

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.С. Шведов

**К АНАЛИЗУ НЕЧЕТКО-СЛУЧАЙНЫХ
ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

Препринт WP2/2015/01

Серия WP2

Количественный анализ в экономике

Москва
2015

УДК 519.246
ББК 22.172
ШЗ4

Редактор серии WP2
«Количественный анализ в экономике»
В.А. Бессонов

ШЗ4 **Шведов, А. С.** К анализу нечетко-случайных временных рядов [Текст] : препринт WP2/2015/01 / А. С. Шведов ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2015. – (Серия WP2 «Количественный анализ в экономике»). – 28 с. – 65 экз.

Определение нечетко-случайной величины из работы Шведов (2013) применяется для анализа нечетких временных рядов. Рассматриваются авторегрессионные модели с нечеткими данными. Модифицируется определение ковариации нечетко-случайных величин из работы Шведов (2013).

УДК 519.246
ББК 22.172

Классификация JEL: C22

Ключевые слова: нечетко-случайная величина; авторегрессионная модель.

**Препринты Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» размещаются по адресу: <http://www.hse.ru/org/hse/wp>**

© Шведов А. С., 2015
© Оформление. Издательский дом
Высшей школы экономики, 2015

1. Введение

В классическом анализе временных рядов каждому моменту времени ставится в соответствие действительное число. Этот набор наблюдений и составляет временной ряд. Если каждому моменту времени ставится в соответствие нечеткое число, то временной ряд называется нечетким.

Основную роль в классическом анализе временных рядов играет вероятностная модель, каждому наблюдению сопоставляется случайная величина, по имеющемуся набору наблюдений устанавливаются свойства этих случайных величин и характер взаимосвязи между ними. Вероятностные модели временных рядов имеют большое практическое значение и в экономике, и в технике.

В последние два десятилетия началось изучение и применение нечетких временных рядов. При этом существуют два различных подхода к построению моделей для таких временных рядов.

Первый подход – это прямое обобщение методов классического анализа временных рядов. Каждому наблюдению, нечеткому числу, сопоставляется нечетко-случайная величина. Такой подход представлен, например, в [2], [4]. Правда, на сегодняшний день нечетко-случайные аналоги построены лишь для ограниченного числа вероятностных моделей временных рядов. Основное внимание уделяется линейным моделям.

Второй подход основан на принципиально других идеях, чем классический анализ временных рядов, используется понятие нечеткого отношения. Аппарат теории вероятностей может не применяться вообще. Этот подход к анализу нечетких временных рядов представлен, например, в [3].

Настоящая работа относится к первому из двух названных подходов. Используется определение нечетко-случайной величины из работы [1], и при этом применяемые для анализа нечетких временных рядов конструкции оказываются значительно более простыми, чем в работах [2], [4].

Обсуждение того, как связано определение нечетко-случайной величины из работы [1] с другими существующими определениями нечетко-случайных величин, приводится в [1].

Первый параграф настоящей работы – это развитие работы [1]. Дается новое определение ковариации нечетко-случайных величин. При этом определении оказывается, что для любых нечетко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ и для любых действительных чисел λ и μ выполняется равенство $Cov(\lambda \tilde{X}, \mu \tilde{Y}) = \lambda \mu Cov(\tilde{X}, \tilde{Y})$, а не только для случая, когда λ и μ не имеют противоположные знаки, как это было в [1]. Также ковариация независимых нечетко-случайных величин при этом определении равняется нулю. Во втором параграфе рассматриваются нечетко-случайные модели для нечетких временных рядов.

1. Нечетко-случайные величины и их моменты

Определения, приводимые в этом параграфе, частично совпадают с определениями из работы [1]. Однако имеются и отличия. Кроме того, используются другие обозначения, более удобные для применения в анализе временных рядов.

Координаты в пространстве $\mathbb{R}^2$ будем обозначать (ξ, η) .

