

УДК 523.947

## ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КОРОНАЛЬНЫХ АРОК

© 2014 г. Н. С. Петрухин\*

Национальный исследовательский университет, Высшая школа экономики

Поступила в редакцию 24.06.2013 г.

Исследуются собственные колебания корональных арок с постоянной плотностью и переменными магнитными полями, изменяющимися по параболическим законам. С помощью разработанного авторами метода получены волновые уравнения с постоянными коэффициентами, описывающие изгибные колебания симметричных и несимметричных магнитных трубок. Для таких моделей получены аналитические выражения для спектров и амплитуд колебаний, а также величины и направления смещений экстремумов основной и первой мод относительно их значений для однородных трубок. Для первой моды несимметричной петли определена зависимость смещения координаты внутреннего узла от соотношений величин магнитного поля в несимметричных частях, а также отношение значений амплитуды в точках экстремумов.

**Ключевые слова:** безотражательные волны, магнитозвуковые волны, корона, корональные петли, изгибные колебания.

**DOI:** 10.7868/S0320010814060072

### ВВЕДЕНИЕ

Поперечные смещения в корональных магнитных арках, зафиксированные лабораторией TRACE, были первым волновым явлением, явно наблюдаемым в короне (Ашванден и др., 1999; Накаряков и др., 1999). Эти колебания были интерпретированы как основная мода стоячих изгибных волн в магнитных трубках. Позднее были обнаружены моды первого и не вполне уверенно более высоких порядков (Вервихт и др., 2004; Ван Доорселар и др., 2007; О Ши и др., 2007). Поперечные возмущения, распространяющиеся вдоль магнитного поля, наблюдались также в фибриллах (Окамото и др., 2007) и хромосферных спикулах (Де Понтье и др., 2007).

Обнаружение колебаний арок сделало тематику корональной гелиосейсмологии одной из самых актуальных в солнечной астрофизике. Появилось множество теоретических работ, в которых предлагаются симметричные модели арок и для этих моделей проводились расчеты, в основном численные или приближенные аналитические, с целью изучения свойств таких колебаний (см. обзоры, Андриес и др., 2009; Рудерман, Эрдели, 2009; Степанов, др., 2012; Де Мортель, Накоряков, 2012). Следует отметить статью Дымовой, Рудермана (2006), в которой получены аналитические решения для модели

с постоянным магнитным полем и плотностью, заданной в параболической форме. В работах (Верт, 2007; Верт, Ердели, 2008) численно и аналитически исследованы колебания корональной петли с постоянной плотностью, в которой магнитное поле задано квадратичной функцией.

В данной работе рассматриваются модели корональных арок с постоянной плотностью и переменным магнитным полем, которое также, как и в работе (Верт, Ердели, 2008), меняется по параболическим законам. Для симметричной модели получено уточненное выражение для спектра изгибных колебаний, а также найдены простые аналитические выражения смещений экстремумов амплитуды первой моды.

Кроме того, рассмотрены модели корональных петель, в которых магнитное поле несимметрично относительно их вершин. В основу работы легли результаты наших недавних исследований, в которых было показано, что в сильно неоднородной среде могут существовать бегущие волны, которые не отражаются на неоднородностях. Математический прием получения таких решений связан с трансформационными преобразованиями аргументов и функций, при которых, например, волновое уравнение с переменными коэффициентами при определенных ограничениях сводится к уравнениям гиперболического типа с постоянными

\* Электронный адрес: npetruhin@hse.ru

коэффициентами, так что существование безотражательных бегущих волн становится очевидным. В частности, это проделано нами для внутренних и поверхностных волн в несжимаемой жидкости (Талипова и др., 2009), для вертикально распространяющихся акустических волн в неоднородных сжимаемых атмосферах Земли и Солнца (Петрухин и др., 2011, 2012а,б,в), а также для быстрых магнитозвуковых волн в корональных петлях (Рудерман и др., 2013).

### БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В МАГНИТНЫХ ТРУБКАХ

Исследуем быстрые магнитозвуковые изгибные волны, распространяющиеся вдоль тонкой магнитной трубы. В общем случае предполагается, что невозмущенные параметры изменяются только вдоль трубы. Исследования показали (Ван Дорселар и др., 2009), что искривление с радиусом кривизны, характерным для корональных петель, оказывает слабое влияние на дисперсионные соотношения изгибных волн, поэтому будем считать трубку прямолинейной, расположенной вдоль оси  $oz$ . Таким образом, плотность плазмы можно определить соотношением

$$\rho = \begin{cases} \rho_i; & r < R(z), \\ \rho_e; & r > R(z). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $R(z)$  — поперечный радиус трубы,  $\rho_i$  и  $\rho_e$  — плотность плазмы внутри и вне трубы соответственно, в данной работе постоянные величины. На границе трубы с окружающей средой должно выполняться условие равновесия

$$\frac{B_i^2}{8\pi} + P_i = \frac{B_e^2}{8\pi} + P_e, \quad (2)$$

где  $B_{i,e}$ ,  $P_{i,e}$  — напряженность магнитного поля и газовое давление, соответственно, внутри и вне трубы. Так как в корональной плазме выполняется неравенство  $\frac{P}{B^2/8\pi} \ll 1$  (Ашванден, 2005), то из соотношения (2) следует

$$B_e \approx B_i \approx B. \quad (3)$$

В работах (Спруит, 1981; Дымова, Рудерман, 2006; Рудерман и др., 2008) показано, что в такой трубке распространение изгибных волн описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (4)$$

где  $u = \frac{\eta}{R}$ ,  $\eta$  — поперечное смещение трубы и

$$c(z) = \frac{B}{\sqrt{2\pi(\rho_i + \rho_e)}} \quad (5)$$

скорость изгибной волны.

