

ТЕОРИЯ СИСТЕМ  
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.5

О КОНСТРУИРОВАНИИ КВАЗИОПТИМАЛЬНЫХ  
РОБАСТНЫХ СИСТЕМ

© 2013 г. М. Г. Зотов

Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ

Поступила в редакцию 26.06.12 г., после доработки 22.01.13 г.

Для многорежимного объекта управления получена система уравнений, решение которой позволяет сконструировать робастный регулятор, обеспечивающий в штатном режиме качество функционирования системы, близкое к оптимальному значению, а в аварийном режиме – приемлемую работоспособность. Приведен приближенный метод решения этой задачи.

DOI: 10.7868/S0002338813030177

**Введение.** Задача одновременной стабилизации довольно часто возникает во многих практических ситуациях, когда объект может функционировать в нескольких режимах. Переход с режима на режим происходит произвольно. Робастный регулятор должен быть сконструирован так, чтобы обеспечить в штатном режиме качество работы системы, близкое к оптимальному значению, а в аварийном – лишь приемлемую работоспособность системы. Хронология развития этого направления и существующие подходы к решению данного класса задач приведены в [1–4].

**1. Постановка задачи.** Не ограничивая общности, рассмотрим объект, функционирующий в двух режимах: в штатном и аварийном. В штатном режиме его передаточная функция имеет вид  $W_{01}(s)$ , в аварийном режиме –  $W_{02}(s)$ . Качество функционирования, соответственно, оценивается критериями  $I_1[W_1(\cdot)]$  и  $I_2[W_1(\cdot)]$ , где  $W_1(s)$  – искомая передаточная функция робастного регулятора, обеспечивающего при заданных передаточных функциях объекта управления  $W_{01}(s)$  и  $W_{02}(s)$  минимум линейной комбинации

$$I[W_1(\cdot)] = I_1[W_1(\cdot)] + \chi I_2[W_1(\cdot)] \quad (1.1)$$

с весовым коэффициентом  $\chi$ , оценивающим важность критерия в свертке. Обычно его выбирают таким, чтобы в штатном режиме качество функционирования системы было близко к оптимальному значению, а в аварийном режиме обеспечивалась приемлемая работоспособность. К сожалению, функционал (1.1) относительно искомой функции  $W_1(s)$  не является квадратичным, что затруднит поиск решения. Ниже приводится процедура, позволяющая устранить этот недостаток.

Рассмотрим распространенное в практике конструирования управляющее устройство со звеном коррекции в прямой цепи. Схемы для двух режимов функционирования приведены на рис. 1, а, б, где  $W_{11}(s)$  и  $W_{12}(s)$  – передаточные функции звеньев коррекции. Передаточные функции этих систем относительно воздействия  $g(t)$  определяются соотношением

$$\tilde{H}_k^*(s) = \frac{W_{1k}(s)W_{0k}(s)}{1 + W_{1k}(s)W_{0k}(s)}, \quad k = 1, 2, \quad (1.2)$$

и должны обеспечивать оптимум соответственно квадратичных критериев

$$I_k^*[\tilde{H}_k^*(\cdot)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} J_k(s, \tilde{H}_k^*(s)) ds, \quad k = 1, 2, \quad (1.3)$$

с подынтегральными функциями

$$J_k(s, \tilde{H}_k^*(s)) = \tilde{H}_k^*(s)\tilde{H}_k^*(-s)S_{1k}(s) - \tilde{H}_k^*(-s)S_{2k}(s) - \tilde{H}_k^*(s)S_{2k}(-s) + S_{3k}(s),$$

в которых  $S_{ik}(s)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – исходные данные при функционировании системы в штатном ( $k = 1$ ) и аварийном ( $k = 2$ ) режимах соответственно. Они разносторонне описывают качество работы

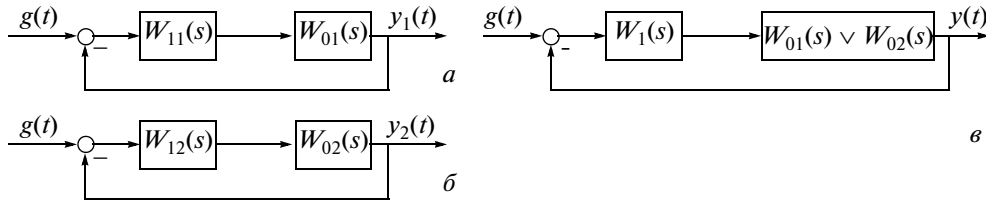


Рис. 1

системы, в частности: близость искомым передаточных функций  $\tilde{H}_1^*(s)$  и  $\tilde{H}_2^*(s)$  к желаемым, качество переходных процессов и т.д. Один из вариантов исходных данных приведен в примере (разд. 3).