Определение 1. Множество $\tilde{z} \subseteq \mathbb{R}^2$ называется *нечетким числом*, если выполнены следующие условия. При $\eta_1 \notin [0, 1]$ пересечение множества $\tilde{z}$ с прямой $\eta = \eta_1$ пусто. При $\eta_1 \in [0, 1]$ пересечение множества $\tilde{z}$ с прямой $\eta = \eta_1$ имеет вид

$$\{(\xi, \eta) : z^L(\eta_1) \leq \xi \leq z^R(\eta_1), \eta = \eta_1\},$$

где z^L – монотонно неубывающая непрерывная слева функция аргумента η , z^R – монотонно невозрастающая непрерывная слева функция аргумента η .

В работе [1, стр. 8] показано, что так определенное множество $\tilde{z}$ является замкнутым. Следовательно, поскольку это множество ограничено, оно является и компактным.

Определение 2. Функции $z^L(\eta)$ и $z^R(\eta)$, $0 \leq \eta \leq 1$, называются, соответственно, *левым индексом* и *правым индексом* нечеткого числа $\tilde{z}$.

Пусть $\tilde{u}$ – нечеткое число с левым индексом $u^L(\eta)$ и с правым индексом $u^R(\eta)$.

Определение 3. Суммой нечеткого числа $\tilde{z}$ и нечеткого числа $\tilde{u}$ называется нечеткое число с левым индексом $z^L(\eta) + u^L(\eta)$ и с правым индексом $z^R(\eta) + u^R(\eta)$. Обозначается это нечеткое число $\tilde{z} + \tilde{u}$.

Определение 4. Произведением действительного числа λ и нечеткого числа $\tilde{z}$ называется при $\lambda \geq 0$ нечеткое число

с левым индексом $\lambda z^L(\eta)$ и с правым индексом $\lambda z^R(\eta)$ и при $\lambda < 0$ – нечеткое число с левым индексом $\lambda z^R(\eta)$ и с правым индексом $\lambda z^L(\eta)$. Обозначается это нечеткое число $\lambda \tilde{z}$.

Очевидно, что для любых действительных чисел λ и μ и для любых нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$

$$(\lambda \mu) \tilde{z} = \lambda (\mu \tilde{z}), \quad \lambda (\tilde{z} + \tilde{u}) = \lambda \tilde{z} + \lambda \tilde{u}.$$

Если действительные числа λ и μ не имеют противоположные знаки, то для любого нечеткого числа $\tilde{z}$

$$(\lambda + \mu) \tilde{z} = \lambda \tilde{z} + \mu \tilde{z}.$$

Определение 5. *Средним значением* нечеткого числа $\tilde{z}$ называется число

$$\int_0^1 \frac{z^L(\eta) + z^R(\eta)}{2} d\eta.$$

Очевидно, что среднее значение суммы нечетких чисел равно сумме средних значений. Среднее значение произведения действительного числа λ и нечеткого числа $\tilde{z}$ равно произведению λ и среднего значения $\tilde{z}$.

Определение 6. *Скалярным произведением* нечеткого числа $\tilde{z}$ и нечеткого числа $\tilde{u}$ называется число

$$\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle = \int_0^1 \frac{z^L(\eta) + z^R(\eta)}{2} \cdot \frac{u^L(\eta) + u^R(\eta)}{2} d\eta.$$

Нетрудно увидеть, что для любых нечетких чисел $\tilde{z}$, $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ и для любых действительных чисел λ и μ

$$\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{u}, \tilde{z} \rangle,$$

$$\begin{aligned}\langle \tilde{z} + \tilde{v}, \tilde{u} \rangle &= \langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle + \langle \tilde{v}, \tilde{u} \rangle, \\ \langle \lambda \tilde{z}, \mu \tilde{u} \rangle &= \lambda \mu \langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle.\end{aligned}$$

В случае, если у каждого нечеткого числа левый индекс совпадает с правым индексом (а это возможно лишь тогда, когда каждый индекс как функция аргумента η является константой), все определенные выше операции над нечеткими числами совпадают с операциями над обычными действительными числами. В частности, можно складывать нечеткие числа и действительные числа, если рассматривать действительные числа как нечеткие числа с совпадающими индексами.