Уравнение (4) содержит переменный коэффициент  $c^2(z)$ , поэтому в общем случае его решение описывает процесс трансформации падающей волны в проходящую и отраженную на неоднородностях среды, и не распадается на два независимых решения, соответствующих бегущим волнам в противоположных направлениях. Существование невзаимодействующих встречных волн тривиально в случае уравнения с постоянными коэффициентами, поэтому важно найти преобразования, приводящие уравнение (4) к уравнению с постоянными коэффициентами. Основная идея такого метода обсуждалась в наших работах (Петрухин и др. 2011, 2012а,б,в; Рудерман и др., 2013). Показано, что в результате этих преобразований волновое уравнение (4) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = \beta \Phi, \quad (6)$$

где

$$\Phi(t, \tau) = u(t, z) / \sqrt{c(z)}, \quad \tau(z) = \int \frac{dz}{c(z)} \quad (7)$$

и  $\beta$  — произвольная постоянная. Уравнение (6) в переменных  $\Phi(t, \tau)$  описывает бегущие в противоположных направлениях невзаимодействующие волны с дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = k^2 - \beta, \quad (8)$$

где  $\omega$  — частота волны, а  $k$  — волновое число относительно новой координаты  $\tau$ . При этом функция  $c(z)$  должна удовлетворять, в частности, условию

$$c = M(z + N)^2 + \beta/M, \quad (9)$$

где  $M$  и  $N$  — произвольные константы. Модели корональных трубок, которые описывает уравнение (9), можно разделить на два вида. Первый, в котором  $M > 0$ , а следовательно, и  $\beta > 0$ , соответствуют параболе, ветви которой направлены вверх. В этом случае скорость  $c(z)$  с высотой падает. Второй случай ( $M < 0$ , а следовательно, и  $\beta < 0$ ) описывает семейство парабол с направленными вниз ветвями. При таких параметрах скорость изгибной волны  $c(z)$  с высотой растет. В данной работе рассмотрен первый случай.

### СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИММЕТРИЧНОЙ ПЕТЛИ С ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Используя формулу (9), построим модели солнечных корональных петель, состоящих из параболических безотражательных профилей для скорости изгибных волн. Мы рассматриваем только ту часть трубы, которая находится над фотосферой. Замыкание магнитных силовых линий происходит в

плотных подфотосферных слоях. Как известно, на высоте фотосферы происходит резкое изменение плотности, поэтому будем считать этот уровень жесткой отражающей границей для изгибных волн, распространяющихся в корональной петле. Выберем ось  $oz$  вдоль трубы длиной  $2L$  с началом координат в ее середине. Вначале рассмотрим симметричную модель с положительными значениями  $M$  и  $\beta$ . В этом случае  $N = 0$ . Обозначая  $c(z = 0) = c_0$ ,  $c(z = \pm L) = c_t$  и  $\alpha = c_t/c_0$ , получаем

$$c = c_0 \left[ 1 + (\alpha - 1) \left( \frac{z}{L} \right)^2 \right], \quad (10)$$

$$\beta = c_0^2 \frac{(\alpha - 1)}{L^2}. \quad (11)$$

Полагая

$$\Phi = \psi(\tau) e^{i\omega t}, \quad (12)$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + (\omega^2 + \beta)\psi = 0. \quad (13)$$

Функция  $r(z)$ , определяющая поперечные смещения трубы, связана с решением уравнения (13) соотношением

$$r = [c(z)]^{1/2} R(z) \psi(z) = \rho^{-\frac{1}{4}} \psi(z). \quad (14)$$

Учитывая, что плотность в данной работе считается постоянной, переменные  $\psi$  и  $r$  с точностью до постоянного множителя совпадают, поэтому общее решение уравнения (13) можно записать в виде

$$r[\tau(z)] = A \sin(k\tau) + D \cos(k\tau), \quad (15)$$

где  $A$  и  $D$  — произвольные постоянные и  $k$  — волновое число, удовлетворяющее дисперсионному соотношению (8). Новая переменная  $\tau$  связана с физической координатой  $z$  формулой (7) и для рассматриваемого профиля изгибной скорости (10) определяется в явном виде

$$\begin{aligned} \tau(z) &= \int_0^z \frac{dz'}{c(z')} = \frac{L}{c_0 \sqrt{(\alpha - 1)}} \times \\ &\times \arctg \left( \frac{z}{L} \sqrt{\alpha - 1} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Вследствие симметрии задачи относительно начала координат, граничные условия можно задать на одном из концов трубы, например, при  $z = L$  и в ее середине (т.е. при  $z = 0$ ). Для основной моды, а также для всех мод с четным числом узлов, полагаем

$$r[\tau = \tau(L)] = 0, \quad \frac{dr}{dz}[\tau = \tau(0)] = 0, \quad (17)$$

а для нечетных мод

$$r[\tau = \tau(L)] = 0, \quad r[\tau = \tau(0)] = 0. \quad (18)$$

Удовлетворяя граничным условиям (17)–(18), получаем спектр собственных изгибных колебаний трубы

$$\Omega_n = \sqrt{(\alpha - 1)} \sqrt{\frac{n^2}{(\arctg \sqrt{\alpha - 1})^2} - \frac{4}{\pi^2}}, \quad (19)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Здесь  $\Omega_n = \omega_n/\omega_0$ ,  $\omega_n$  — собственная частота колебаний  $n$ -ой моды и  $\omega_0 = \pi c_0/2L$  — частота основной моды в однородной трубке длиной  $2L$ , изгибная скорость которой равна  $c_0$ . Значение параметра  $\alpha$ , равное единице, соответствует среде с постоянной скоростью  $c$ . В этом случае либо плотность плазмы и магнитное поле постоянны, либо они изменяются, компенсируя друг друга. Собственные функции для собственных частот можно записать в виде:

$$r_n = \begin{cases} A_n \cos \left\{ \frac{\pi n \arctg \left( \frac{z \sqrt{\alpha - 1}}{L} \right)}{2 \arctg \sqrt{\alpha - 1}} \right\}, \\ D_n \sin \left\{ \frac{\pi n \arctg \left( \frac{z \sqrt{\alpha - 1}}{L} \right)}{2 \arctg \sqrt{\alpha - 1}} \right\}, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} n = 1, 3, \dots \\ n = 2, 4, \dots \end{cases},$$

где  $A_n$  и  $D_n$  — произвольные константы. Верхние выражения в фигурных скобках соответствуют четным модам, а нижние — нечетным.