Из условия, что в обоих режимах робастное звено коррекции должно иметь одну и ту же передаточную функцию, следует

$$W_{11}(s) - W_{12}(s) = \frac{\tilde{H}_1(s)}{W_{01}(s)(1 - \tilde{H}_1(s))} - \frac{\tilde{H}_2(s)}{W_{02}(s)(1 - \tilde{H}_2(s))} = 0,$$

где  $\tilde{H}_1(s)$  и  $\tilde{H}_2(s)$  – передаточные функции системы с робастным регулятором  $W_1(s)$  и двухрежимным объектом (рис. 1, в)

$$\tilde{H}_k(s) = \frac{W_1(s)W_{0k}(s)}{1 + W_1(s)W_{0k}(s)}, \quad k = 1, 2. \quad (1.4)$$

В результате находим

$$\frac{D(s)}{W_{01}(s)W_{02}(s)(1 - \tilde{H}_1(s))(1 - \tilde{H}_2(s))} = 0,$$

где числитель имеет вид

$$D(s) = \tilde{H}_1(s)\tilde{H}_2(s)(W_{01}(s) - W_{02}(s)) + \tilde{H}_1(s)W_{02}(s) - \tilde{H}_2(s)W_{01}(s).$$

Полученное соотношение соблюдается, если при всех значениях  $s$  выполняется ограничение

$$D(s) = 0, \quad W_{01}(s)W_{02}(s)(1 - \tilde{H}_1(s))(1 - \tilde{H}_2(s)) \neq 0. \quad (1.5)$$

Условие (1.5) всегда имеет место:  $W_{01}(s) \neq 0$ ,  $W_{02}(s) \neq 0$ ,  $\tilde{H}_1(s) \neq 1$ ,  $\tilde{H}_2(s) \neq 1$ , так как это функции, описывающие в одном случае динамические свойства объекта, а в другом – системы.

Из сказанного следует: качество функционирования системы в аварийном и штатном режимах можно оценить критерием, аналогичным критерию (1.1):

$$I[\tilde{H}_1(\cdot), \tilde{H}_2(\cdot)] = J_1[\tilde{H}_1(\cdot)] + \chi J_2[\tilde{H}_2(\cdot)] \quad (1.6)$$

при ограничении (1.5).

**2. Поиск оптимального решения.** Сформулированная задача свелась к вариационной задаче на условный минимум. Для решения задачи из (1.6) с учетом (1.3)–(1.5) составим функционал Лагранжа

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \{J_1(s, \tilde{H}_1^*(s)) + \chi J_2(s, \tilde{H}_2^*(s)) + \alpha(s)D(s) + \alpha(-s)D(-s)\} ds, \quad (2.1)$$

где  $\alpha(s)$  – неопределенный множитель. Соотношение (2.1) преобразуется в стандартный квадратичный функционал вида (1.3)

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left( (\tilde{H}_1(s)\tilde{H}_1(-s)S_{11}(s) - \tilde{H}_1(-s)(S_{21}(s) + \alpha(-s)(0.5\tilde{H}_2(-s)(W_{01}(-s) - W_{02}(-s)) + W_{02}(-s))) - \right. \\ \left. - \tilde{H}_1(s)(S_{21}(-s) + \alpha(s)(0.5\tilde{H}_2(s)(W_{01}(s) - W_{02}(s)) + W_{02}(s))) \right) + S_{31}(s) + \\ + \chi(\tilde{H}_2(s)\tilde{H}_2(-s)S_{12}(s) - \tilde{H}_2(-s)(S_{22}(s) + \alpha(-s)(0.5\tilde{H}_1(-s)(W_{01}(-s) - W_{02}(-s)) - W_{01}(-s))) - \\ - \tilde{H}_2(s)(S_{22}(-s) + \alpha(s)(0.5\tilde{H}_1(s)(W_{01}(s) - W_{02}(s)) - W_{01}(s))) \right) + S_{32}(s) ds.$$

Решая обычную вариационную задачу [5], получим, что искомые функции  $\tilde{H}_1(s)$  и  $\tilde{H}_2(s)$ , доставляющие минимум функционалу (2.1), должны определяться из системы уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(s)S_{11}(s) - 0.5\alpha(-s)\tilde{H}_2(-s)(W_{01}(-s) - W_{02}(-s)) - (S_{21}(s) - \alpha(-s)W_{02}(-s)) &= \Gamma_1(s), \\ \tilde{H}_2(s)\chi S_{12}(s) - 0.5\alpha(-s)\tilde{H}_1(-s)(W_{01}(-s) - W_{02}(-s)) - (\chi S_{22}(s) - \alpha(-s)W_{01}(-s)) &= \Gamma_2(s) \end{aligned} \quad (2.2)$$

и ограничения (1.5). Здесь  $\Gamma_1(s)$  и  $\Gamma_2(s)$  – дробно-рациональные функции с полюсами из правой полуплоскости, которые появляются в процессе решения оптимизационной задачи [5] и обусловлены тем, что искомые передаточные функции  $\tilde{H}_1(s)$  и  $\tilde{H}_2(s)$  для обеспечения устойчивости замкнутой системы ищутся с полюсами только из левой полуплоскости.

