_\lambda\Phi$ являются три дифференциальных уравнения.

Числа Гурвица для поверхностей с границей являются корреляторами некоторой открыто-замкнутой (некоммутативной) двумерной топологической теории поля [1]. Именно этот факт и является причиной существования дифференциальных уравнений на производящие функции дисковых одинарных чисел Гурвица.

Автор благодарит В. М. Бухштабера за полезное обсуждение топологических свойств накрытий.

§2. Числа Гурвица

Обозначим через D замкнутый диск $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ с ориентированной границей. Пусть Ω — компактная поверхность с границей. В этой статье мы будем называть *накрытиями* накрытия степени k в смысле Смита–Дольда, причем такие, что функция, сопоставляющая точке диска число ее прообразов, имеет не более чем конечное число разрывов на $D^\circ = D \setminus \partial D$ и не более чем конечное число разрывов на ∂D. Несложное рассуждение показывает, что это тот же класс накрытий, что и в статье [1]. Напомним, что непрерывная функция $\varphi\colon \Omega \to D$ называется накрытием Смита–Дольда ([11], [4]) степени k, если существует непрерывная функция $t\colon D \to \operatorname{Sym}^k(\Omega)$, такая, что: 1) $x \in t\varphi(x)$ для всех $x \in \Omega$, 2) $\operatorname{Sym}^k(\varphi)(ty) = ky$ для всех $y \in D$.

Накрытиями (в нашем смысле) являются, в частности, дианалитические морфизмы клейновых поверхностей ([2], [8]). Более того, для каждого топологического накрытия $\varphi\colon \Omega \to D$ существует дианалитическая структура на Ω, превращающая φ в морфизм клейновых поверхностей [9]. Морфизмы клейновых поверхностей взаимно однозначно соответствуют вещественным мероморфным функциям в смысле [10]. А именно, каждый дианалитический морфизм получается из вещественной мероморфной функции f на вещественной алгебраической кривой (P, τ) композицией $h_2 f h_1^{-1}$, где $h_1\colon P \to P/\langle\tau\rangle$ — естественная проекция и $h_2(z) = \operatorname{Re} z + i|\operatorname{Im} z|$.

Прообраз $\varphi^{-1}(x)$ внутренней точки $x \in D \backslash \partial D$ состоит из $n = n(x) \leqslant k$ точек. Рассмотрим простой контур $r \in D^\circ$, ограничивающий малую окрестность точки x. Его прообраз $\varphi^{-1}(r)$ распадается на простые контуры $C_1, \ldots, C_n \in \Omega^\circ = \Omega \backslash \partial\Omega$. Неупорядоченный набор степеней ограничений $(\deg(\varphi|_{C_1}), \ldots, \deg(\varphi|_{C_n}))$ называется (*топологическим*) *типом внутреннего значения* $x \in D^\circ$. Топологический тип внутреннего значения будет обозначаться мономом $a_1^{t_1} \cdots a_k^{t_k}$ от коммутирующих формальных переменных a_i. В этом обозначении t_i равно числу индексов j, таких, что $\deg(\varphi|_{C_j}) = i$, и $a_i^0 = 1$.

Если ограничение отображения φ на любую компоненту связности прообраза малой окрестности точки $x \in D^\circ$ является гомеоморфизмом, то значение x считается *некритическим*. Остальные значения $x \in D^\circ$ называются *внутренними критическими значениями*. Другими словами, внутренние критические значения — это все внутренние значения топологического типа, отличного от a_1^k. У любого накрытия существует лишь конечное число внутренних критических значений. Внутренние критические значения типа $a_1^{k-1}a_2$ называются *простыми*.

Прообраз $\varphi^{-1}(y)$ граничной точки $y \in \partial D$ также состоит из $n = n(y) \leqslant k$ точек. Рассмотрим простой интервал $l \subset D$ с концами на ∂D, ограничивающий малую окрестность точки y. Его прообраз $\varphi^{-1}(l) \subset \Omega$ образует граф с k ребрами. Вершины графа делятся на две группы, отвечающие прообразам концов интервала l. Концы интервала l и отвечающие им две группы вершин графа $\varphi^{-1}(l) \subset \Omega$ считаются упорядоченными согласно ориентации границы диска ∂D. Для удобства мы будем называть один из концов интервала левым, а другой правым, считая, что ориентация границы диска внутри окрестности отвечает движению слева направо между концами интервала. В соответствии с этим вершины графа $\varphi^{-1}(l)$ также делятся на *левые* и *правые*.

Итак, граф $\varphi^{-1}(l)$ является двудольным. Он называется (*топологическим*) *типом граничного значения* $y \in \partial D$ [1]. Валентность каждой вершины получившегося графа не превосходит 2. Таким образом, связные компоненты графа $\varphi^{-1}(l)$ относятся к одному из следующих типов:

- $\acute{\mathsf{b}}_i$ — это граф с i левыми и $i+1$ правыми вершинами;
- $\grave{\mathsf{b}}_i$ — это граф с $i+1$ левыми и i правыми вершинами;
- $\bar{\mathsf{b}}_i$ — это незамкнутый граф с i левыми и i правыми вершинами;
- $\dot{\mathsf{b}}_i$ — это замкнутый граф с i левыми и i правыми вершинами.

Соответствующие графы для $i = 2$ приведены на рис. 1.

Поясним геометрический смысл этих инвариантов. На сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ действует диэдральная группа G, порожденная отражением $z \mapsto \bar{z}$ и поворотом $z \mapsto e^{2\pi i/k}z$. Она порождает накрытие $\varphi\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}/G$ с критическими точками 0 и ∞. Соответствующие этим точкам граничные значения имеют тип $\dot{\mathsf{b}}_k$. Рассмотрим ограничение $\tilde{\varphi}$ отображения φ на диск $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \cup \infty$. Топологические типы значений $\tilde{\varphi}(0)$ и $\tilde{\varphi}(\infty)$ совпадают и равны $\bar{\mathsf{b}}_{(k+1)/2}$ при нечетном k. При четном k топологический тип одного из них равен $\acute{\mathsf{b}}_{k/2}$, а другого $\grave{\mathsf{b}}_{k/2}$.

Сопоставим связным двудольным графам $\acute{\mathsf{b}}_i$, $\grave{\mathsf{b}}_i$, $\bar{\mathsf{b}}_i$, $\dot{\mathsf{b}}_i$ коммутирующие формальные переменные $\acute{b}_i$, $\grave{b}_i$, $\bar{b}_i$, $\dot{b}_i$. Объединению графов сопоставим произведение мономов. Таким образом, топологический тип произвольного граничного

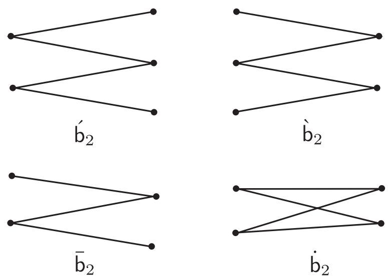

Рис. 1

значения определяется мономом $b = \acute{b}_1^{\acute{s}_1} \cdots \acute{b}_{\acute{n}}^{\acute{s}_{\acute{n}}} \grave{b}_1^{\grave{s}_1} \cdots \grave{b}_{\grave{n}}^{\grave{s}_{\grave{n}}} \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \cdots \bar{b}_{\bar{n}}^{\bar{s}_{\bar{n}}} \dot{b}_1^{\dot{s}_1} \cdots \dot{b}_{\dot{n}}^{\dot{s}_{\dot{n}}}$, где $k = \sum_{i=1}^{\acute{n}} 2\acute{s} + \sum_{i=1}^{\bar{n}} (2\bar{s}_i - 1) + \sum_{i=1}^{\grave{n}} 2\grave{s}_i + \sum_{i=1}^{\dot{n}} 2\dot{s}_i$. Через $\mathrm{Aut}(b)$ будет обозначаться группа автоморфизмов графа, отвечающего моному b, и через $|\mathrm{Aut}(b)|$ — порядок группы.

Изменение упорядочения групп вершин графа порождает инволюцию $b \mapsto b^*$ на множестве всех мономов. В частности, $\acute{b}_i^{\,*} = \grave{b}_i$, $\grave{b}_i^{\,*} = \acute{b}_i$, $\bar{b}_i^{\,*} = \bar{b}_i$, $\dot{b}_i^{\,*} = \dot{b}_i$.