Важными характеристиками при использовании результатов теоретических исследований в гелиосейсмологии являются знак и величина отклонения экстремумов амплитуд колебаний в среде с переменными параметрами от их значений в однородной плазме.

В работах (Верт, 2007; Верт, Ердели, 2008) для рассматриваемой модели проведены исследования формы амплитуд основной и первой мод колебаний трубы. Было показано, что амплитуды колебаний основной моды расположены внутри графика косинуса, определяющего амплитуду колебаний в однородной среде, а экстремумы амплитуд первой моды смещены относительно экстремумов синусоиды к началу координат.

Выражения (20) позволяют определить простые формулы для определения величин смещений экстремумов первой моды колебаний. Приравнивая на отрезках  $[-L, 0]$  и  $[0, L]$  аргумент синуса соответственно к  $\pm \frac{\pi}{2}$ , получаем

$$\left( \frac{z}{L} \right)_{extr} = \pm \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha}}, \quad (21)$$

где плюс относится к правой половине петли, а минус — к левой. Отклонение экстремумов от середин отрезков равно

$$\left(\frac{\Delta z}{L}\right)_{extr} = \pm \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{2(1 + \sqrt{\alpha})}. \quad (22)$$

В рассматриваемой модели параметр  $\alpha > 1$ , поэтому влияние неоднородности магнитного поля приводит к смещению экстремумов амплитуд первой моды к началу координат, т.е. в направлении убывания изгибной скорости (10), как это следует из численных исследований (Верт, 2007; Верт, Ердели, 2008).

### СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЕТЛИ С ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Рассмотрим модель корональной петли, заполненной однородной плазмой, состоящей из двух несимметричных частей, которые соединяются при вершине ( $z = 0$ ) и опираются на активные области с магнитными полями, модули напряженности которых различны. Зададим магнитное поле в виде

$$B(z) = \begin{cases} B_1(z) & = \\ B_2(z) & \\ = B(0) \begin{cases} 1 + (\alpha_1 - 1) \left(\frac{z}{L}\right)^2; & -L \leq z \leq 0; \\ 1 + (\alpha_2 - 1) \left(\frac{z}{L}\right)^2; & 0 \leq z \leq L; \end{cases} \end{cases} \quad (23)$$

где

$$\alpha_1 = B_1(-L)/B(0); \quad \alpha_2 = B_2(L)/B(0); \quad (24)$$

$$\beta_{1,2} = \frac{[B(0)]^2}{2\pi(\rho_i + \rho_e)} \frac{(\alpha_{1,2} - 1)}{L^2}.$$

В этом случае скорость изгибной волны пропорциональна напряженности магнитного поля:

$$c_{1,2}(z) \propto B_{1,2}(z). \quad (25)$$

С учетом этого условия (24) можно переписать в виде

$$\alpha_1 = c_1(-L)/c_0; \quad \alpha_2 = c_2(L)/c_0; \quad (26)$$

$$\beta_{1,2} = c_0^2 \frac{(\alpha_{1,2} - 1)}{L^2}.$$

Проводя в уравнении (4) для данной модели преобразования, аналогичные тем, которые были проделаны в предыдущем пункте для симметричной трубы, получаем

$$\frac{d^2\psi_{1,2}}{d\tau_{1,2}^2} + (\omega^2 + \beta_{1,2})\psi_{1,2} = 0, \quad (27)$$

где индекс 1 соответствует отрезку  $[-L, 0]$ , а 2 —  $[0, L]$ . Новые переменные  $\tau_{1,2}$  связаны с физической координатой  $z$  формулой (7) и определяются в явном виде

$$\tau_{1,2} = \int_0^z \frac{dz'}{c_{1,2}} = \frac{L}{c_0 \sqrt{(\alpha_{1,2} - 1)}} \arctg \left( \frac{z}{L} \sqrt{\alpha_{1,2} - 1} \right). \quad (28)$$

Так как плотность плазмы постоянна, функции  $\psi_{1,2}$  пропорциональны поперечным смещениям трубы  $r_{1,2}$ , поэтому общее решение уравнения (27) можно записать в виде

$$r_{1,2}[\tau_{1,2}(z)] = A_{1,2} \sin(k_{1,2}\tau_{1,2}) + D_{1,2} \cos(k_{1,2}\tau_{1,2}). \quad (29)$$

Здесь  $A_{1,2}$  и  $D_{1,2}$  — произвольные постоянные и  $k_{1,2}$  — волновые числа, которые с учетом дисперсионного соотношения (8) и значений  $\beta_{1,2}$  (26) равны

$$k_{1,2} = \frac{c_0 \sqrt{(1 - \alpha_{1,2})}}{L} Q^{(1,2)}, \quad (30)$$

$$Q^{(1,2)} = \sqrt{\frac{\Omega^2 \pi^2}{4(\alpha_{1,2} - 1)} + 1}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (31)$$

Будем считать концы трубы неподвижными. Кроме этого, потребуем в точках сопряжения ( $z = 0$ ) непрерывности функций (29) и их первых производных. Удовлетворяя этим граничным условиям, находим дисперсионное соотношение для стоячих волн

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(Q_n^{(1)} \sqrt{\alpha_1 - 1}) \operatorname{ctg}(Q_n^{(2)} \arctg \sqrt{\alpha_2 - 1}) &= (32) \\ &= -\frac{Q_n^{(1)} \sqrt{\alpha_1 - 1}}{Q_n^{(2)} \sqrt{\alpha_2 - 1}}, \\ &n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь

$$Q_n^{(1,2)} = \sqrt{\frac{\Omega_n^2 \pi^2}{4(\alpha_{1,2} - 1)} + 1}; \quad \Omega_n = \frac{\omega_n}{\omega_0}. \quad (33)$$