Пусть $\mathcal{K}$ – множество, элементами которого являются компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{K}$ является метрическим пространством относительно расстояния Хаусдорфа. То, что $\mathcal{K}$ является метрическим пространством, позволяет говорить об измеримых отображениях

$$\Omega \rightarrow \mathcal{K},$$

где (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство. (Подробнее см. [1, стр. 5 – 7].)

Определение 7. *Нечетко-случайной величиной* называется измеримое отображение

$$\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{K},$$

если при любом $\omega \in \Omega$ множество $\tilde{X}(\omega)$ – нечеткое число.

Из этого определения следует, что при любом $\omega \in \Omega$ и при любом $\eta_1 \in [0, 1]$ пересечение множества $\tilde{X}(\omega)$ с прямой $\eta = \eta_1$ имеет вид

$$\{(\xi, \eta) : X^L(\omega, \eta_1) \leq \xi \leq X^R(\omega, \eta_1), \eta = \eta_1\}.$$

При фиксированном $\omega \in \Omega$ функции $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$ как функции аргумента η непрерывны слева, и при

$$0 \leq \eta_1 < \eta_2 \leq 1$$

выполняются неравенства

$$X^L(\omega, \eta_1) \leq X^L(\omega, \eta_2) \leq X^R(\omega, \eta_2) \leq X^R(\omega, \eta_1).$$

Определение 8. Функции $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$ называются, соответственно, *левым индексом* и *правым индексом* нечетко-случайной величины $\tilde{X}$.

В работе [1, стр. 9, 10] доказано, что при фиксированном $\eta \in [0, 1]$ функции $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$ как функции аргумента ω являются измеримыми.

Наложим требование, чтобы функции $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$ были ограничены по абсолютной величине некоторой константой.

Рассмотрим функции

$$x^L(\eta) = \int_{\Omega} X^L(\omega, \eta) dP, \quad x^R(\eta) = \int_{\Omega} X^R(\omega, \eta) dP. \quad (1)$$

Нетрудно увидеть, что функции $x^L(\eta)$ и $x^R(\eta)$ непрерывные слева; функция $x^L(\eta)$ монотонно неубывающая и функция $x^R(\eta)$ монотонно невозрастающая; $x^L(1) \leq x^R(1)$. Поэтому функции $x^L(\eta)$ и $x^R(\eta)$ являются, соответственно, левым индексом и правым индексом некоторого нечеткого числа $\tilde{x}$. (Дополнительные пояснения см. в [1, стр. 11].)

Определение 9. Нечеткое число $\tilde{x}$ с левым индексом $x^L(\eta)$ и с правым индексом $x^R(\eta)$, определенными по формулам (1), называется *нечетким ожиданием* нечетко-случайной величины $\tilde{X}$.

Определение 10. *Ожиданием* нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ называется среднее значение нечеткого ожидания этой нечетко-случайной величины.

Для ожидания нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ будем использовать обозначение $E(\tilde{X})$. Таким образом,

$$E(\tilde{X}) = \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta)}{2} dP d\eta.$$

Для нечетко-случайной величины $\tilde{Y}$ обозначения $Y^L(\omega, \eta)$, $Y^R(\omega, \eta)$, $y^L(\eta)$, $y^R(\eta)$, $\tilde{y}$ имеют тот же смысл, что и обозначения $X^L(\omega, \eta)$, $X^R(\omega, \eta)$, $x^L(\eta)$, $x^R(\eta)$, $\tilde{x}$ для нечетко-случайной величины $\tilde{X}$.

Определение 11. Скалярным произведением нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ и нечетко-случайной величины $\tilde{Y}$ называется число

$$\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta)}{2} \cdot \frac{Y^L(\omega, \eta) + Y^R(\omega, \eta)}{2} dP d\eta.$$

Используя тот же прием, что и в [1, стр. 12, 13], можно показать, что в последней формуле внутренний интеграл, как функция аргумента η , имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, эта функция является измеримой на отрезке $[0, 1]$.