Значение $x \in \partial D$ считается *некритическим*, если ограничение отображения φ на любую компоненту связности прообраза малого отрезка границы, содержащего x, является гомеоморфизмом. Остальные граничные значения называются *граничными критическими значениями.* Другими словами, граничные критические значения — это все граничные значения топологического типа, отличного от $\bar{b}_1^{\bar{s}} \dot{b}_1^{\dot{s}}$. У любого накрытия существует лишь конечное число граничных критических значений. Граничные критические значения типов $\acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{s}} \dot{b}_1^{\dot{s}}$ и $\grave{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{s}} \dot{b}_1^{\dot{s}}$ называются *простыми граничными критическими значениями.* Мы будем называть критические значения типов $\acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{s}} \dot{b}_1^{\dot{s}}$ и $\grave{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{s}} \dot{b}_1^{\dot{s}}$ *эгю-значениями* и *грав-значениями* соответственно.

Накрытия $\varphi_1 \colon \Omega_1 \to D$ и $\varphi_2 \colon \Omega_2 \to D$ назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\phi \colon \Omega_1 \to \Omega_2$, такой, что $\varphi_1 = \varphi_2 \phi$. Группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\varphi_i)$ эквивалентных накрытий φ_i изоморфны. Их порядок обозначим через $|\mathrm{Aut}(\varphi_i)|$.

Пример 2.1. Накрытие $\varphi \colon \Omega \to D$ диска $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \cup \infty$ не имеет критических значений, если и только если его ограничение на каждую компоненту связности либо является гомеоморфизмом, либо эквивалентно двулистному накрытию $h \colon \mathbb{C} \cup \infty \to \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \cup \infty$, где $h(z) = \operatorname{Re} z + i|\operatorname{Im} z|$. Его группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\varphi)$ изоморфна $S_n \times S_m \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$, где n (соответственно m) — число компонент связности поверхности Ω, на которых φ является гомеоморфизмом (соответственно двулистным накрытием).

Зафиксируем на диске D конечное число внутренних точек $x_1, \ldots, x_v \in D^\circ$ и конечное число граничных точек $y_1, \ldots, y_w \in \partial D$, нумерация которых согласована с ориентацией границы диска. Зафиксируем мономы $a^1, \ldots, a^v$ от переменных a_i и мономы $b^1, \ldots, b^w$ от переменных $\acute{b}_i$, $\grave{b}_i$, $\bar{b}_i$, $\dot{b}_i$.

Числом Гурвица называется величина $\langle a^1, \ldots, a^v, (b^1, \ldots, b^w) \rangle = \sum |\mathrm{Aut}(\varphi)|^{-1}$, где сумма берется по всем классам эквивалентности накрытий, имеющих значения $x_1, \ldots, x_v$, $y_1, \ldots, y_w$ типов $a^1, \ldots, a^v$, $b^1, \ldots, b^w$ и не имеющих других критических значений.

Пример 2.2. $\langle (\bar{b}_1^{\bar{s}} \dot{b}_1^{\dot{s}}) \rangle = (\bar{s}_1!)^{-1} (2^{\dot{s}} \dot{s}_1!)^{-1}$.

Нетрудно видеть, что число Гурвица не зависит от положения критических точек. Оно не меняется при любой перестановке мономов a^i и циклической перестановке мономов b^i. Описанное выше соответствие между накрытиями и вещественными мероморфными функциями позволяет интерпретировать эти числа Гурвица как аналог классических чисел Гурвица для вещественных алгебраических кривых [1].

Свяжем с множеством всех двудольных графов $\{\beta_p\}$ матрицу с элементами F^{pq}, обратную к матрице с элементами $\langle(\beta_p, \beta_q)\rangle$.

Лемма 2.1. *Число Гурвица вида* $\langle(c, b)\rangle$ *не равно* 0 *лишь в случае, когда* $c = b^*$. *При этом* $\langle(b^*, b)\rangle = |\mathrm{Aut}(b)|^{-1}$.

Число Гурвица вида $\langle(c, \acute{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}, b)\rangle$ *не равно* 0 *лишь в следующих случаях*:

- $\langle(\dot{b}_i d^*, \acute{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}, \grave{b}_i d)\rangle = \frac{1}{2}|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle(\bar{b}_{i+j} d^*, \acute{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}, \bar{b}_i\grave{b}_j d)\rangle = |\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle(\acute{b}_{i+j} d^*, \acute{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}, \grave{b}_i\grave{b}_j d)\rangle = (1 - \frac{1}{2}\delta_{ij}|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle(\grave{b}_{i+j-1} d^*, \acute{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}, \bar{b}_i\bar{b}_j d)\rangle = (1 - \frac{1}{2}\delta_{ij})|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$.

Число Гурвица вида $\langle(c, \grave{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}, b)\rangle$ *не равно* 0 *лишь в следующих случаях*:

- $\langle(\acute{b}_i d, \grave{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}, \dot{b}_i d^*)\rangle = \frac{1}{2}|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle(\bar{b}_i\acute{b}_j d, \grave{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}, \bar{b}_{i+j} d^*)\rangle = |\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle(\acute{b}_i\acute{b}_j d, \grave{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}, \grave{b}_{i+j} d^*)\rangle = (1 - \frac{1}{2}\delta_{ij})|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle(\bar{b}_i\bar{b}_j d, \grave{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}, \acute{b}_{i+j-1} d^*)\rangle = (1 - \frac{1}{2}\delta_{ij})|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Пусть $\langle(c, \acute{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}, b)\rangle \neq 0$. По определению это означает, что существует накрытие $\varphi\colon \Omega \to D$ с граничными критическими значениями $y_1, y_2, y_3 \in \partial D$ типов c, $\acute{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}$, b (соответственно) и без других критических значений. Рассмотрим точки $z_1 \in (y_1, y_2)$ и $z_2 \in (y_2, y_3)$. Прообраз точки z_1 состоит из $\bar{m}$ точек, в окрестности которых накрытие φ взаимно однозначно (простые точки), и $\dot{m}+1$ точек, в окрестности которых накрытие φ двулистно (двойные точки). Прообраз точки z_2 состоит из $\bar{m}+2$ простых точек и $\dot{m}$ двойных точек.

Пусть $p_1, p_2 \in \varphi^{-1}(z_2)$ — простые точки, отвечающие графу $\acute{b}_1$. Им соответствуют простые точки q_1, q_2 графа b. Тогда имеет место один из следующих случаев:

- q_1 и q_2 принадлежат одной из компонент связности типа $\grave{\mathsf{b}}_i$;
- q_1 и q_2 принадлежат компонентам связности типов $\bar{\mathsf{b}}_i$ и $\grave{\mathsf{b}}_j$;
- q_1 и q_2 принадлежат различным компонентам связности типов $\bar{\mathsf{b}}_i$ и $\bar{\mathsf{b}}_j$;
- q_1 и q_2 принадлежат различным компонентам связности типов $\grave{\mathsf{b}}_i$ и $\grave{\mathsf{b}}_j$.

В первом случае $b = \grave{b}_i d$. Рассмотрим ограничение $\varphi'\colon \Omega' \to D$ накрытия φ на связную компоненту, содержащую точки q_1, q_2, и ограничение $\varphi''\colon \Omega'' \to D$ накрытия φ на дополнение $\Omega'' = \Omega \setminus \Omega'$. Накрытие φ'' имеет критические значения $y_1, y_3 \in \partial D$ типов d^*, d. Следовательно, накрытие φ' имеет критические значения $y_1, y_2, y_3 \in \partial D$ типов $\dot{b}_i$, $\acute{b}_1 e$, $\grave{b}_i$. Таким образом, накрытие φ имеет критические значения $y_1, y_2, y_3 \in \partial D$ типов $\dot{b}_i d^*$, $\acute{b}_1\bar{b}_1^{\bar{m}}\dot{b}_1^{\dot{m}}$, $\grave{b}_i d$.