Из передаточных функций  $\tilde{H}_1(s)$  и  $\tilde{H}_2(s)$  находится передаточная функция робастного регулятора (рис. 1, в)

$$W_1(s) = \frac{\tilde{H}_1(s)}{W_{01}(s)(1 - \tilde{H}_1(s))} = \frac{\tilde{H}_2(s)}{W_{02}(s)(1 - \tilde{H}_2(s))}. \quad (2.3)$$

Выполнение равенства (2.3) может служить индикатором правильности решения системы (2.2). К сожалению, существующие методы решения матричных уравнений Винера–Хопфа вида (2.2) не позволяют это решение найти. Основным препятствием является наличие в системе уравнений (2.2) множителя Лагранжа  $\alpha(s)$ .

Как показала практика, обычно оптимальные системы избыточны по сложности. В нашем случае математическая модель сконструированного регулятора будет описываться дифференциальными уравнением высокого порядка. Практически систему с близким к оптимальному значению критерия (2.1) можно получить, используя робастный регулятор, описываемый дифференциальным уравнением меньшего порядка. Оптимальные значения показателей  $I_1^*$  и  $I_2^*$  в (1.3) могут быть использованы как ориентир потенциальной недостижимой возможности робастной системы на рис. 1, в. На базе сказанного выше построим алгоритм поиска квазиоптимального робастного регулятора.

**3. Поиск квазиоптимального решения.** Оптимальные системы обладают положительным свойством: значительные изменения параметров регулятора не приводят к существенному ухудшению показателей качества, в нашем случае – значений  $I_1^*$  и  $I_2^*$  в (1.3). Это характерное свойство оптимальных систем является положительным фактором, дающим возможность конструктору в достаточной широких пределах варьировать структуру и параметры регулятора [6]. Сказанное позволяет надеяться, что на базе оптимальных для каждого из режимов регуляторов можно сконструировать один робастный, обеспечивающий удовлетворительное функционирование работы многорежимной системы. Без ограничения общности алгоритм поиска рассмотрим для системы, функционирующей в двух режимах: штатном и аварийном. Согласно алгоритму разд. 2, решение задачи можно разбить на три этапа.

Этап 1. Для каждого из режимов формируется критерий, оценивающий качество функционирования системы в этом режиме, из условия оптимума критериев ищутся оптимальные для каждого режима регуляторы. Оптимальные значения  $I_1^*$  и  $I_2^*$ , определяемые соотношением (1.3), могут служить предельными недостижимыми ориентирами качества робастной системы. Сконструированные регуляторы проверяются на возможность их использования в качестве робастных.

Этап 2. На базе оптимальных регуляторов с передаточными функциями  $W_{11}(s) = V_{11}(s)/G_{11}(s)$  и  $W_{12}(s) = V_{12}(s)/G_{12}(s)$  формируется структура робастного регулятора

$$W_1(s) = \frac{V_1(s)}{G_1(s)} = \frac{v_m s^m + v_{m-1} s^{m-1} + \dots + v_1 s + v_0}{g_n s^n + g_{n-1} s^{n-1} + \dots + g_1 s + g_0}, \quad m = \max_{i=1,2} \deg V_{1i}(s), \quad n = \max_{i=1,2} \deg G_{1i}(s).$$

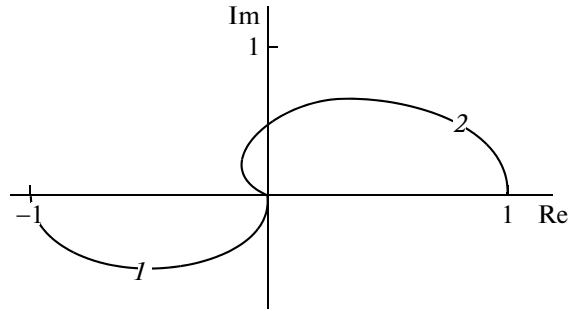


Рис. 2

Этап 3. Параметры робастного регулятора  $W_1(s)$  ищутся из условия минимума критерия (2.1), в котором опущены два последних слагаемых, связанные с ограничением (1.5), т.е. минимума

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \{J_1(s, \tilde{H}_1^*(s)) + \chi J_2(s, \tilde{H}_2^*(s))\} ds, \quad (3.1)$$

вместо (1.5) используется равносильное ограничение (2.3).