Определение 12. Ковариацией нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ и нечетко-случайной величины $\tilde{Y}$ называется число

$$Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \int_0^1 \int_{\Omega} \left(\frac{X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta)}{2} - \frac{x^L(\eta) + x^R(\eta)}{2} \right) \cdot \left(\frac{Y^L(\omega, \eta) + Y^R(\omega, \eta)}{2} - \frac{y^L(\eta) + y^R(\eta)}{2} \right) dP d\eta.$$

Нетрудно увидеть, что

$$Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle - \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle. \quad (2)$$

Соотношение (2) является аналогом хорошо известного выражения для ковариации случайных величин X и Y

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Определение 13. *Дисперсией* нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ называется число

$$Var(\tilde{X}) = Cov(\tilde{X}, \tilde{X}).$$

Для любой нечетко-случайной величины $\tilde{X}$

$$Var(\tilde{X}) \geq 0.$$

Из ограниченности индексов следует существование ожиданий, дисперсий и ковариаций для любых нечетко-случайных величин.

Из определения скалярного произведения следует, что для независимых нечетко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$

$$\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle.$$

(Определение независимости нечетко-случайных величин см. в [1, стр. 14, 15].) Действительно, для независимых нечетко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle &= \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta)}{2} dP. \\ &\cdot \int_{\Omega} \frac{Y^L(\omega, \eta) + Y^R(\omega, \eta)}{2} dP d\eta = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^L(\eta) + x^R(\eta)}{2} \cdot \frac{y^L(\eta) + y^R(\eta)}{2} d\eta = \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle.$$

Определение 14. Суммой нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ и нечетко-случайной величины $\tilde{Y}$ называется нечетко-случайная величина с левым индексом $X^L(\omega, \eta) + Y^L(\omega, \eta)$ и с правым индексом $X^R(\omega, \eta) + Y^R(\omega, \eta)$. Обозначается эта нечетко-случайная величина $\tilde{X} + \tilde{Y}$.

В частности, из последнего определения следует, что сумма нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ и случайной величины Z – это нечетко-случайная величина с индексами

$$X^L(\omega, \eta) + Z(\omega), X^R(\omega, \eta) + Z(\omega).$$

Определение 15. Произведением действительного числа λ и нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ называется при $\lambda \geq 0$ нечетко-случайная величина с левым индексом $\lambda X^L(\omega, \eta)$ и с правым индексом $\lambda X^R(\omega, \eta)$ и при $\lambda < 0$ – нечетко-случайная величина с левым индексом $\lambda X^R(\omega, \eta)$ и с правым индексом $\lambda X^L(\omega, \eta)$. Обозначается это нечетко-случайная величина $\lambda \tilde{X}$.

Из определения ожидания нечетко-случайной величины следует, что для любых нечетко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ и для любого действительного числа λ

$$E(\tilde{X} + \tilde{Y}) = E(\tilde{X}) + E(\tilde{Y}), \quad E(\lambda \tilde{X}) = \lambda E(\tilde{X}).$$

Из определения скалярного произведения нечетко-случайных величин следует, что для любых нечетко-случайных величин $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ для любых действительных чисел λ, μ

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle &= \langle \tilde{Y}, \tilde{X} \rangle, \\ \langle \tilde{X} + \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle &= \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle + \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle, \end{aligned}$$

$$\langle \lambda \tilde{X}, \mu \tilde{Y} \rangle = \lambda \mu \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle.$$

С учетом формулы (2) и свойств скалярных произведений нечетко-случайных величин и скалярных произведений нечетких чисел также следует, что

$$Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = Cov(\tilde{Y}, \tilde{X}),$$

$$Cov(\tilde{X} + \tilde{Y}, \tilde{Z}) = Cov(\tilde{X}, \tilde{Z}) + Cov(\tilde{Y}, \tilde{Z}),$$

$$Cov(\lambda \tilde{X}, \mu \tilde{Y}) = \lambda \mu Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

$$Var(\tilde{X} + \tilde{Y}) = Var(\tilde{X}) + Var(\tilde{Y}) + 2Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

$$Var(\lambda \tilde{X}) = \lambda^2 Var(\tilde{X}).$$

Покажем, что имеет место неравенство Коши – Буняковского, то есть для любых нечетко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$

$$|Cov(\tilde{X}, \tilde{Y})| \leq (Var(\tilde{X}))^{1/2} (Var(\tilde{Y}))^{1/2}.$$