Класс эквивалентности накрытия φ' (соответственно φ'') содержит все накрытия, типы критических значений которых совпадают с типами критических значений накрытия φ' (соответственно φ''). Кроме того, $\mathrm{Aut}(\varphi) = \mathrm{Aut}(\varphi') \times$

$\mathrm{Aut}(\varphi'')$. Таким образом,

$$\langle(\dot{b}_i d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{m}} \dot{b}_1^{\dot{m}}, \grave{b}_i d)\rangle = \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\varphi)|} = \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\varphi')|}\,\frac{1}{|\mathrm{Aut}(\varphi'')|} = \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\varphi')|}\,\frac{1}{|\mathrm{Aut}(d)|}\,.$$

Группа $\mathrm{Aut}(\varphi')$ порождается инволюцией, переставляющей точки p_1 и p_2. Таким образом, $\langle(\dot{b}_i d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{m}} \dot{b}_1^{\dot{m}}, \grave{b}_i d)\rangle = \frac{1}{2}|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. Главное отличие состоит в свойствах группы $\mathrm{Aut}(\varphi')$. Она нетривиальна лишь при $i = j$ в последних двух случаях.

Меняя ориентацию границы диска, находим, что $\langle(a, b, c)\rangle = \langle(c^*, b^*, a^*)\rangle$. Поэтому третье утверждение леммы следует из второго. □

В случаях, когда различия между графами вида $\acute{b}_i$ и $\grave{b}_i$ не существенны, мы будем обозначать эти графы также символом $\hat{b}_i$. Число ребер $|b|$ в связном графе b назовем длиной графа. В частности, $|\bar{b}_i| = 2i - 1$, $|\hat{b}_i| = |\acute{b}_i| = |\grave{b}_i| = 2i$. Для произвольного графа b обозначим через $|b|$ минимум длин его компонент связности.

Лемма 2.2. *Число Гурвица вида $\langle a_1^m a_2, (c, b)\rangle$ не равно* 0 *лишь в следующих случаях*:

- $\langle a_1^m a_2, (\dot{b}_i \dot{b}_j d^*, \dot{b}_{i+j} d)\rangle = (1 - \frac{1}{2}\delta_{ij})|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle a_1^m a_2, (\dot{b}_i \bar{b}_j d^*, \bar{b}_{i+j} d)\rangle = |\bar{b}_j|\,|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle a_1^m a_2, (\dot{b}_i \grave{b}_j d^*, \acute{b}_{i+j} d)\rangle = |\hat{b}_j|\,|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle a_1^m a_2, (\dot{b}_i \acute{b}_j d^*, \grave{b}_{i+j} d)\rangle = |\hat{b}_j|\,|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle a_1^m a_2, (\bar{b}_i \grave{b}_j d^*, \bar{b}_k \acute{b}_l d)\rangle = \delta_{(i+j)(k+l)}|\bar{b}_i \hat{b}_j \bar{b}_k \hat{b}_l|\,|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle a_1^m a_2, (\acute{b}_i \grave{b}_j d^*, \bar{b}_k \bar{b}_l d)\rangle = \delta_{(i+j+1)(k+l)}|\hat{b}_i \hat{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l|\,|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle a_1^m a_2, (\grave{b}_i \grave{b}_j d^*, \acute{b}_k \acute{b}_l d)\rangle = (1 - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl})\delta_{(i+j)(k+l)}|\hat{b}_i \hat{b}_j \hat{b}_k \hat{b}_l|\,|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$;
- $\langle a_1^m a_2, (\bar{b}_i \bar{b}_j d^*, \bar{b}_k \bar{b}_l d)\rangle = (1 - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl})\delta_{(i+j)(k+l)}|\bar{b}_i \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l|\,|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\langle a_1^m a_2, (c, b)\rangle \neq 0$. По определению это означает, что существует накрытие $\varphi\colon \Omega \to D$ с критическими значениями x, y_1, y_2 типов $a_1^m a_2$, c, b (соответственно) и без других критических значений. Рассмотрим окружающий точку y_i простой интервал $l_i \subset D$ с концами на ∂D, ограничивающий малую окрестность точки y_i. Рассмотрим графы $c = \varphi^{-1}(l_1)$, $b = \varphi^{-1}(l_2)$, описывающие топологические типы точек y_i. Рассмотрим отрезок $l \subset D$, соединяющий интервалы l_1 и l_2 и проходящий через точку x.

Прообраз $\varphi^{-1}(l)$ состоит из $\deg\varphi$ отрезков, ровно два из которых пересекаются. Пересечение состоит из критической точки отображения φ. Отрезки соединяют ребра графов b и c. Таким образом, граф c^* получается из графа b в результате следующей перестройки. Надо разрезать два ребра графа b и склеить по-другому получившиеся полуребра.

Для того чтобы перестройка двудольных графов такого типа реализовывалась некоторым накрытием $\varphi\colon \Omega \to D$, необходимо и достаточно, чтобы ориентации ребер, индуцированные упорядочением групп вершин графов, порождались одной из ориентаций границы $\partial\Omega$. Все пары графов (b, c), удовлетворяющие этим условиям, приводятся в формулировке леммы 2.2.

Число накрытий, отвечающих паре графов (b, c), совпадает с числом пар ребер графа b, которые после разрезов и переклейки дают граф c^*. Эти числа зависят, в свою очередь, от числа ребер в переклеиваемых связных компонентах графов b и c.

При $b=\bar b_{i+j}d$ и $c=\dot b_i\bar b_j d^*$ соответствующее число накрытий совпадает с числом участков, состоящих из i последовательных ребер графа $\bar b_{i+j}$. Таких участков ровно $|\bar b_j|$. Таким образом, $\langle a_1^m a_2,(\dot b_i\bar b_j d^*,\bar b_{i+j}d)\rangle=|\bar b_j|\,|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$.

При $b=\bar b_k\acute b_l d$ и $c=\bar b_i\grave b_j d^*$ число накрытий совпадает с числом пар ребер, одно из которых принадлежит $\bar b_k$, а другое $\acute b_l$, таких, что после переклейки по этим ребрам возникает граф $\bar b_i\acute b_j$. Таким образом, $\langle a_1^m a_2,(\bar b_i\grave b_j d^*,\bar b_k\acute b_l d)\rangle=\delta_{(i+j)(k+l)}|\bar b_i\hat b_j\bar b_k\hat b_l|\,|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$.

Аналогично вычисляются и остальные числа Гурвица. $\square$

§ 3. Дисковые одинарные числа Гурвица

Будем говорить, что граничное критическое значение p' накрытия φ предшествует граничному критическому значению p'' того же накрытия, если ориентация границы диска задает ориентацию интервала (p',p'') от p' к p'' и интервал (p',p'') не содержит критических значений.

Рассмотрим множество $\mathscr{H}(m,\hat m,b)$ классов эквивалентности накрытий с m внутренними простыми критическими значениями, с $\hat m$ граничными простыми критическими значениями и единственным не обязательно простым критическим значением типа b (называемым *специальным*). Множество $\mathscr{H}(m,\hat m,b)$ распадается на подмножества $\mathscr{H}(m,\acute m,\grave m,b)$, состоящие из накрытий с $\acute m$ эгю-значениями и $\grave m$ грав-значениями. Множество $\mathscr{H}(m,\acute m,\grave m,b)$ распадается на два подмножества, $\acute{\mathscr{H}}(m,\acute m,\grave m,b)$ и $\grave{\mathscr{H}}(m,\acute m,\grave m,b)$. Первое (соответственно второе) из них состоит из накрытий, где специальному критическому значению предшествует эгю-значение (соответственно грав-значение).

Обозначим через $\mathsf{H}(m,\hat m,b)$ (соответственно $\mathsf{H}(m,\acute m,\grave m,b)$, $\acute{\mathsf{H}}(m,\acute m,\grave m,b)$, $\grave{\mathsf{H}}(m,\acute m,\grave m,b)$) сумму чисел Гурвица накрытий из множества $\mathscr{H}(m,\hat m,b)$ (соответственно $\mathscr{H}(m,\acute m,\grave m,b)$, $\acute{\mathscr{H}}(m,\acute m,\grave m,b)$, $\grave{\mathscr{H}}(m,\acute m,\grave m,b)$). Продолжим определения чисел $\mathsf{H}(m,\hat m,b)$, $\mathsf{H}(m,\acute m,\grave m,b)$, $\acute{\mathsf{H}}(m,\acute m,\grave m,b)$ и $\grave{\mathsf{H}}(m,\acute m,\grave m,b)$ на отношения мономов $b=b^1/b^2$, считая, что эти числа равны 0, если b не является мономом. Все эти числа назовем *дисковыми одинарными числами Гурвица*.