Численное решение таких параметрических оптимизационных задач при ограничении относится к задачам математического программирования. Задачи, где критерий оптимальности или ограничения нелинейно зависят от искомых параметров, решаются методами нелинейного программирования. Универсальных методов решения таких задач, в силу их чрезвычайного разнообразия, не существует. Среди вычислительных алгоритмов большое место занимают градиентные методы. Начальная точка поиска в градиентных методах должна обязательно принадлежать допустимому множеству, на котором оптимум ищется [7, 8]. Алгоритм поиска квазиоптимального робастного регулятора дополним примером.

**Пример.** Объект управления может находиться в двух режимах: в штатном режиме его передаточная функция  $W_{01}(s) = Q_{01}(s)/P_{01}(s) = 1/(s-1)$ , в аварийном режиме она трансформируется в передаточную функцию  $W_{02}(s) = Q_{02}(s)/P_{02}(s) = 6/(s-2)(s-3)$ . На рис. 1, в приведена схема системы с робастным регулятором. Амплитудно-фазовые характеристики объектов приведены на рис. 2 ( $1$  – годограф  $W_{01}(j\omega)$ ,  $2$  – годограф  $W_{02}(j\omega)$ ). Как видно, они существенно различаются.

Необходимо сконструировать звено коррекции в прямой цепи, обеспечивающее системе свойство робастности относительно режимов ее работы. Относительно задающего воздействия передаточные функции системы в обоих режимах должны быть близки к желаемой функции  $U_1(s) = 1$ . В обоих режимах система должна обладать астатизмом первого порядка. Согласно сформулированным выше этапам приступим к решению задачи.

Этап 1. Для каждого из режимов работы найдем передаточные функции оптимальных регуляторов. Из постановки задачи следуют два функционала [5]:

$$I_1^* = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left| (U_1(s) - \tilde{H}_1^*(s)) \frac{1}{s} \right|^2 + \lambda_{01} |s^{b_1} \tilde{H}_1^*(s)|^2 - \rho_{11} \left[ \frac{\tilde{H}_1^*(-s)}{s+1} + \frac{\tilde{H}_1^*(s)}{-s+1} \right] \right\} ds + 2\rho_{11},$$

$$I_2^* = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left| (U_1(s) - \tilde{H}_2^*(s)) \frac{1}{s} \right|^2 + \lambda_{12} |s^{b_2} \tilde{H}_2^*(s)|^2 - \rho_{21} \left[ \frac{\tilde{H}_2^*(-s)}{s+2} + \frac{\tilde{H}_2^*(s)}{-s+2} \right] - \rho_{22} \left[ \frac{\tilde{H}_2^*(-s)}{s+3} + \frac{\tilde{H}_2^*(s)}{-s+3} \right] \right\} ds + 2(\rho_{21} + \rho_{22}),$$

здесь  $\lambda_{01}$  и  $\lambda_{12}$  – весовые коэффициенты, величины которых характеризуют качество переходных процессов,  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{21}$  и  $\rho_{22}$  – множители Лагранжа,  $\tilde{H}_1^*(s)$  и  $\tilde{H}_2^*(s)$  определяются соотношениями (1.2). Первые составляющие функционалов оценивают близость искомым функций  $\tilde{H}_1^*(s)$  и  $\tilde{H}_2^*(s)$  к