Амплитуды, соответствующие собственным частотам колебаний, определяются формулами

$$r_n = C_n \times \begin{cases} \frac{\sin[Q_n^{(1)}(\operatorname{arctg} \sqrt{\alpha_1 - 1} + \operatorname{arctg}(\frac{z}{L} \sqrt{\alpha_1 - 1}))]}{\sin[Q_n^{(1)}(\operatorname{arctg} \sqrt{\alpha_1 - 1})]}, & -L \leq z \leq 0, \\ \frac{\sin[Q_n^{(2)}(\operatorname{arctg} \sqrt{\alpha_2 - 1} - \operatorname{arctg}(\frac{z}{L} \sqrt{\alpha_2 - 1}))]}{\sin[Q_n^{(2)}(\operatorname{arctg} \sqrt{\alpha_2 - 1})]}, & 0 \leq z \leq L. \end{cases} \quad (34)$$

где  $C_n$  — произвольные константы.

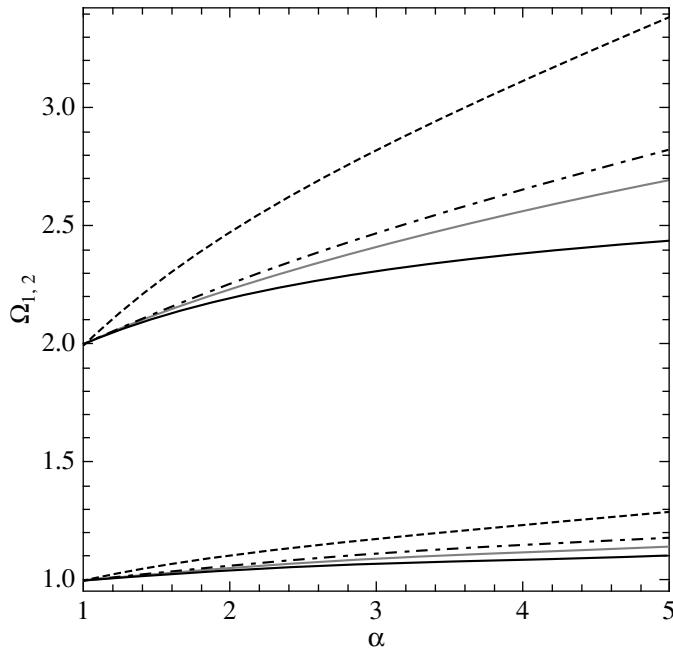


Рис. 1. Частоты  $\Omega_{1,2}$  основной и первой мод как функции параметра  $\alpha$ .

Модель петли, в половине которой магнитное поле постоянное

Рассмотрим модель несимметричной петли, в левой половине которой магнитное поле не изменяется, т.е.  $\alpha_1 = 1$ , а правой убывает от основания к вершине. Обозначим  $\alpha_2 = \alpha > 1$ . В этом случае дисперсионное соотношение (32) и собственные функции (34) можно переписать в виде

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi \Omega_n}{2} \right) \operatorname{ctg} (Q_n \operatorname{arctg} \sqrt{\alpha - 1}) = \quad (35)$$

$$= -\frac{\pi \Omega_n}{2} \frac{1}{Q_n \sqrt{\alpha - 1}};$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{\Omega_n^2 \pi^2}{4(\alpha - 1)} + 1},$$

$$n = 1, 2, \dots;$$

$$r_n = C_n \times \quad (36)$$

$$\times \begin{cases} \frac{\sin \frac{\pi \Omega_n}{2} (1 + \frac{z}{L})}{\sin(\frac{\pi \Omega_n}{2})}, \\ -L \leq z \leq 0 \\ \frac{\sin [Q_n (\operatorname{arctg} \sqrt{\alpha - 1} - \operatorname{arctg} (\frac{z}{L} \sqrt{\alpha - 1}))]}{\sin [Q_n (\operatorname{arctg} \sqrt{\alpha - 1})]}, \\ 0 \leq z \leq L \end{cases}$$

На рис. 1 жирными линиями для такой модели построены графики зависимости относительных частот основной и первой мод от параметра  $\alpha$ . Для сравнения помещены графики функций (19) для симметричных моделей. Штриховые линии для

аргумента  $\alpha$ , а штрихпунктирные для средних значений параметров неоднородностей петли, т.е. от  $0.5(1 + \alpha)$ . Наконец, тонкие сплошные линии построены для функций  $[\Omega_{1,2}(\alpha) + \Omega_{1,2}(1)]/2$  — являющихся средними значениями для частот однородной и соответствующей неоднородной симметричных моделей. Из рисунка видно, что частоты колебаний как основной, так и первой мод несимметричной модели, меньше чем у отмеченных выше симметричных моделей. Кроме того, при одинаковых параметрах  $\alpha$  они также меньше значений  $[\Omega_{1,2}(\alpha) + \Omega_{1,2}(1)]/2$ .

На рис. 2 изображены графики амплитуд основной моды (36) несимметричной петли для значений параметра  $\alpha$  от 1 до 4 с шагом 1. При  $\alpha = 1$  арка является симметричной и однородной, графиком амплитуды основной моды которой является косинусоида. На рисунке она выделена жирной линией. Из этих графиков можно заметить, что максимумы амплитуд собственных колебаний несимметричной трубы смещены в направлении более слабого магнитного поля. При этом величина смещения возрастает с увеличением параметра  $\alpha$ . Интересно также отметить, что в правой неоднородной части графика кривые, так же как в симметричной модели расположены “внутри” косинусоиды, в то время как в левой однородной — “вне”.