Пример 3.1. Нетрудно доказать, что накрытие не может иметь ровно одно критическое значение [1]. Сопоставляя с предыдущими примерами, находим, что если $\mathsf{H}(0,0,b)>0$, то $b=\bar b_1^{\bar s_1}\dot b_1^{\dot s_1}$ и $\mathsf{H}(0,0,\bar b_1^{\bar s_1}\dot b_1^{\dot s_1})=(\bar s_1!)^{-1}(2^{\dot s}\dot s_1!)^{-1}$.

Лемма 3.1. *Пусть* $b=\acute b_1^{\acute s_1}\cdots\acute b_{\acute n}^{\acute s_{\acute n}}\grave b_1^{\grave s_1}\cdots\grave b_{\grave n}^{\grave s_{\grave n}}\bar b_1^{\bar s_1}\cdots\bar b_{\bar n}^{\bar s_{\bar n}}\dot b_1^{\dot s_1}\cdots\dot b_{\dot n}^{\dot s_{\dot n}}$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\acute{\mathsf{H}}(m,\acute m+1,\grave m,b)&=\sum_i i(\dot s_i+1)\mathsf{H}\biggl(m,\acute m,\grave m,b\frac{\dot b_i}{\grave b_i}\biggr)\\&\quad+\sum_{ij}\biggl((\bar s_{i+j}+1)\mathsf{H}\biggl(m,\acute m,\grave m,b\frac{\bar b_{i+j}}{\bar b_i\grave b_j}\biggr)+(\grave s_{i+j}+1)\mathsf{H}\biggl(m,\acute m,\grave m,b\frac{\grave b_{i+j}}{\grave b_i\grave b_j}\biggr)\\&\qquad+(\acute s_{i+j-1}+1)\mathsf{H}\biggl(m,\acute m,\grave m,b\frac{\acute b_{i+j-1}}{\bar b_i\bar b_j}\biggr)\biggr).\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим накрытие $\varphi\colon \Omega \to D$ из множества $\acute{\mathscr{H}}(m, \acute{m}+1, \grave{m}, b)$. Обозначим через y и y' соответственно специальное критическое значение накрытия и предшествующее ему граничное критическое значение. Рассмотрим и стянем в точку y_l отрезок $l \in D$ с концами на ∂D, отделяющий точки y, y' от остальных критических значений накрытия. В результате этого диск распадается на два диска, D' и D'', а накрытие φ — на два накрытия, $\varphi'\colon \Omega' \to D'$ и $\varphi''\colon \Omega'' \to D''$. Критические значения накрытия φ' — это y_l, y' и y. Отождествляя диски D и D'', мы видим, что $\varphi'' \in \mathscr{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, c)$ для некоторого монома c. Согласно [1], отсюда следует, что $\acute{H}(m, \acute{m}+1, \grave{m}, b) = \sum_{pq} H(m, \acute{m}, \grave{m}, \beta_p)\, F^{pq} \langle(\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, b)\rangle$, где $\{\beta_p\}$ — множество всех двудольных графов, $\{F^{pq}\}$ — матрица, обратная к $\langle(\beta_p, \beta_q)\rangle$, и сумма берется по всем парам двудольных графов. Согласно лемме 2.1, $F^{pq} = \delta_{\beta_p, \beta_q^*} = |\mathrm{Aut}(\beta_p)|$. Кроме того, согласно лемме 2.1, сумма в правой части равенства распадается на четыре подсуммы. Каждая из эти подсумм определяется видом мономов b и $\beta_q = \beta_p^*$.

Пусть $b = \grave{b}_i d$ и $\beta_q = \dot{b}_i d^*$. Тогда

$$|\mathrm{Aut}(\beta_p)| = |\mathrm{Aut}(\dot{b}_i d)| = \frac{|\mathrm{Aut}(d)|}{(2i)^{\dot{s}_i}\, \dot{s}_i!}(2i)^{\dot{s}_i+1}(\dot{s}_i+1)! = 2i|\mathrm{Aut}(d)|(\dot{s}_i+1).$$

Кроме того, $\langle(\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, b)\rangle = \langle(\dot{b}_i d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, \grave{b}_i d)\rangle = \frac{1}{2}|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$ согласно лемме 2.1. Таким образом, рассматриваемая подсумма равна $\sum\limits_i i(\dot{s}_i+1)\mathsf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b\frac{\dot{b}_i}{\grave{b}_i})$.

Пусть $b = \bar{b}_i \grave{b}_j d$ и $\beta_q = \bar{b}_{i+j} d^*$. Тогда

$$|\mathrm{Aut}(\beta_p)| = |\mathrm{Aut}(\bar{b}_{i+j} d)| = \frac{|\mathrm{Aut}(d)|}{\bar{s}_{i+j}!}(\bar{s}_{i+j}+1)! = |\mathrm{Aut}(d)|(\bar{s}_{i+j}+1).$$

Кроме того, $\langle(\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, b)\rangle = \langle(\bar{b}_{i+j} d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, \bar{b}_i \grave{b}_j d)\rangle = |\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$. Таким образом, рассматриваемая подсумма равна $\sum_{ij}(\bar{s}_{i+j}+1)\mathsf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b\frac{\bar{b}_{i+j}}{\bar{b}_i \grave{b}_j})$.

Пусть $b = \grave{b}_i \grave{b}_j d$ и $\beta_q = \acute{b}_{i+j} d^*$. Тогда

$$|\mathrm{Aut}(\beta_p)| = |\mathrm{Aut}(\grave{b}_{i+j} d)| = \frac{|\mathrm{Aut}(d)|}{2^{\grave{s}_{i+j}}\, \grave{s}_{i+j}!} 2^{(\grave{s}_{i+j}+1)}(\grave{s}_{i+j}+1)! = 2|\mathrm{Aut}(d)|(\grave{s}_{i+j}+1).$$

Кроме того, $\langle(\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, b)\rangle = \langle(\acute{b}_{i+j} d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, \grave{b}_i \grave{b}_j d)\rangle = (1 - \frac{1}{2}\delta_{ij})|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$. Таким образом, рассматриваемая подсумма равна $\sum_{ij}(\grave{s}_{i+j}+1)\mathsf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, b\frac{\grave{b}_{i+j}}{\grave{b}_i \grave{b}_j})$.

Пусть $b = \bar{b}_i \bar{b}_j d$ и $\beta_q = \grave{b}_{i+j-1} d^*$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathrm{Aut}(\beta_p)| = |\mathrm{Aut}(\acute{b}_{i+j-1} d)| &= \frac{|\mathrm{Aut}(d)|}{2^{(\acute{s}_{i+j-1})}\acute{s}_{i+j-1}!}\, 2^{(\acute{s}_{i+j-1}+1)}(\acute{s}_{i+j-1}+1)! \\ &= 2|\mathrm{Aut}(d)|(\acute{s}_{i+j-1}+1). \end{aligned}$$

Кроме того, $\langle(\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, b)\rangle = \langle(\grave{b}_{i+j-1} d^*, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, \bar{b}_i \bar{b}_j d)\rangle = (1 - \frac{1}{2}\delta_{ij})|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}$. Таким образом, рассматриваемая подсумма равна

$$\sum_{ij}(\acute{s}_{i+j-1}+1)\mathsf{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b\frac{\acute{b}_{i+j-1}}{\bar{b}_i \bar{b}_j}\right). \qquad \square$$

Лемма 3.2. *Пусть* $b=\acute b_1^{\acute s_1}\cdots\acute b_{\acute n}^{\acute s_{\acute n}}\grave b_1^{\grave s_1}\cdots\grave b_{\grave n}^{\grave s_{\grave n}}\bar b_1^{\bar s_1}\cdots\bar b_{\bar n}^{\bar s_{\bar n}}\dot b_1^{\dot s_1}\cdots\dot b_{\dot n}^{\dot s_{\dot n}}$. *Тогда*

$$
\begin{aligned}
&\grave{\mathsf H}(m,\acute m,\grave m+1,b)\\
&\quad=\sum_i(\dot s_i+1)\mathsf H\left(m,\acute m,\grave m,b\frac{\grave b_i}{\dot b_i}\right)+\sum_{ij}\left(2(\bar s_i+1)(\dot s_j+1)\mathsf H\left(m,\acute m,\grave m,b\frac{\bar b_i\grave b_j}{\bar b_{i+j}}\right)\right.\\
&\qquad+2((\dot s_i+1)(\dot s_j+1)+\delta_{ij}(\dot s_i+1))\mathsf H\left(m,\acute m,\grave m,b\frac{\grave b_i\grave b_j}{\grave b_{i+j}}\right)\\
&\qquad\left.+\frac12((\bar s_i+1)(\bar s_j+1)+\delta_{ij}(\bar s_i+1))\mathsf H\left(m,\acute m,\grave m,b\frac{\bar b_i\bar b_j}{\acute b_{i+j-1}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится по той же схеме, что и доказательство предыдущей, с использованием второй части леммы 2.1.