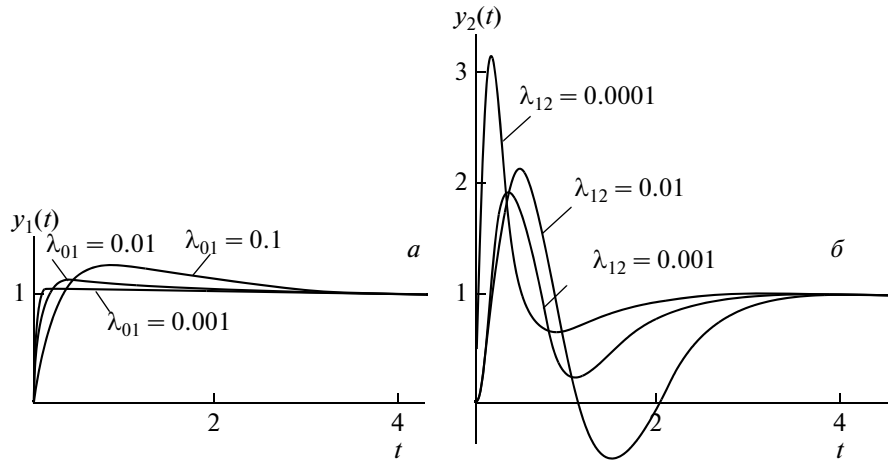


Рис. 3

желаемой функции  $U_i(s) = 1$  и качество переходного процесса. Конечность второй составляющей обеспечивает реализуемость звеньев коррекции  $W_{li}(s) = V_{li}(s)/G_{li}(s)$ ,  $i = 1, 2$ . Численная величина этого показателя характеризует качество переходного процесса [9]. Степени  $b_1 = 0$  и  $b_2 = 1$  выбираются так, чтобы выполнялись соотношения  $\deg V_{li}(s) = \deg G_{li}(s)$ ,  $i = 1, 2$ . В этом случае степень числителя равна получаемой из решения оптимизационной задачи степени знаменателя, т.е. число варьируемых параметров в регуляторе будет наибольшим [9]. Последние составляющие – это ограничения на компенсацию звеном коррекции правых полюсов передаточной функции объекта управления.

Записанный выше функционал адекватен функционалу (1.3), в котором

$$S_{11}(s) = \frac{1}{s(-s)} + \lambda_{01}s^{b_1}(-s)^{b_1}, \quad S_{21}(s) = \frac{U_1(s)}{s(-s)} + \frac{\rho_{11}}{s+1}, \quad S_{31}(s) = \frac{U_1(s)U_1(-s)}{s(-s)}$$

$$S_{12}(s) = \frac{1}{s(-s)} + \lambda_{12}s^{b_2}(-s)^{b_2}, \quad S_{22}(s) = \frac{U_1(s)}{s(-s)} + \frac{\rho_{21}}{s+2} + \frac{\rho_{22}}{s+3}, \quad S_{32}(s) = S_{31}(s).$$

Решение оптимизационной задачи приводит к уравнениям Винера–Хопфа:

$$\tilde{H}_1^*(s) \left( \lambda_{01} + \frac{1}{s(-s)} \right) - \left( \frac{1}{s(-s)} + \frac{\rho_{11}}{s+1} \right) = \Gamma_1(s),$$

$$\tilde{H}_2^*(s) \left( \lambda_{12}s(-s) + \frac{1}{s(-s)} \right) - \left( \frac{1}{s(-s)} + \frac{\rho_{21}}{s+2} + \frac{\rho_{22}}{s+3} \right) = \Gamma_2(s). \tag{3.2}$$

На рис. 3, *a* и *б* при различных значениях  $\lambda_{01}$  и  $\lambda_{12}$  приведены графики переходных процессов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ . Визуально сравнивая переходные процессы, выбираем  $\lambda_{01} = 0.1$  и  $\lambda_{12} = 0.001$ . На рис. 4, *a* при  $\lambda_{01} = 0.1$  и  $\lambda_{12} = 0.001$  приведены переходные процессы, выбранные для дальнейшего синтеза системы управления. Процессы на рис. 4, *a* служат ориентирами, к которым нужно стремиться при разработке робастного регулятора для заданного многорежимного объекта. Используя стандартную процедуру решения уравнения Винера–Хопфа (3.2) [5], найдем следующие соотношения.

Для объекта управления, функционирующего в штатном режиме, когда в (3.2)  $\lambda_{01} = 0.1$ ,

$$\tilde{H}_1^*(s) = \frac{5.1623s + 3.1623}{s^2 + 4.1623s + 3.1623}, \quad W_{11}(s) = \frac{\tilde{H}_1^*(s)}{W_{01}(s)(1 - \tilde{H}_1^*(s))} = \frac{5.1623s + 3.1623}{s},$$

$$I_1^* = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left| \frac{1 - \tilde{H}_1^*(s)}{s} \right|^2 + 0.1 \left| \tilde{H}_1^*(s) \right|^2 \right\} ds = 0.5162,$$