Аналитическое выражение для координаты, в которой амплитуда основной моды принимает максимальное значение, легко получить из формулы (36) при  $-L \leq z \leq 0$ , приравнивая аргумент

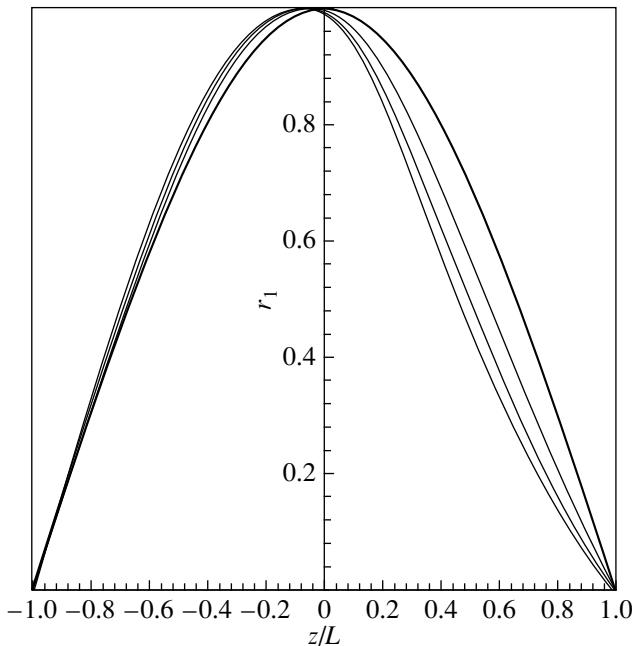


Рис. 2. Амплитуды основной моды (36) для значений параметра  $\alpha$  от 1 до 4 с шагом 1. Жирная линия — косинусоида ( $\alpha = 1$ ).

синуса к  $\pi/2$ :

$$\left(\frac{z}{L}\right)_{\max}^{(1)} = \frac{1 - \Omega_1}{\Omega_1}. \quad (37)$$

Рисунок 3 представляет амплитуды первой моды (38) для тех же параметров, что и на рис. 2. Жирной линией выделен график синусоиды. Как известно, в симметричной модели точки экстремумов амплитуд первой моды симметричны относительно начала координат. В несимметричном случае картина качественно иная.

Во-первых, график амплитуды асимметричен. Внутренний узел смещен от начала координат влево, т.е. в сторону более слабого магнитного поля. При этом координата узла легко определяется из выражения (36):

$$\left(\frac{z}{L}\right)_{knot} = \frac{2 - \Omega_2}{\Omega_2}. \quad (38)$$

Во-вторых, смещения экстремумов несимметричны относительно узла, при этом они в отличие от симметричного случая смещаются от середин отрезков  $-L \leq z \leq 0$  и  $0 \leq z \leq L$  в одном направлении. Из формул (36) также легко находятся аналитические выражения для этих смещений. Отклонение минимума амплитуды от середины отрезка  $-L \leq z \leq 0$  равно

$$\left(\frac{\Delta z}{L}\right)_{\min} = \frac{2 - \Omega_2}{2\Omega_2}. \quad (39)$$

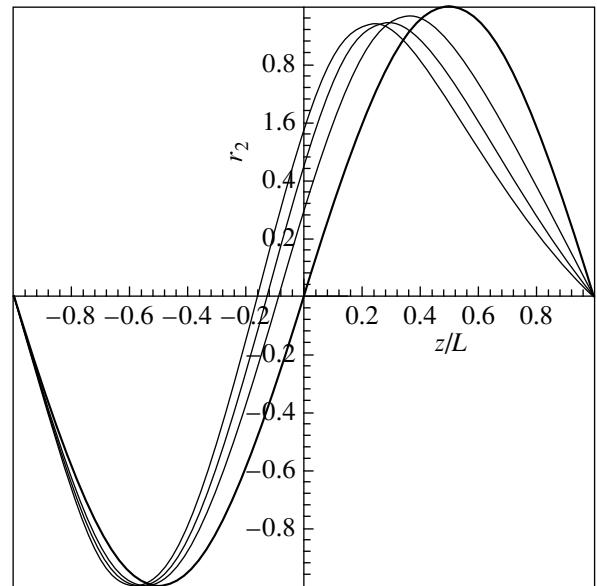


Рис. 3. Амплитуды первой моды (36) для значений параметра  $\alpha$  от 1 до 4 с шагом 1. Жирная линия — синусоида ( $\alpha = 1$ ).

Так как частота первой моды  $\Omega_2 > 2$ , то минимум ее амплитуды смещается в направлении левого основания трубы. Как следует из рис. 3, отклонение максимума, соответствующего части дуги с переменным магнитным полем заметно превосходит по величине смещение минимума. Точку максимума можно определить с помощью выражения

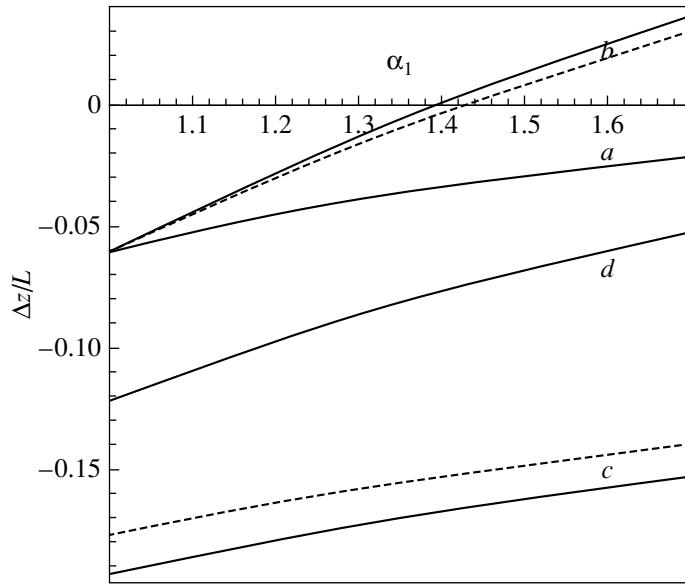
$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{L}\right)_{\max} &= \frac{1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\sqrt{\alpha-1}}}{1 + \sqrt{\alpha-1} \operatorname{tg} \varphi_2} \cong \\ &\cong \frac{\Omega_2 - 1}{\alpha - 1 + \Omega_2}, \end{aligned} \quad (40)$$