Если $(\beta_q,\grave b_1\bar b_1^{\bar n}\dot b_1^{\dot n},b)=(\acute b_i d^*,\grave b_1\bar b_1^{\bar m}\dot b_1^{\dot m},\dot b_i d)$, то

$$|\mathrm{Aut}(\beta_p)|=|\mathrm{Aut}(\grave b_i d)|=2|\mathrm{Aut}(d)|(\dot s_i+1)$$

и

$$\langle(\beta_q,\acute b_1\bar b_1^{\bar n}\dot b_1^{\dot n},b)\rangle=\langle(\acute b_i d^*,\grave b_1\bar b_1^{\bar m}\dot b_1^{\dot m},\dot b_i d)\rangle=\frac12\frac{1}{|\mathrm{Aut}(d)|}\,.$$

Таким образом, соответствующая подсумма равна $\sum_i(\dot s_i+1)\mathsf H(m,\acute m,\grave m,b\frac{\grave b_i}{\dot b_i})$.

Если $(\beta_q,\grave b_1\bar b_1^{\bar n}\dot b_1^{\dot n},b)=(\bar b_i\acute b_j d^*,\grave b_1\bar b_1^{\bar m}\dot b_1^{\dot m},\bar b_{i+j}d)$, то

$$|\mathrm{Aut}(\beta_p)|=|\mathrm{Aut}(\bar b_i\grave b_j d)|=2|\mathrm{Aut}(d)|(\bar s_i+1)(\dot s_j+1)$$

и

$$\langle(\beta_q,\acute b_1\bar b_1^{\bar n}\dot b_1^{\dot n},b)\rangle=\langle(\bar b_i\acute b_j d^*,\grave b_1\bar b_1^{\bar m}\dot b_1^{\dot m},\bar b_{i+j}d)\rangle=|\mathrm{Aut}(d)|^{-1}.$$

Таким образом, соответствующая подсумма равна

$$2\sum_{ij}(\bar s_i+1)(\dot s_j+1)\mathsf H\left(m,\acute m,\grave m,b\frac{\bar b_i\grave b_j}{\bar b_{i+j}}\right).$$

Если $(\beta_q,\grave b_1\bar b_1^{\bar n}\dot b_1^{\dot n},b)=(\acute b_i\acute b_j d^*,\grave b_1\bar b_1^{\bar m}\dot b_1^{\dot m},\grave b_{i+j}d)$, то

$$|\mathrm{Aut}(\beta_p)|=|\mathrm{Aut}(\grave b_i\grave b_j d)|=4|\mathrm{Aut}(d)|((\dot s_i+1)(\dot s_j+1)+\delta_{ij}(\dot s_i+1))$$

и

$$\langle(\acute b_i\acute b_j d^*,\grave b_1\bar b_1^{\bar m}\dot b_1^{\dot m},\grave b_{i+j}d)\rangle=\left(1-\frac12\delta_{ij}\right)\frac{1}{|\mathrm{Aut}(d)|}\,.$$

Таким образом, соответствующая подсумма равна

$$2\sum_{ij}((\dot s_i+1)(\dot s_j+1)+\delta_{ij}(\dot s_i+1))\mathsf H\left(m,\acute m,\grave m,b\frac{\grave b_i\grave b_j}{\grave b_{i+j}}\right).$$

Если $(\beta_q,\grave b_1\bar b_1^{\bar n}\dot b_1^{\dot n},b)=(\bar b_i\bar b_j d^*,\grave b_1\bar b_1^{\bar m}\dot b_1^{\dot m},\acute b_{i+j-1}d)$, то

$$|\mathrm{Aut}(\beta_p)|=|\mathrm{Aut}(\bar b_i\bar b_j d)|=|\mathrm{Aut}(d)|((\bar s_i+1)(\bar s_j+1)+\delta_{ij}(\bar s_i+1))$$

и

$$\langle(\beta_q,\acute b_1\bar b_1^{\bar n}\dot b_1^{\dot n},b)\rangle=\langle(\bar b_i\bar b_j d,\grave b_1\bar b_1^{\bar m}\dot b_1^{\dot m},\acute b_{i+j-1}d^*)\rangle=\left(1-\frac{\delta_{ij}}{2}\right)\frac{1}{|\mathrm{Aut}(d)|}.$$

Таким образом, соответствующая подсумма равна

$$\frac{1}{2}\sum_{ij}((\bar{s}_i+1)(\bar{s}_j+1)+\delta_{ij}(\bar{s}_i+1))\mathsf{H}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\bar{b}_i\bar{b}_j}{\acute{b}_{i+j-1}}\right). \qquad \square$$

Аналогичный результат для внутренних простых критических значений имеет следующий вид:

Лемма 3.3. *Пусть* $b=\acute{b}_1^{\acute{s}_1}\cdots\acute{b}_{\acute{n}}^{\acute{s}_{\acute{n}}}\grave{b}_1^{\grave{s}_1}\cdots\grave{b}_{\grave{n}}^{\grave{s}_{\grave{n}}}\bar{b}_1^{\bar{s}_1}\cdots\bar{b}_{\bar{n}}^{\bar{s}_{\bar{n}}}\dot{b}_1^{\dot{s}_1}\cdots\dot{b}_{\dot{n}}^{\dot{s}_{\dot{n}}}$. *Тогда при* $\tilde{\mathsf{H}}=\acute{\mathsf{H}}$ *и при* $\tilde{\mathsf{H}}=\grave{\mathsf{H}}$ *имеет место равенство*