При любом действительном λ

$$0 \leq Var(\tilde{X} + \lambda \tilde{Y}) = Var(\tilde{X}) + 2\lambda Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \lambda^2 Var(\tilde{Y}).$$

Если $Var(\tilde{Y}) > 0$, то минимальное значение правой части достигается при

$$\lambda = -\frac{Cov(\tilde{X}, \tilde{Y})}{Var(\tilde{Y})}.$$

Рассматривая неравенство при этом λ , получаем

$$0 \leq Var(\tilde{X}) - \frac{Cov(\tilde{X}, \tilde{Y})^2}{Var(\tilde{Y})}$$

или

$$Cov(\tilde{X}, \tilde{Y})^2 \leq Var(\tilde{X}) Var(\tilde{Y}).$$

Из определения ковариации нечетко-случайных величин следует, что если $Var(\tilde{Y}) = 0$, то $Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$. Неравенство Коши – Буняковского доказано.

Заметим, что соотношение $\langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle = 0$ выполняется не только для нечетко-случайной величины $\tilde{X}$, у которой оба индекса – нулевые функции. Например, это соотношение имеет место при $X^L(\omega, \eta) \equiv -1$, $X^R(\omega, \eta) \equiv 1$.

Пусть $\tilde{u}$ – нечеткое число, Z – случайная величина такая, что $Z(\omega)$ – ограниченная функция на множестве Ω .

Теорема 1. Для нечетко-случайной величины $\tilde{X} = \tilde{u} + Z$

$$E(\tilde{X}) = u + E(Z), \quad Var(\tilde{X}) = Var(Z),$$

где u – среднее значение нечеткого числа $\tilde{u}$.

Доказательство. Индексы нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ имеют вид

$$X^L(\omega, \eta) = u^L(\eta) + Z(\omega), \quad X^R(\omega, \eta) = u^R(\eta) + Z(\omega),$$

откуда

$$\frac{X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta)}{2} = \frac{u^L(\eta) + u^R(\eta)}{2} + Z(\omega).$$

Поэтому

$$E(\tilde{X}) = \int_0^1 \int_{\Omega} \left(\frac{u^L(\eta) + u^R(\eta)}{2} + Z(\omega) \right) dP d\eta =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{u^L(\eta) + u^R(\eta)}{2} + E(Z) \right) d\eta = u + E(Z).$$

Из (1) следует, что

$$\frac{x^L(\eta) + x^R(\eta)}{2} = \frac{u^L(\eta) + u^R(\eta)}{2} + E(Z).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} Var(\tilde{X}) &= \int_0^1 \int_{\Omega} \left(\frac{X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^L(\eta) + x^R(\eta)}{2} \right)^2 dP d\eta = \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega} (Z(\omega) - E(Z))^2 dP d\eta = \int_0^1 Var(Z) d\eta = Var(Z). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Пусть $\tilde{u}$ – нечеткое число, Z – случайная величина такая, что $Z(\omega)$ – неотрицательная ограниченная функция на множестве Ω . Под нечетко-случайной величиной $Z\tilde{u}$ будем понимать нечетко-случайную величину с индексами

$$X^L(\omega, \eta) = Z(\omega)u^L(\eta), \quad X^R(\omega, \eta) = Z(\omega)u^R(\eta).$$

Теорема 2. Для нечетко-случайной величины $\tilde{X} = Z\tilde{u}$

$$E(\tilde{X}) = uE(Z), \quad Var(\tilde{X}) = \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle Var(Z),$$

где u – среднее значение нечеткого числа $\tilde{u}$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta)}{2} = Z(\omega) \frac{u^L(\eta) + u^R(\eta)}{2}.$$

Поэтому

$$E(\tilde{X}) = \int_0^1 \int_{\Omega} \left(Z(\omega) \frac{u^L(\eta) + u^R(\eta)}{2} \right) dP d\eta = uE(Z).$$

Из (1) следует, что

$$\frac{x^L(\eta) + x^R(\eta)}{2} = E(Z) \frac{u^L(\eta) + u^R(\eta)}{2}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} Var(\tilde{X}) &= \int_0^1 \int_{\Omega} \left(\frac{X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^L(\eta) + x^R(\eta)}{2} \right)^2 dP d\eta = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{u^L(\eta) + u^R(\eta)}{2} \right)^2 \int_{\Omega} (Z(\omega) - E(Z))^2 dP d\eta = \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle Var(Z). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

2. Линейные нечетко-случайные модели для нечетких временных рядов

Определение 16. *Нечетким временным рядом* называется набор нечетких чисел $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_T$.