где  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2\Omega_2}$ . Здесь вместе с точной формулой представлено ее приближенное значение (относительная погрешность для рассматриваемых параметров неоднородности  $\alpha$  менее 8%), которое позволяет записать простую зависимость от частоты и параметра  $\alpha$  отклонения максимума амплитуды от середины отрезка  $0 \leq z \leq L$

$$\left(\frac{\Delta z}{L}\right)_{\max} \cong \frac{\Omega_2 - (\alpha + 1)}{2(\Omega_2 + \alpha - 1)}. \quad (41)$$

С помощью дисперсионного соотношения (19) можно показать, что  $\Omega_2(\alpha) < \alpha + 1$ , поэтому смещение правого максимума (41) также как и левого отрицательное.

В-третьих, максимальные значения амплитуд в левой и правой частях одной и той же кривой неодинаковы. Левый экстремум по абсолютной ве-



**Рис. 4.** Графики зависимостей от параметра  $\alpha_1$  смещений  $\Delta z/L$  узловых точек и экстремумов основной и первой мод от их значений в однородных трубках при постоянном значении параметра  $\alpha_2 = 2.676$ . Кривые “*a*” — основная мода, “*b*” — минимумы и “*c*” — максимумы первой моды и “*d*” — внутренние узловые точки первой моды. Сплошные линии точные, штриховые кривые — приближенные значения.

личине превосходит правый и их отношение равно

$$\left| \frac{r_2[(\frac{z}{L})_{\min}]}{r_2[(\frac{z}{L})_{\max}]} \right| = \left| \frac{\sin [Q_2(\arctg \sqrt{\alpha_1 - 1})]}{\sin (\frac{\pi \Omega_2}{2})} \right|, \quad (42)$$

и это различие возрастает с увеличением параметра  $\alpha$ .

#### Модель петли с переменным магнитным полем на всей ее длине

Рассмотрим несимметричную трубку, в каждой из половинок которой магнитное поле переменное. Пусть в левой части трубы параметр неоднородности равен  $\alpha_1$ , а в правой  $\alpha_2$ . Для определенности будем полагать  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Выше было показано, что большим значениям параметра  $\alpha$  соответствуют и большие значения относительной частоты  $\Omega$ . Из соотношений (30), (31) следует, что это свойство будет справедливо и для волновых чисел

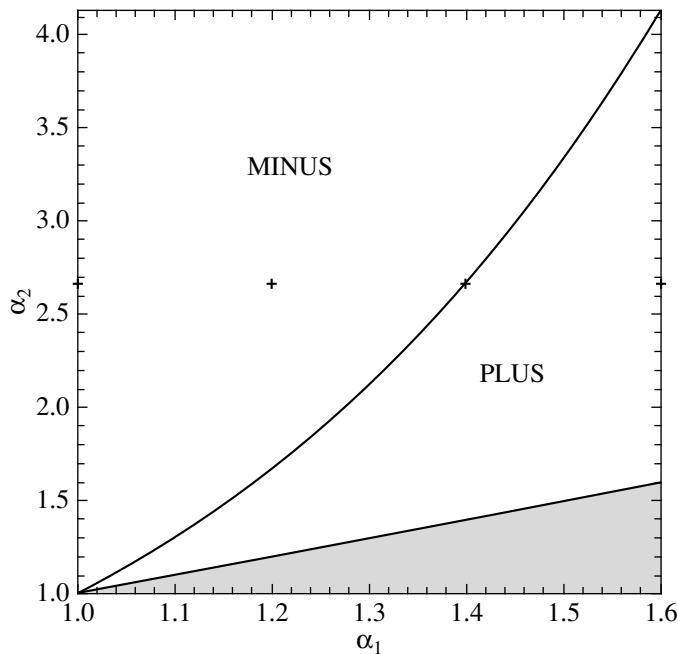
$$k(\alpha_2) > k_n(\alpha_1, \alpha_2) > k_n(\alpha_1), \quad (43)$$

где  $k_n(\alpha_{1,2})$  — волновые числа, соответствующие собственным частотам (19) колебаний симметричных трубок. А это означает, что на половине трубы с меньшим значением  $\alpha_1$  волна короче, чем в ее другой половине. Поэтому максимум амплитуды основной моды будет смещен от начала координат в направлении отрицательных значений аргумента, т.е. в направлении меньших значений магнитного поля. Величину этого смещения можно получить,

приравнивая в (34) аргумент синуса на отрезке  $-L < z < 0$  к  $\frac{\pi}{2}$ . В результате находим

$$\left( \frac{z}{L} \right)_{\max}^{(1)} = \frac{\frac{\tg \varphi_1^{(1)}}{\sqrt{\alpha_1 - 1}} - 1}{1 + \sqrt{\alpha_1 - 1} \tg \varphi_1^{(1)}} \cong \frac{\varphi_1^{(1)} - \arctg \sqrt{\alpha_1 - 1}}{\sqrt{\alpha_1 - 1}}, \quad (44)$$

где  $\varphi_1^{(1)} = \frac{\pi}{2Q_1^{(1)}}$ . Оценки показывают, что для наиболее интересных для наблюдений случаев, когда параметры  $\alpha_{1,2}$  изменяются в пределах от 1 до 4 (т.е. поперечный радиус корональной трубы увеличивается от 1 до 2), величина  $(\frac{z}{L})_{\max}^{(1)} \ll 1$  и точное и приближенное значения (44) практически совпадают. Это хорошо видно на рис. 4, где графики этих функций представлены кривыми *a*, которые сливаются в одну линию. Смещения максимумов по абсолютной величине убывают с уменьшением разности параметров  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  и обращаются в нуль при их равенстве. Определим координаты внутреннего узла и точек экстремумов первой моды. Из неравенств (43) следует, что узловая точка  $(\frac{z}{L})_{knot}^{(2)}$  будет смещена от середины трубы влево. Величину этого смещения можно получить, приравнивая в (34) аргумент синуса на отрезке  $-L < z < 0$  к  $\pi$ . Таким образом, координата внутреннего узла первой моды так же будет определяться формулами (44), в которых  $\varphi_1^{(1)}$  необходимо заменить на