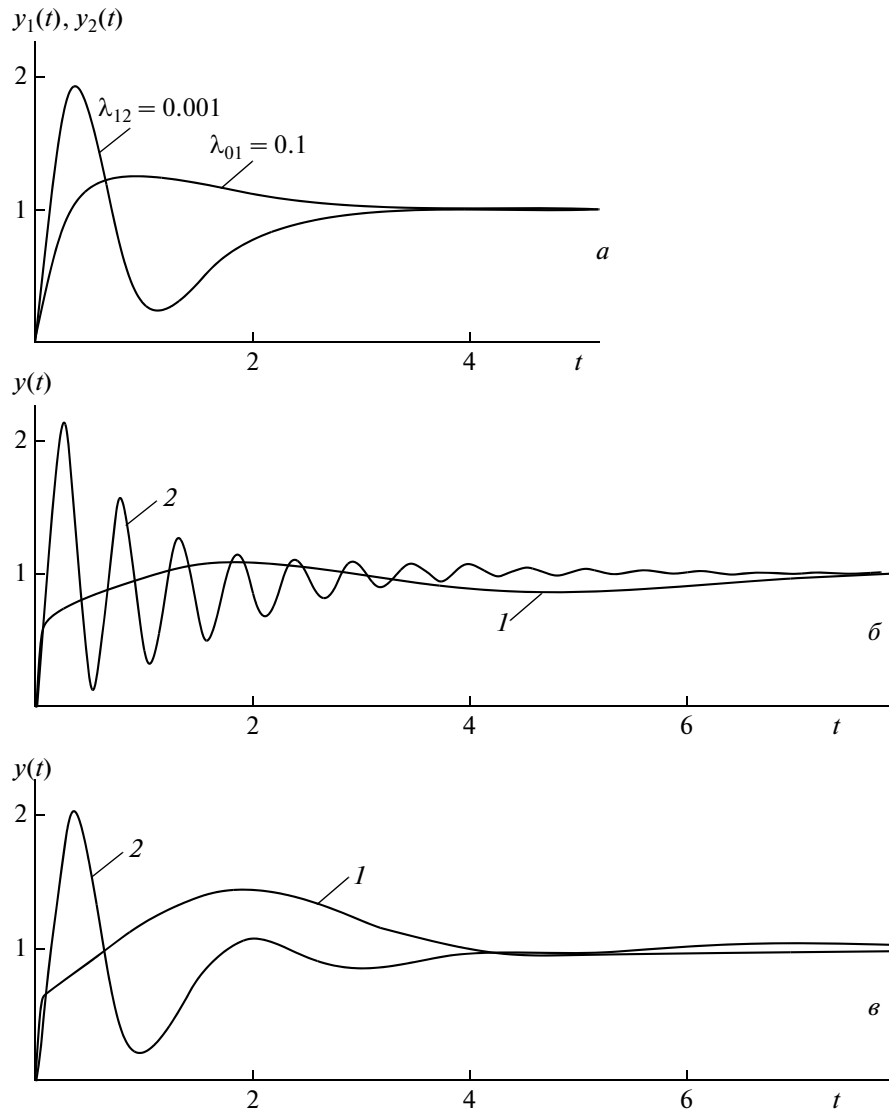


Рис. 4

причем первая составляющая функционала  $I_{11}^* = 0.1581$ , а вторая  $I_{12}^* = 3.5811$ . Эти составляющие численно оценивают приведенный на рис. 4, а переходной процесс  $y_1(t)$ .

Для объекта управления, функционирующего в аварийном режиме при  $\lambda_{12} = 0.001$ ,

$$\tilde{H}_2^*(s) = \frac{151.1498s^2 + 98.1139s + 189.7367}{s^4 + 12.9527s^3 + 77.3863s^2 + 205.8301s + 189.7367},$$

$$W_{12}(s) = \frac{\tilde{H}_2^*(s)}{W_{02}(s)(1 - \tilde{H}_2^*(s))} = \frac{26.8583s^2 + 16.3523s + 31.6229}{s^2 + 17.9527s},$$

$$I_2^* = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left| (1 - \tilde{H}_2^*(s)) \frac{1}{s} \right|^2 + 0.001 |s \tilde{H}_2^*(s)|^2 \right\} ds = 1.9892,$$

причем первая составляющая функционала  $I_{21}^* = 0.7037$ , а вторая  $I_{22}^* = 1.285 \times 10^3$ . Эти составляющие численно оценивают приведенный на рис. 4, а переходной процесс  $y_2(t)$ .

Сконструированные регуляторы не являются робастными относительно устойчивости. Действительно,

$$\frac{W_{02}(s)W_{11}(s)}{1 + W_{02}(s)W_{11}(s)} = \frac{30.9737s + 18.9737}{s^3 - 5s^2 + 36.9737s + 18.9737},$$

$$\frac{W_{01}(s)W_{12}(s)}{1 + W_{01}(s)W_{12}(s)} = \frac{26.8583s^2 + 16.3523s + 31.6288}{s^3 + 43.8110s^2 - 1.6004s + 31.6288}.$$

Этап 2. Заключается в нахождении структуры и параметров регулятора, обеспечивающего системе свойство робастной устойчивости. Примем, что структура робастного регулятора совпадает со структурой регулятора  $W_{12}(s)$ . Кроме того, учитывая, что даже с оптимальным для аварийного режима регулятором получен не очень хороший переходной процесс, придадим структуре искомого робастного регулятора дополнительные параметры, т.е. искать его передаточную функцию будем в виде

$$W_1(s) = \frac{V_1(s)}{G_1(s)} = \frac{v_3s^3 + v_2s^2 + v_1s + v_0}{g_3s^3 + g_2s^2 + g_1s}. \quad (3.3)$$