Определение 17. *Нечетко-случайным процессом* называется набор нечетко-случайных величин $\{\tilde{X}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$.

В качестве множества $\mathbb{T}$ может рассматриваться множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, множество $\{1, \dots, T\}$.

В классическом анализе временных рядов принято называть временным рядом не только набор наблюдений, но и набор случайных величин, служащий вероятностной моделью для этого набора наблюдений, то есть случайный процесс. В настоящей работе также будем называть нечетко-случайный процесс нечетко-случайным временным рядом.

Определение 18. Нечетко-случайный временной ряд $\{\tilde{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ называется *стационарным*, если существуют действительное число μ и функция $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$E(\tilde{X}_t) = \mu \quad \text{для любого } t \in \mathbb{Z},$$

$$Cov(\tilde{X}_{t+h}, \tilde{X}_t) = \gamma(h) \quad \text{для любых } t, h \in \mathbb{Z}.$$

Из приведенного определения нетрудно увидеть, что функция γ обязана быть четной, то есть должно выполняться условие

$$\gamma(h) = \gamma(-h) \quad \text{для любого } h \in \mathbb{N}.$$

Определение 19. Функция γ называется *автоковариационной функцией* стационарного нечетко-случайного временного ряда $\{\tilde{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Из неравенства Коши – Буняковского следует, что

$$|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \quad \text{для любого } h \in \mathbb{Z}.$$

Определение 20. Автокорреляционной функцией стационарного нечетко-случайного временного ряда $\{\tilde{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ называется функция $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая соотношением

$$\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0) \quad \text{при } h \in \mathbb{Z}.$$

Определение 21. Частной автокорреляционной функцией стационарного нечетко-случайного временного ряда $\{\tilde{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ называется функция $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемая соотношением

$$a(n) = a_{nn} \quad \text{при } n \in \mathbb{N},$$

где число a_{nn} определяется из системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(n-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) & \dots & \rho(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(n-1) & \rho(n-2) & \rho(n-3) & \dots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(n) \end{pmatrix}.$$

Определение 22. Нечетко-случайный процесс $\{\tilde{W}_t\}$ называется нечетко-случайным белым шумом, если все нечетко случайные величины $\tilde{W}_t$ независимы, имеют нулевое ожидание и одинаковую дисперсию.

Нечетко-случайный белый шум – это стационарный нечетко-случайный процесс с автоковариационной функцией

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{при } h = 0 \\ 0 & \text{при } h \neq 0 \end{cases}$$

поскольку ковариация независимых нечетко-случайных величин равна 0.

В классическом анализе временных рядов рассматривается модель авторегрессии

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + W_t, \quad (3)$$

где X_t – случайные величины, W_t – процесс белого шума, $a_1, \dots, a_p$ – действительные числа, $a_p \neq 0$. Кроме того, накладывается условие, что все корни многочлена

$$1 - a_1 z - \dots - a_p z^p \quad (4)$$

лежат строго вне единичного круга.

При этих условиях устанавливается, что для процесса авторегрессии имеет место представление

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j W_{t-j}. \quad (5)$$

Из формулы (3) нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_j &= \sum_{i=1}^j a_i c_{j-i} \quad \text{при } 1 \leq j \leq p, \\ c_j &= \sum_{i=1}^p a_i c_{j-i} \quad \text{при } j > p. \end{aligned} \quad (6)$$

Последнее из уравнений (6) является однородным разностным уравнением порядка p для величин c_j . Поскольку все корни многочлена (4) лежат строго вне единичного круга, $c_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ со скоростью геометрической прогрессии.