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathsf{H}}(m+1,\acute{m},\grave{m},b)\\
&\quad=\sum_{ij}(i+j)(\dot{s}_{i+j}+1)\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\dot{b}_{i+j}}{\dot{b}_i\dot{b}_j}\right)+2ij((\dot{s}_i+1)(\dot{s}_j+1)\\
&\qquad+\delta_{ij}(\dot{s}_i+1))\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\dot{b}_i\dot{b}_j}{\dot{b}_{i+j}}\right)+|\bar{b}_j|(\bar{s}_{i+j}+1)\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\bar{b}_{i+j}}{\dot{b}_i\bar{b}_j}\right)\\
&\qquad+2i|\bar{b}_j|(\dot{s}_i+1)(\bar{s}_j+1)\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\dot{b}_i\bar{b}_j}{\bar{b}_{i+j}}\right)+2|\hat{b}_j|(\acute{s}_{i+j}+1)\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\acute{m},b\frac{\acute{b}_{i+j}}{\dot{b}_i\acute{b}_j}\right)\\
&\qquad+4i|\hat{b}_j|(\dot{s}_i+1)(\acute{s}_j+1)\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\acute{m},b\frac{\dot{b}_i\acute{b}_j}{\acute{b}_{i+j}}\right)+2|\hat{b}_j|(\grave{s}_{i+j}+1)\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\grave{b}_{i+j}}{\dot{b}_i\grave{b}_j}\right)\\
&\qquad+4i|\hat{b}_j|(\dot{s}_i+1)(\grave{s}_j+1)\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\dot{b}_i\grave{b}_j}{\grave{b}_{i+j}}\right)\\
&\qquad+\sum_{i+j=k+l}\left(2|\bar{b}_i\hat{b}_j\bar{b}_k\hat{b}_l|(\bar{s}_i+1)(\acute{s}_j+1)\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\bar{b}_i\acute{b}_j}{\bar{b}_k\acute{b}_l}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+2|\bar{b}_i\hat{b}_j\bar{b}_k\hat{b}_l|(\bar{s}_i+1)(\grave{s}_j+1)\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\bar{b}_i\grave{b}_j}{\bar{b}_k\grave{b}_l}\right)\right)\\
&\qquad+\sum_{i+j+1=k+l}2(1+\delta_{kl})|\hat{b}_i\hat{b}_j\bar{b}_k\bar{b}_l|(\acute{s}_i+1)(\grave{s}_j+1)\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\acute{b}_i\grave{b}_j}{\bar{b}_k\bar{b}_l}\right)\\
&\qquad+\sum_{i+j=k+l+1}\frac{1+\delta_{ij}}{2}|\bar{b}_i\bar{b}_j\hat{b}_k\hat{b}_l|((\bar{s}_i+1)(\bar{s}_j+1)+\delta_{ij}(\bar{s}_i+1))\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\bar{b}_i\bar{b}_j}{\acute{b}_k\grave{b}_l}\right)\\
&\qquad+\sum_{i+j=k+l}(1+\delta_{ij})(1+\delta_{kl})\left(\frac{1}{4}|\bar{b}_i\bar{b}_j\bar{b}_k\bar{b}_l|((\bar{s}_i+1)(\bar{s}_j+1)\right.\\
&\qquad\qquad+\delta_{ij}(\bar{s}_i+1))\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\bar{b}_i\bar{b}_j}{\bar{b}_k\bar{b}_l}\right)\\
&\qquad+|\hat{b}_i\hat{b}_j\hat{b}_k\hat{b}_l|((\acute{s}_i+1)(\acute{s}_j+1)+\delta_{ij}(\acute{s}_i+1))\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\acute{b}_i\acute{b}_j}{\acute{b}_k\acute{b}_l}\right)\\
&\qquad\left.+|\hat{b}_i\hat{b}_j\hat{b}_k\hat{b}_l|((\grave{s}_i+1)(\grave{s}_j+1)+\delta_{ij}(\grave{s}_i+1))\tilde{\mathsf{H}}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\grave{b}_i\grave{b}_j}{\grave{b}_k\grave{b}_l}\right)\right).
\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим накрытие $\varphi\colon \Omega \to D$ из множества $\acute{\mathscr{H}}(m+1, \acute{m}, \grave{m}, b)$. Обозначим через y специальное критическое значение накрытия φ и через x внутреннее критическое значение накрытия φ. Рассмотрим и стянем в точку y_l отрезок $l \in D$ с концами на диске, отделяющий точки y, x от остальных критических значений накрытия. В результате этого диск распадается на два диска, D' и D'', а накрытие φ — на два накрытия, $\varphi'\colon \Omega' \to D'$ и $\varphi''\colon \Omega'' \to D''$. Критические значения накрытия φ' — это y_l, y и x. Отождествляя диски D и D'', мы видим, что $\varphi'' \in \acute{\mathscr{H}}(m, \acute{m}, \grave{m}, c)$ для некоторого монома c. Согласно [1], отсюда следует, что $\acute{H}(m+1, \acute{m}, \grave{m}, b) = \sum_{pq} \acute{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, \beta_p) F^{pq} \langle (\beta_q, \acute{b}_1 \bar{b}_1^{\bar{n}} \dot{b}_1^{\dot{n}}, b\rangle$. Согласно лемме 2.2, сумма в правой части равенства распадается на 15 подсумм (каждому случаю в этой лемме, кроме последнего, отвечают две подсуммы). Каждая из подсумм вычисляется по схеме, использованной при доказательстве лемм 3.1, 3.2. $\square$

Леммы 3.1, 3.2, 3.3 позволяют найти все числа $\acute{\mathsf{H}}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$, $\grave{\mathsf{H}}(m, \acute{m}, \grave{m}, b)$, начиная с чисел $\mathsf{H}(0, 0, b)$.

§4. Дифференциальные уравнения на производящие функции

Рассмотрим алгебру формальных степенных рядов, порожденную коммутирующими переменными $\acute{p}_i$, $\grave{p}_i$, $\bar{p}_i$, $\dot{p}_i$. Сопоставим моному $b = \acute{b}_1^{\acute{s}_1} \cdots \acute{b}_{\acute{n}}^{\acute{s}_{\acute{n}}} \grave{b}_1^{\grave{s}_1} \cdots \grave{b}_{\grave{n}}^{\grave{s}_{\grave{n}}} \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \cdots \bar{b}_{\bar{n}}^{\bar{s}_{\bar{n}}} \dot{b}_1^{\dot{s}_1} \cdots \dot{b}_{\dot{n}}^{\dot{s}_{\dot{n}}}$ моном $p_b = \acute{p}_1^{\acute{s}_1} \cdots \acute{p}_{\acute{n}}^{\acute{s}_{\acute{n}}} \grave{p}_1^{\grave{s}_1} \cdots \grave{p}_{\grave{n}}^{\grave{s}_{\grave{n}}} \bar{p}_1^{\bar{s}_1} \cdots \bar{p}_{\bar{n}}^{\bar{s}_{\bar{n}}} \dot{p}_1^{\dot{s}_1} \cdots \dot{p}_{\dot{n}}^{\dot{s}_{\dot{n}}}$.

Рассмотрим производящие функции

$$\acute{H}(\alpha, \beta, \gamma \mid \acute{p}_1, \grave{p}_1, \bar{p}_1, \dot{p}_1, \acute{p}_2, \dots) = \sum_{m, \acute{m}, \grave{m} \geqslant 0} \frac{\alpha^m}{m!} \frac{\beta^{\acute{m}}}{\acute{m}!} \frac{\gamma^{\grave{m}}}{\grave{m}!} \sum_b \acute{\mathsf{H}}(m, \acute{m}, \grave{m}, b) p_b,$$

$$\grave{H}(\alpha, \beta, \gamma | \acute{p}_1, \grave{p}_1, \bar{p}_1, \dot{p}_1, \acute{p}_2, \dots) = \sum_{m, \acute{m}, \grave{m} \geqslant 0} \frac{\alpha^m}{m!} \frac{\beta^{\acute{m}}}{\acute{m}!} \frac{\gamma^{\grave{m}}}{\grave{m}!} \sum_b \grave{\mathsf{H}}(m, \acute{m}, \grave{m}, b) p_b,$$

где вторые суммы берутся по всем мономам b. В частности, $\acute{H}(0, 0 \mid \dots) = \grave{H}(0, 0 \mid \dots) = \exp(\bar{p}_1 + \dot{p}_1/2)$, согласно примеру 3.1.

Теорема 4.1. *Имеет место уравнение*

$$\frac{\partial \acute{H}}{\partial \beta} = L_\beta H,$$

где

$$L_\beta = \sum_i i \grave{p}_i \frac{\partial}{\partial \dot{p}_i} + \sum_{ij} \biggl(\bar{p}_i \grave{p}_j \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{i+j}} + \grave{p}_i \grave{p}_j \frac{\partial}{\partial \grave{p}_{i+j}} + \bar{p}_i \bar{p}_j \frac{\partial}{\partial \acute{p}_{i+j-1}} \biggr).$$

Доказательство. Будем считать, что $b = \acute{b}_1^{\acute{s}_1} \cdots \acute{b}_{\acute{n}}^{\acute{s}_{\acute{n}}} \grave{b}_1^{\grave{s}_1} \cdots \grave{b}_{\grave{n}}^{\grave{s}_{\grave{n}}} \bar{b}_1^{\bar{s}_1} \cdots \bar{b}_{\bar{n}}^{\bar{s}_{\bar{n}}} \dot{b}_1^{\dot{s}_1} \cdots \dot{b}_{\dot{n}}^{\dot{s}_{\dot{n}}}$, где $\acute{n} = \acute{n}(b)$, $\acute{s}_i = \acute{s}_i(b)$, $\grave{n} = \grave{n}(b)$, $\grave{s}_i = \grave{s}_i(b)$, $\bar{n} = \bar{n}(b)$, $\bar{s}_i = \bar{s}_i(b)$, $\dot{n} = \dot{n}(b)$, $\dot{s}_i = \dot{s}_i(b)$.