Как было сказано выше, при поиске начальные значения параметров  $W_1(s)$  должны обеспечивать системе с объектами  $W_{01}(s)$  и  $W_{02}(s)$  устойчивость. Имея в виду (3.3), преобразуем найденные выше передаточные функции звеньев коррекции:

$$W_{12}(s) = \frac{(26.8583s^2 + 16.3523s + 31.6229)(s + 1)}{(s^2 + 17.9527s)(s + 1)} =$$

$$= \frac{26.8583s^3 + 43.2106s^2 + 47.9751s + 31.6228}{s^3 + 18.9527s^2 + 17.9527s} \frac{V_{12}(s)}{G_{12}(s)}. \quad (3.4)$$

Приведенные в (3.4) параметры звена коррекции обеспечивают устойчивость объекту с передаточной функцией  $W_{02}(s)$ . Звено коррекции с передаточной функцией

$$W_{11}(s) = \frac{(5.1623s + 3.1623)(s + 1)^2}{s(s + 1)^2} = \frac{5.1623s^3 + 13.4868s^2 + 11.48683s + 3.1623}{s^3 + 2s^2 + s} \frac{V_{12}(s)}{G_{12}(s)} \quad (3.5)$$

приводит к устойчивости объект с передаточной функцией  $W_{01}(s)$ . Отметим, что после проведенных преобразований передаточные функции  $W_{12}(s)$  и  $W_{11}(s)$  по структуре совпадают. Таким образом, робастный регулятор будет иметь вид (3.3).

Этап 3. На этом заключительном этапе необходимо найти параметры регулятора (3.3) из условия минимума критерия (3.1). При условии, что система устойчива как в штатном, так и аварийном режиме. Как было сказано, универсальных методов решения таких задач не существует. Опыт решения аналогичных задач [4] говорит о целесообразности разбиения этапа на два подэтапа. На первом подэтапе параметры регулятора (3.3) определяются из условия устойчивости системы как в штатном, так и в аварийном режиме. На втором – найденные параметры уточняются из условия минимума критерия (3.1) при ограничении на устойчивость системы как в аварийном, так и в штатном режиме.

Рассмотрим первый подэтап. Из коэффициентов  $W_{12}(s)$  и  $W_{11}(s)$  составим функцию

$$I_3 = (v_{32} - v_{31})^2 + (v_{22} - v_{21})^2 + (v_{12} - v_{11})^2 + (v_{02} - v_{01})^2 + (g_{22} - g_{21})^2 + (g_{12} - g_{11})^2.$$

Проведем минимизацию  $I_3$  по параметрам при условии положительности коэффициентов характеристических полиномов

$$T_2(s) = G_{12}(s)P_{02}(s) + V_{12}(s)Q_{02}(s) = (g_{32}s^3 + g_{22}s^2 + g_{12}s)(s - 2)(s - 3) + 6(v_{32}s^3 + v_{22}s^2 + v_{12}s + v_{02}),$$

$$T_1(s) = G_{11}(s)P_{01}(s) + V_{11}(s)Q_{01}(s) = (g_{31}s^3 + g_{21}s^2 + g_{11}s)(s - 1) + (v_{31}s^3 + v_{21}s^2 + v_{11}s + v_{01})$$

и положительности главных определителей Гурвица  $D_2$  и  $D_1$ , составленных из этих коэффициентов. Начальные значения параметров  $W_{12}(s)$  и  $W_{11}(s)$  взяты из соотношений (3.4) и (3.5). При них все ограничивающие условия, а именно положительность коэффициентов  $T_1(s)$ ,  $T_2(s)$  и соотношения  $D_2 > 0$ ,  $D_1 > 0$ , соблюдаются.

Таблица

Регулятор	Режим	Интегральные показатели			Переходные процессы
		$I_{11}^*$	$I_{12}^*$	$I_1^*$	
Оптимальный для штатного режима $W_{11}(s) = \frac{5.1623s + 3.1623}{s}$	Штатный	0.1581	3.5811	0.5162	Рис. 4, а, кривая $\lambda_{01} = 0.1$
	Аварийный	$\infty$	$\infty$	$\infty$	
Оптимальный для аварийного режима $W_{12}(s) = \frac{26.8583s^2 + 16.3523s + 31.6229}{s^2 + 17.9527s}$	Штатный	$\infty$	$\infty$	$\infty$	Рис. 4, а, кривая $\lambda_{12} = 0.001$
	Аварийный	0.704	$1.285 \times 10^3$	1.989	
Робастный относительно устойчивости $W_1(s) = \frac{30.166s^3 + 39.183s^2 + 47.437s + 9.877}{s^3 + 8.598s^2 + 1.412s}$	Штатный	0.094	12.774	1.371	Рис. 4, б, кривая 1
	Аварийный	0.539	$9.967 \times 10^3$	10.507	Рис. 4, б, кривая 2
Робастный относительно устойчивости и качества $W_1(s) = \frac{28.838s^3 + 46.092s^2 + 62.002s + 5.985}{s^3 + 18.654s^2 + 1.620s}$	Штатный	0.301	10.008	1.301	Рис. 4, в, кривая 1
	Аварийный	0.538	$1.720 \times 10^3$	2.258	Рис. 4, в, кривая 2