Переходя к нечетко-случайным моделям авторегрессии, ограничимся рассмотрением случая

$$a_1 \geq 0, \dots, a_p \geq 0.$$

Тогда из (6) следует, что $c_j \geq 0$ при любом j .

Зафиксируем $m \in \mathbb{Z}$ и при $t \geq m - p$ рассмотрим нечетко-случайные величины

$$\tilde{X}_t = \sum_{i=0}^{t-m+p} c_i \tilde{W}_{t-i}, \quad (7)$$

где числа $c_0, c_1, \dots, c_{t-m+p}$ определяются из (6); $\tilde{W}_t$ – нечетко-случайный белый шум.

Пользуясь тем, что для неотрицательных λ и μ имеет место $(\lambda + \mu)\tilde{W}_{t-i} = \lambda \tilde{W}_{t-i} + \mu \tilde{W}_{t-i}$, нетрудно увидеть, что при $t \geq m$

$$\tilde{X}_t = a_1 \tilde{X}_{t-1} + \dots + a_p \tilde{X}_{t-p} + \tilde{W}_t. \quad (8)$$

Нечетко-случайные величины $\tilde{X}_{m-1}, \dots, \tilde{X}_{m-p}$, определенные по формуле (7), являются начальными значениями для нечетко-случайного процесса (8). При $m \rightarrow -\infty$ формула (7) является аналогом формулы (5).

Определение 23. Нечетко-случайный процесс $\{\tilde{X}_t\}$, задаваемый уравнениями (6), (7), (8), называется *нечетко-случайным процессом авторегрессии* порядка p . При этом считается, что все корни многочлена (4) лежат строго вне единичного круга.

Из формулы (7) очевидно, что ожидания всех нечетко-случайных величин $\tilde{X}_t$ равны 0. Кроме того, из (7) следует, что при $t \geq m - p$, $h \geq 0$

$$Cov\left(\tilde{X}_t, \tilde{X}_{t+h}\right) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{t-m+p} c_i c_{i+h}.$$

Будем считать t настолько большим по абсолютной величине отрицательным числом, что при $t \geq -p$ можно использовать приближенную формулу

$$Cov\left(\tilde{X}_t, \tilde{X}_{t+h}\right) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} c_i c_{i+h}.$$

Правую часть последней формулы обозначим через $\gamma(h)$.

Рассматривая при $t \geq 0$ ковариации левой и правой частей (8) с $\tilde{X}_{t-1}, \dots, \tilde{X}_{t-p}$, получаем p уравнений

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= a_1 \gamma(0) + \dots + a_p \gamma(p-1) \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ \gamma(p) &= a_1 \gamma(p-1) + \dots + a_p \gamma(0), \end{aligned} \tag{9}$$

совпадающие с уравнениями Юла – Уокера в классическом анализе временных рядов.

При $t \geq 0$ можно также рассмотреть ковариации левой и правой частей (8) с $\tilde{X}_t$, что дает

$$\gamma(0) = a_1 \gamma(1) + \dots + a_p \gamma(p) + \sigma^2. \quad (10)$$

Определение 24. Выборочной автоковариационной функцией нечеткого временного ряда $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_T$ называется функция

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} \int_0^1 \left(\frac{x_{t+h}^L(\eta) + x_{t+h}^R(\eta)}{2} - \bar{x}(\eta) \right).$$

$$\cdot \left(\frac{x_t^L(\eta) + x_t^R(\eta)}{2} - \bar{x}(\eta) \right) d\eta, \quad 0 \leq h < T,$$

где

$$\bar{x}(\eta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{x_t^L(\eta) + x_t^R(\eta)}{2}.$$

Определение 25. Выборочной автокорреляционной функцией нечеткого временного ряда $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_T$ называется функция

$$\hat{\rho}(h) = \hat{\gamma}(h)/\hat{\gamma}(0), \quad 0 \leq h < T.$$

Определение 26. Выборочной частной автокорреляционной функцией нечеткого временного ряда $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_T$ называется функция

$$\hat{a}(h), \quad 0 \leq h < T,$$

где $\hat{a}(h)$ определяется по выборочным автокорреляциям $\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(h)$ тем же способом, которым $a(h)$ определяется по автокорреляциям $\rho(1), \dots, \rho(h)$.