Согласно лемме 3.1,

$$\frac{\partial \acute{H}}{\partial \beta} = \sum_{m, \acute{m}, \grave{m} \geqslant 0} \frac{\alpha^m}{m!} \frac{\beta^{\acute{m}}}{\acute{m}!} \frac{\gamma^{\grave{m}}}{\grave{m}!} \sum_b \acute{\mathsf{H}}(m, \acute{m}+1, \grave{m}, b) p_b$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m,\acute m,\grave m\geqslant 0}\frac{\alpha^m}{m!}\frac{\beta^{\acute m}}{\acute m!}\frac{\gamma^{\grave m}}{\grave m!}\sum_b\sum_{i=1}^{\infty} i(\dot s_i+1)\mathsf{H}\Big(m,\acute m,\grave m,b\frac{\dot b_i}{\grave b_i}\Big)p_b\\
&\quad+\sum_{m,\acute m,\grave m\geqslant 0}\frac{\alpha^m}{m!}\frac{\beta^{\acute m}}{\acute m!}\frac{\gamma^{\grave m}}{\grave m!}\sum_b\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\bar s_{i+j}+1)\mathsf{H}\Big(m,\acute m,\grave m,b\frac{\bar b_{i+j}}{\bar b_i\grave b_j}\Big)p_b\\
&\quad+\sum_{m,\acute m,\grave m\geqslant 0}\frac{\alpha^m}{m!}\frac{\beta^{\acute m}}{\acute m!}\frac{\gamma^{\grave m}}{\grave m!}\sum_b\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\grave s_{i+j}+1)\mathsf{H}\Big(m,\acute m,\grave m,b\frac{\grave b_{i+j}}{\grave b_i\grave b_j}\Big)p_b\\
&\quad+\sum_{m,\acute m,\grave m\geqslant 0}\frac{\alpha^m}{m!}\frac{\beta^{\acute m}}{\acute m!}\frac{\gamma^{\grave m}}{\grave m!}\sum_b\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\acute s_{i+j-1}+1)\mathsf{H}\Big(m,\acute m,\grave m,b\frac{\acute b_{i+j-1}}{\bar b_i\bar b_j}\Big)p_b.
\end{aligned}
$$

Сделаем в первом слагаемом замену переменных $c=b\frac{\dot b_i}{\grave b_i}$. Тогда $p_c=p_b\frac{\dot p_i}{\grave p_i}$ и $p_b=p_c\frac{\grave p_i}{\dot p_i}=\grave p_i\frac{\partial p_c}{\partial\dot p_i}(\dot s_i+1)^{-1}$. Таким образом,

$$
\sum_b\sum_{i=1}^{\infty} i(\dot s_i+1)\mathsf{H}\Big(m,\acute m,\grave m,b\frac{\dot b_i}{\grave b_i}\Big)p_b=\sum_c\sum_{i=1}^{\infty} i\mathsf{H}(m,\acute m,\grave m,a)\grave p_i\frac{\partial p_c}{\partial\dot p_i},
$$

где сумма берется по всем мономам c.

Сделаем во втором слагаемом замену переменных $c=b\frac{\bar b_{i+j}}{\bar b_i\grave b_j}$. Тогда $p_c=p_b\frac{\bar p_{i+j}}{\bar p_i\grave p_j}$ и $p_b=p_c\frac{\bar p_i\grave p_j}{\bar p_{i+j}}=\bar p_i\grave p_j\frac{\partial p_c}{\partial\bar p_{i+j}}(\bar s_{i+j}+1)^{-1}$. Таким образом,

$$
\sum_b\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\bar s_{i+j}+1)\mathsf{H}\Big(m,\acute m,\grave m,b\frac{\bar b_{i+j}}{\bar b_i\grave b_j}\Big)p_b=\sum_c\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{H}(m,\acute m,\grave m,c)\bar p_i\grave p_j\frac{\partial p_c}{\partial\bar p_{i+j}}.
$$

Аналогично,

$$
\sum_b\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\grave s_{i+j}+1)\mathsf{H}\Big(m,\acute m,\grave m,b\frac{\grave b_{i+j}}{\grave b_i\grave b_j}\Big)p_b=\sum_c\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{H}(m,\acute m,\grave m,c)\grave p_i\grave p_j\frac{\partial p_c}{\partial\grave p_{i+j}}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\sum_b\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\acute s_{i+j-1}+1)\mathsf{H}\Big(m,\acute m,\grave m,b\frac{\acute b_{i+j-1}}{\bar b_i\bar b_j}\Big)p_b\\
&\qquad\qquad=\sum_c\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{H}(m,\acute m,\grave m,c)\bar p_i\bar p_j\frac{\partial p_c}{\partial\acute p_{i+j-1}}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\frac{\partial\acute H}{\partial\beta}=L_\beta H$. □

Теорема 4.2. *Имеет место уравнение*

$$
\frac{\partial\grave H}{\partial\gamma}=L_\gamma H,
$$

где

$$
L_\gamma=\sum_{i=1}^{\infty}\dot p_i\frac{\partial}{\partial\grave p_i}+\sum_{ij}\Big(2\bar p_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial\bar p_i\partial\grave p_j}+2\grave p_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial\grave p_i\partial\grave p_j}+\frac{1}{2}\acute p_{i+j-1}\frac{\partial^2}{\partial\bar p_i\partial\bar p_j}\Big).
$$

Доказательство. Согласно лемме 3.2,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \grave{H}}{\partial \gamma} &= \sum_{\acute{m},\grave{m}\geqslant 0} \frac{\alpha^m}{m!}\frac{\beta^{\acute{m}}}{\acute{m}!}\frac{\gamma^{\grave{m}}}{\grave{m}!}\sum_b \grave{\mathsf{H}}(m,\acute{m},\grave{m}+1,b)p_b \\
&= \sum_{m,\acute{m},\grave{m}\geqslant 0} \frac{\alpha^m}{m!}\frac{\beta^{\acute{m}}}{\acute{m}!}\frac{\gamma^{\grave{m}}}{\grave{m}!}\sum_b \sum_{i=1}^{\infty}(\grave{s}_i+1)\mathsf{H}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\grave{b}_i}{\dot{b}_i}\right)p_b \\
&= 2\sum_{m,\acute{m},\grave{m}\geqslant 0} \frac{\alpha^m}{m!}\frac{\beta^{\acute{m}}}{\acute{m}!}\frac{\gamma^{\grave{m}}}{\grave{m}!}\sum_b \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\bar{s}_i+1)(\grave{s}_j+1)\mathsf{H}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\bar{b}_i\grave{b}_j}{\bar{b}_{i+j}}\right)p_b \\
&\quad + 2\sum_{m,\acute{m},\grave{m}\geqslant 0} \frac{\alpha^m}{m!}\frac{\beta^{\acute{m}}}{\acute{m}!}\frac{\gamma^{\grave{m}}}{\grave{m}!}\sum_b \sum_{i=1}^{\infty}((\grave{s}_i+1)(\grave{s}_j+1) \\
&\qquad\qquad + \delta_{ij}(\grave{s}_i+1))\mathsf{H}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\grave{b}_i\grave{b}_j}{\grave{b}_{i+j}}\right)p_b \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{m,\acute{m},\grave{m}\geqslant 0} \frac{\alpha^m}{m!}\frac{\beta^{\acute{m}}\frac{\gamma^{\grave{m}}}{\grave{m}!}}{\acute{m}!}\sum_b \sum_{i=1}^{\infty}((\bar{s}_i+1)(\bar{s}_j+1) \\
&\qquad\qquad + \delta_{ij}(\bar{s}_i+1))\mathsf{H}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\bar{b}_i\bar{b}_j}{\acute{b}_{i+j-1}}\right)p_b.
\end{aligned}
$$

Сделаем в первом слагаемом замену переменных $c = b\frac{\grave{b}_i}{\dot{b}_i}$. Тогда

$$
p_c = p_b\frac{\grave{p}_i}{\dot{p}_i} \quad \text{и} \quad p_b = p_c\frac{\dot{p}_i}{\grave{p}_i} = \dot{p}_i\frac{\partial p_c}{\partial \grave{p}_i}(\grave{s}_i+1)^{-1}.
$$