**Рис. 5.** График кривой  $F(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ , где  $\alpha_1, \alpha_2$  — значения, при которых точка минимума амплитуды колебаний первой моды (34) равна  $-0.5z/L$ . Поле MINUS — отрицательные смещения, PLUS — положительные. Знаком “+” отмечены параметры, для которых построены графики рис. 6. Затененная область  $\alpha_1 > \alpha_2$ .

$\varphi_2 = \frac{\pi}{Q_2^{(1)}}$ . На рис. 4 сливающиеся графики этих функций обозначены кривой  $d$ .

Точки экстремумов амплитуды определяются соотношениями, аналогичными выражениям (40):

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{L}\right)_{(\max)}^{(1,2)} &= \pm \frac{\frac{\operatorname{tg} \varphi_2^{(1,2)}}{\sqrt{\alpha_{1,2}-1}} - 1}{1 + \sqrt{\alpha_{1,2}-1} \operatorname{tg} \varphi_2^{(1,2)}} \cong \quad (45) \\ &\cong \pm \frac{1 - \Omega_2^{(1,2)}}{\alpha_{(1,2)} - 1 + \Omega_2^{(1,2)}}, \end{aligned}$$

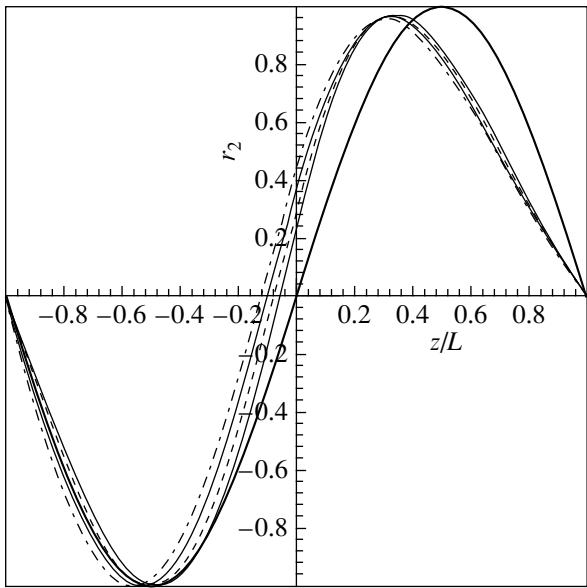
где знак “+” и индекс “1” относятся к левому минимуму, а знак “−” и индекс “2” к правому максимуму и  $\varphi_2^{(1,2)} = \frac{\pi}{2Q_2^{(1,2)}}$ . На величину и направление смещения экстремальных точек амплитуды первой моды оказывают влияние два фактора. Во-первых, вследствие неоднородности магнитного поля экстремумы смещаются к вершине петли. Для симметричной трубы это смещение определяется формулами (21). Во-вторых, асимметрия петли приводит к деформации амплитуды, которая выражается в отклонении обоих экстремумов в направлении более слабого магнитного поля. Таким образом, в половине трубы с более сильным магнитным полем оба фактора действуют в одном направлении, а в той части трубы, где магнитное поле слабее, их действия противоположны. В частности, в половине трубы с более слабым полем при

определенных соотношениях между параметрами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  эти два вида смещений могут полностью компенсировать друг друга. На рис. 5 представлена диаграмма, на которой изображена кривая  $F(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ . Координаты точек, лежащих на этой кривой, соответствуют значениям параметров  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , при которых такая компенсация происходит. С помощью приближенной формулы (45) легко получить достаточно точное (относительная погрешность  $\sim 1\%$ ) выражение для собственной частоты, соответствующей таким значениям параметров. Оно имеет простой вид

$$\Omega_2 \cong \alpha_1 + 1. \quad (46)$$

Поле диаграммы слева от кривой содержит параметры, при которых минимум амплитуды смещается относительно точки  $-0.5z/L$  в отрицательном направлении, а справа — в положительном. При этом частоты в левой части меньше значений (46), а в правой больше. Затененная область диаграммы соответствует величинам, для которых выполняется неравенство  $\alpha_1 > \alpha_2$ .

На рис. 6 изображены амплитуды колебаний первой моды (34) модели петли для значений параметра  $\alpha_1$ , изменяющегося от 1 до 1.6 с шагом 0.2. Для всех кривых (кроме жирной линии) параметр  $\alpha_2 = 2.676$ . Для штрихпунктирной линии  $\alpha_1 = 1$ . Штриховая линия ( $\alpha_1 = 1.4$ ) соответствует амплитуде, минимум которой расположен в точке  $-0.5z/L$ . Для сравнения жирной линией представлена синусоида ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ). На рис. 5 знаком



**Рис. 6.** Амплитуды первой моды (44) для значений параметра  $\alpha_1$  от 1 до 1.6 с шагом 0.2. Для всех кривых (кроме жирной линии) параметр  $\alpha_2 = 2.676$ . Для штрихпунктирной линии  $\alpha_1 = 1$ . Штриховая линия соответствует амплитуде, минимум которой расположен в точке  $(-0.5z/L, 0)$ . Жирная линия-синусоида ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ).