Найденное достаточно малое значение  $I_3$  в нашем примере, равное 3.087, при начальной величине, равной  $4.645 \times 10^3$ , приводит к решению задачи. Полученный регулятор имеет передаточную функцию

$$W_1(s) = \frac{30.166s^3 + 39.183s^2 + 47.437s + 9.877}{s^3 + 8.598s^2 + 1.412s}$$

и придает системе свойство робастной устойчивости. Если параметры не будут найдены, степень числителя и знаменателя передаточных функций  $W_{12}(s)$  и  $W_{11}(s)$  необходимо увеличить.

К сожалению, найденный робастный относительно устойчивости регулятор не обеспечивает приемлемые значения показателей качества. На рис. 4, б приведены переходные процессы  $y(t)$ : процесс 1, для случая, когда объект имеет передаточную функцию  $W_{01}(s)$ , процесс 2, когда передаточная функция объекта  $W_{02}(s)$ . Процесс 2 на рис. 4, б сильно расходится с процессом  $\lambda_{12} = 0.001$  на рис. 4, а, т.е. с оптимальным процессом, на который необходимо ориентироваться.

Переходим ко второму подэтапу – корректировке найденных параметров робастного регулятора из условия минимума критерия

$$I = J_1 + \chi J_2,$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left| \left( 1 - \frac{\tilde{H}_1(s)}{s} \right) \frac{1}{s} \right|^2 + 0.1 |\tilde{H}_1(s)|^2 \right\} ds,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left| \left( 1 - \frac{\tilde{H}_2(s)}{s} \right) \frac{1}{s} \right|^2 + 0.001 |s \tilde{H}_2(s)|^2 \right\} ds,$$

здесь передаточные функции  $\tilde{H}_1(s)$  и  $\tilde{H}_2(s)$  определяются соотношениями (1.4). Значение весового коэффициента  $\chi$  выбирается из анализа переходных процессов системы в штатном и аварийном режимах. Приемлемым значением оказалась величина  $\chi = 1$ . Тогда



$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left| \frac{1 - \tilde{H}_1(s)}{s} \right|^2 + 0.1 |\tilde{H}_1(s)|^2 \right\} ds = 1.158,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left| \frac{1 - \tilde{H}_2(s)}{s} \right|^2 + 0.001 |s\tilde{H}_2(s)|^2 \right\} ds = 2.173,$$

$$W_1(s) = \frac{28.838s^3 + 46.092s^2 + 62.002s + 5.985}{s^3 + 18.654s^2 + 1.620s}.$$

При этом для функционала  $I_1$  первая составляющая равна 0.301, а вторая — 10.008, тогда как для функционала  $I_2$  первая равна 0.538, а вторая —  $1.720 \times 10^3$ .

На рис. 4, *в* приведены графики переходных процессов  $y(t)$  системы с робастным относительно качества регулятором для объектов  $W_{01}(s)$  (кривая 1) и  $W_{02}(s)$  (кривая 2). Визуальное сравнение рис. 4, *а* и *в* показало достаточную близость переходных процессов сконструированной робастной относительно качества системы к оптимальным процессам, что, конечно, не всегда имеет место. Процесс решения задачи сведен в таблицу.

**Заключение.** Рассмотрена задача конструирования оптимальной робастной системы, в которой объект многорежимный. Получена система уравнений Винера–Хопфа (2.2), из решения которой при ограничении (1.5) можно найти оптимальный относительно качества робастный регулятор. Существующие методы решения матричных уравнений Винера–Хопфа при ограничениях вида (1.5) не позволяют найти точное решение. Задача была решена с использованием приближенных процедур. Эффективность алгоритма приближенного решения продемонстрирована примером.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. Ким Д.П. Синтез систем управления максимальной робастной степени устойчивости // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 5. С. 52–57.
3. Зотов М.Г. Об одном подходе к конструированию робастных систем // АиТ. 2010. № 11. С. 149–158.
4. Зотов М.Г. О конструировании робастных по критерию качества систем управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 4. С. 3–13.
5. Зотов М.Г. Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2004.
6. Пугачев В.С., Казаков И.Е., Евланов Л.Г. Основы статистической теории автоматических систем. М.: Машиностроение, 1974.
7. Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н. Введение в методы оптимизации. М.: Финансы и статистика, 2008.
8. Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991.
9. Кухтенко В.И. К расчету корректирующих цепей систем автоматического управления по критерию минимума среднеквадратичной ошибки // АиТ. 1959. № 9. С. 1180–1187.