Таким образом,

$$
\sum_b \sum_{i=1}^{\infty}(\grave{s}_i+1)\mathsf{H}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\grave{b}_i}{\dot{b}_i}\right)p_b = \sum_c \sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{H}(m,\acute{m},\grave{m},c)\dot{p}_i\frac{\partial p_c}{\partial \grave{p}_i},
$$

где сумма берется по всем мономам c. Аналогично

$$
\begin{aligned}
&\sum_b \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\bar{s}_i+1)(\grave{s}_j+1)\mathsf{H}\left(m,\acute{m},\grave{m},b\frac{\bar{b}_i\grave{b}_j}{\bar{b}_{i+j}}\right)p_b \\
&\qquad\qquad = \sum_c \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{H}(m,\acute{m},\grave{m},c)\bar{p}_{i+j}\frac{\partial^2 p_c}{\partial \bar{p}_i \partial \grave{p}_j}.
\end{aligned}
$$

Сделаем в третьем слагаемом замену переменных $c = b\frac{\grave{b}_i\grave{b}_j}{\grave{b}_{i+j-1}}$. Тогда $p_c = p_b\frac{\grave{p}_i\grave{p}_j}{\grave{p}_{i+j-1}}$ и

$$
p_b = p_c\frac{\grave{p}_{i+j-1}}{\grave{p}_i\grave{p}_j} = \grave{p}_{i+j-1}\frac{\partial^2 p_c}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{p}_j}((\grave{s}_i+1)(\grave{s}_j+1) + \delta_{ij}(\grave{s}_i+1))^{-1}.
$$

Таким образом,

$$\sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ((\grave{s}_i + 1)(\grave{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\grave{s}_i + 1))\mathsf{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b\frac{\grave{b}_i \grave{b}_j}{\acute{b}_{i+j-1}}\right) p_b$$
$$= \sum_c \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, c) \grave{p}_{i+j-1} \frac{\partial^2 p_c}{\partial \grave{p}_i \partial \grave{p}_j}\,.$$

Аналогично

$$\sum_b \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ((\bar{s}_i + 1)(\bar{s}_j + 1) + \delta_{ij}(\bar{s}_i + 1))\mathsf{H}\left(m, \acute{m}, \grave{m}, b\frac{\bar{b}_i \bar{b}_j}{\acute{b}_{i+j-1}}\right) p_b$$
$$= \sum_c \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{H}(m, \acute{m}, \grave{m}, c) \acute{p}_{i+j-1} \frac{\partial^2 p_c}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{p}_j}\,.$$

Следовательно, $\frac{\partial \grave{H}}{\partial \gamma} = L_\gamma H$. □

Теорема 4.3. *Имеет место уравнение*

$$\frac{\partial \acute{H}}{\partial \alpha} = L_\alpha \acute{H}, \qquad \frac{\partial \grave{H}}{\partial \alpha} = L_\alpha \grave{H},$$

где

$$\begin{aligned}
L_\alpha = \sum_{ij} \Bigg(& (i+j)\dot{p}_i \dot{p}_j \frac{\partial}{\partial \dot{p}_{i+j}} + 2ij\dot{p}_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial \dot{p}_i \partial \dot{p}_j} + |\bar{b}_j| \dot{p}_i \bar{p}_j \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{i+j}} + i|\bar{b}_j| \bar{p}_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial \dot{p}_i \partial \bar{p}_j} \\
& + 2|\hat{b}_j| \dot{p}_i \acute{p}_j \frac{\partial}{\partial \acute{p}_{i+j}} + 4i|\hat{b}_j| \acute{p}_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial \dot{p}_i \partial \acute{p}_j} + 2|\hat{b}_j| \dot{p}_i \grave{p}_j \frac{\partial}{\partial \grave{p}_{i+j}} + 4i|\hat{b}_j| \grave{p}_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial \dot{p}_i \partial \grave{p}_j} \Bigg) \\
& + \sum_{i+j=k+l} 2 \left(|\bar{b}_i \hat{b}_j \bar{b}_k \hat{b}_l| \bar{p}_k \acute{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i \partial \acute{p}_j} + |\bar{b}_i \hat{b}_j \bar{b}_k \hat{b}_l| \bar{p}_k \grave{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i \partial \grave{p}_j} \right) \\
& + \sum_{i+j+1=k+l} 2(1+\delta_{kl}) |\hat{b}_i \hat{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l| \bar{p}_k \bar{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \acute{p}_i \partial \grave{p}_j} \\
& + \sum_{i+j=k+l+1} \frac{1}{2}(1+\delta_{ij}) |\bar{b}_i \bar{b}_j \hat{b}_k \hat{b}_l| \acute{p}_k \grave{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{p}_j} \\
& + \sum_{i+j=k+l} (1+\delta_{ij})(1+\delta_{kl}) \Bigg(\frac{1}{4} |\bar{b}_i \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l| \bar{p}_k \bar{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i \partial \bar{p}_j} \\
& \qquad + |\hat{b}_i \hat{b}_j \hat{b}_k \hat{b}_l| \grave{p}_k \grave{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \grave{p}_i \partial \grave{p}_j} + |\hat{b}_i \hat{b}_j \hat{b}_k \hat{b}_l| \acute{p}_k \acute{p}_l \frac{\partial^2}{\partial \acute{p}_i \partial \acute{p}_j} \Bigg).
\end{aligned}$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теорем 4.1 и 4.2, но с использованием леммы 3.3.

В заключении приведем следующее наблюдение рецензента. Как и классическое уравнение «cut-and-join», уравнения из теорем 4.1–4.3 являются квазиоднородными, если считать число $|b|$ весом переменной p_b. Начальные условия для них указаны в примере 3.1. Таким образом, уравнения из теорем 4.1–4.3

в принципе позволяют найти производящую функцию H по схеме, использованной в [7] для классических одинарных чисел Гурвица. Для этого надо ограничить операторы на конечномерные подпространства квазиоднородных многочленов данной степени и найти собственные числа и функции ограничений на эти подпространства. Впрочем, как уже отмечалось, используя леммы 3.1–3.3, легко написать компьютерную программу, непосредственно вычисляющую каждое дисковое число Гурвица.

Литература

[1] A. Alexeevski, S. Natanzon, *Noncommutative two-dimensional topological field theories and Hurwitz numbers for real algebraic curves*, Selecta Math. (New Ser.), **12**:3 (2006), 307–377; http://arxiv.org/abs/math/0202164.

[2] N. L. Allin, N. Greenlef, *Foundations of the Theory of Klein Surfaces*, Lecture Notes in Math., vol. 219, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.

[3] R. Dijkgraaf, *Mirror symmetry and elliptic curves*, *The moduli spaces of curves*, in: Progress in Math., vol. 129, Brikhäuser, 1995, 149–163.

[4] A. Dold, *Ramifield coverings*, *orbit projections and symmetric powers*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **99**:1 (1986), 65–72.

[5] D. Goulden, D. M. Jackson, A. Vainshtein, *The number of ramified coverings of the sphere by torus and surfaces of higher genera*, Ann. Comb., **4**:1 (2000), 27–46.

[6] A. Hurwitz, *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Math. Ann., **39**:1 (1891), 1–61.

[7] M. Kazarian, S. Lando, *An algebro-geometric proof of Witten's conjecture*, http://arxiv.org/abs/math/0601760.

[8] С. М. Натанзон, *Клейновы поверхности*, УМН, **45**:6 (1990), 47–90.

[9] S. M. Natanzon, *Topology of* 2*-dimensional coverings and meromorphic functions on real and complex algebraic curves*, Selecta Math. Soviet., **12**:3 (1993), 251–291.

[10] С. М. Натанзон, *Модули римановых поверхностей*, *вещественных алгебраических кривых и их суперaналоги*, МЦНМО, М., 2003.

[11] L. Smith, *Transfer and ramified coverings*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **93**:3 (1983), 485–493.

[12] J. Zhou, *Hodge integrals*, *Hurwitz numbers and symmetric groups*, http://arxiv.org/abs/math/0308024.

НИИ физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского,
Московский государственный университет,
Московский независимый университет,
Институт теоретической и экспериментальной физики
e-mail: natanzon@mccme.ru

Поступило в редакцию
31 марта 2008 г.