“+” отмечены точки, соответствующие параметрам  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , для которых построены графики амплитуд. Прежде всего отметим, что экстремумы амплитуды первой моды для несимметричной модели имеют различные значения. В той части петли, где магнитное поле меньше, амплитуда больше. Отношение амплитуды в точках экстремумов определяется формулой

$$\left| \frac{r_2[(\frac{z}{L})_{\min}]}{r_2[(\frac{z}{L})_{\max}]} \right| = \left| \frac{\sin [Q_2 (\arctg \sqrt{\alpha_2-1})]}{\sin [Q_1 (\arctg \sqrt{\alpha_1-1})]} \right|. \quad (47)$$

Из рис. 6 также следует, что наибольшее смещение узловой точки и экстремумов происходит для модели петли, в которой в одной из ее половинок магнитное поле не меняется ( $\alpha_1 = 1$ ). Если на всей длине несимметричной трубы магнитное поле переменное, то абсолютная величина смещения внутреннего узла и правого максимума относительно их значений в однородной среде возрастет с увеличением разности магнитных полей у ее оснований. Подобная картина наблюдается и для экстремальной точки в части трубы с более слабым магнитным полем. Только в этом случае смещение отсчитывается не от  $-0.5z/L$ , а от отрицательной величины (21), являющейся координатой минимума в симметричной петле с параметром неоднородности, равным  $\alpha_1$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены преимущественно аналитические исследования собственных изгибных колебаний в симметричных и несимметричных корональных петлях с переменным магнитным полем, заполненных однородной плазмой. В основу положен предложенный авторами метод безотражательного распространения волн, позволяющий приводить при определенных ограничениях волновые уравнения в неоднородных средах к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Для симметричных моделей получен уточненный спектр собственных колебаний, а также найдены простые формулы, определяющие величину и направления смещения экстремумов первой моды относительно их значений для однородной модели.

Исследованы колебания несимметричных арок, опирающихся на области с различными по абсолютной величине магнитными полями. Рассмотрены две модели. В первой предполагается, что в одной половине дуги петли магнитное поле постоянно, а в другой изменяется, уменьшаясь от основания к вершине. Во второй модели на всем протяжении трубы магнитное поле переменное. Для каждого случая получены дисперсионные соотношения, исследована форма амплитуд основной и первой мод. Получены точные и простые приближенные формулы, описывающие смещения характерных точек (экстремумов и узлов) амплитуд колебаний от их значений для однородной модели. Показано, что в несимметричной модели амплитуды колебаний первой моды отличаются по величине, причем амплитуда в части петли с меньшим магнитным полем больше.

Работа выполнена при поддержке грантов Российской фонда фундаментальных исследований (грант № 13-02-00656) и Научного Фонда НИУ ВШЭ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андриес и др. (J. Andries, T. Van Doorsselaere, B. Roberts, G. Verth, E. Verwichte, and R. Erdélyi), *Space Sci. Rev.* **149**, 3 (2009).
2. Ашванден (M.J. Aschwanden), *Physics of the Solar Corona. An Introduction with Problems and Solutions* (Springer, Berlin), 909 (2005).
3. Ашванден и др. (M.J. Aschwanden, L. Fletcher, C.J. Schrijver, and D. Alexander), *Astrophys. J.* **520**, 880 (1999).
4. Ван Доорселяр и др. (T. Van Doorsselaere, E. Verwichte, and J. Terradas), *Space Sci. Rev.* **149**, 299 (2009).
5. Ван Доорселяр и др. (T. Van Doorsselaere, V. Nakariakov, and E. Verwichte), *Astron. Astrophys.* **473**, 959 (2007).
6. Вервихт и др. (E. Verwichte, V.M. Nakariakov, L. Ofman, and E.E. Deluca), *Solar Phys.* **223**, 77 (2004).

7. Верт (G. Verth), *Astron. Nachr.* **328**, 764 (2007).
8. Верт, Эрдели (G. Verth and R. Erdelyi), *Astron. Astrophys.* **486**, 1015 (2008).
9. Де Мортел, Накаряков (I. De Moortel and V.M. Nakariakov), *Phil. Trans. R. Soc. A* **370**, 3193 (2012).
10. Де Понтье и др. (B. De Pontieu, S.W. McIntosh, M. Carlsson, V.H. Hansteen, T.D. Tarbell, C.J. Schrijver, A.M. Title, R.A. Shine, et al.), *Science* **318**, 1574 (2007).
11. Дымова, Рудерман (M.V. Dymova and M.S. Ruderman), *Astron. Astrophys.* **457**, 1059 (2006).
12. Накаряков и др. (V. Nakariakov, L. Ofman, E.E. DeLuca, B. Roberts, and J.M. Davila), *Science* **285**, 862 (1999).
13. Окамото и др. (T.J. Okamoto, S. Tsuneta, T.E. Berge, et al.), *Science* **318**, 1577 (2007).
14. О Ши и др. (E. O'Shea, A.K. Srivastava, J.G. Doyle, and D. Banerjee), *Astron. Astrophys.* **473**, 13 (2007).
15. Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н., Бацына Е.К., Письма в ЖЭТФ **93**, 625 (2011).
16. Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г., Изв РАН, Физика атмосферы и океана **48**, 189 (2012a).
17. Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н., Бацына Е.К., Письма в Астрон. журн. **38**, 439 (2012б) [Petrukhin et al., *Astron. Lett.* **38**, 388 (2012)].
18. Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н., Бацына Е.К., Геомагнетизм и Аэрономия **52**, 854 (2012в).
19. Рудерман и др. (M. Ruderman, S.G. Verth, and R. Erdelyi), *Astrophys J.* **686**, 684 (2008).
20. Рудерман и др. (M. S. Ruderman and R. Erdelyi), *Space Sci. Rev.* **149**, 199 (2009).
21. Рудерман и др. (M.S. Ruderman, E. Pelinovsky, N.S. Petrukhin, and T. Talipova), *Solar Phys.* **286**, 417 (2013).
22. Спрут (H.C. Spruit), *Astron. Astrophys.* **98**, 155 (1981).
23. Степанов А.В., Зайцев В.В., Накаряков В.М., Успехи физ. наук **182**, 999 (2012).
24. Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Петрухин Н.С., Океанология **49**, 622 (2009).