Заменяя в уравнениях (9) и (10) автоковариации на выборочные автоковариации, получаем уравнения для нахождения $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(1) &= \hat{a}_1 \hat{\gamma}(0) + \dots + \hat{a}_p \hat{\gamma}(p-1) \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \hat{\gamma}(p) &= \hat{a}_1 \hat{\gamma}(p-1) + \dots + \hat{a}_p \hat{\gamma}(0) \end{aligned}$$

и уравнение для нахождения $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\gamma}(0) = \hat{a}_1 \hat{\gamma}(1) + \dots + \hat{a}_p \hat{\gamma}(p) + \hat{\sigma}^2.$$

$\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p, \hat{\sigma}^2$ являются оценками, построенными методом моментов. Однако приведенное выше построение оценок является формальным, вопрос о свойствах этих оценок остается неизученным.

Из формулы (7) следует, что при $h > 0$

$$\tilde{X}_{t+h} = \sum_{i=0}^{h-1} c_i \tilde{W}_{t+h-i} + \sum_{i=h}^{t-m+p} c_i \tilde{W}_{t+h-i}.$$

Чтобы получить прогноз $\tilde{X}_{t,h}$ на h шагов вперед, сделанный в момент времени t , в первой сумме из правой части можно заменить $\tilde{W}_{t+h-i}$ нулями. Тогда

$$\tilde{X}_{t,h} = \sum_{i=h}^{t-m+p} c_i \tilde{W}_{t+h-i}.$$

Для ошибки прогнозирования по аналогии с классическим анализом временных рядов можно использовать выражение

$$\tilde{Z}_{t,h} = \sum_{i=0}^{h-1} c_i \tilde{W}_{t+h-i}. \quad (11)$$

Из свойств ожидания и дисперсии нечетко-случайных величин следует, что ожидание ошибки прогнозирования равно 0, и

$$Var(\tilde{Z}_{t,h}) = \sigma^2 (1 + c_1^2 + \dots + c_{h-1}^2).$$

Формула (11) позволяет также получать ковариации ошибок прогнозов на h шагов вперед, сделанных в моменты времени $t-j$ и t

$$Cov(\tilde{Z}_{t-j,h}, \tilde{Z}_{t,h}) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=0}^{h-j-1} c_i c_{i+j} & \text{при } 0 \leq j < h \\ 0 & \text{при } j \geq h \end{cases}$$

Можно рассмотреть нечетко-случайные процессы авторегрессии – скользящего среднего

$$\tilde{X}_t = a_1 \tilde{X}_{t-1} + \dots + a_p \tilde{X}_{t-p} + \tilde{W}_t + b_1 \tilde{W}_{t-1} + \dots + b_q \tilde{W}_{t-q}.$$

Ограничимся случаем

$$a_1 \geq 0, \dots, a_p \geq 0, \quad b_1 \geq 0, \dots, b_q \geq 0.$$

Пусть $r = \max(p, q)$, $a_{p+1} = \dots = a_r = 0$ при $p < r$, $b_{q+1} = \dots = b_r = 0$ при $q < r$. По аналогии с формулой (7) для этого процесса можно использовать представление

$$\tilde{X}_t = \sum_{i=0}^{t-m+r} c_i \tilde{W}_{t-i}, \quad (12)$$

где

$$c_0 = 1,$$

$$c_j = \sum_{i=1}^j a_i c_{j-i} + b_j \quad \text{при } 1 \leq j \leq r,$$

$$c_j = \sum_{i=1}^r a_i c_{j-i} \quad \text{при } j > r.$$

Формула (12) может быть применена для построения прогнозов так же, как формула (7).

Если нечетко-случайные процессы $\tilde{X}_t$ и $\tilde{Y}_t$ связаны соотношением

$$\tilde{Y}_t = \tilde{X}_t + \tilde{u} \quad \text{для любого } t \in \mathbb{T},$$

где $\tilde{u}$ – ненулевое нечеткое число, и $\tilde{X}_t$ является нечетко-случайным процессом авторегрессии – скользящего среднего, то $\tilde{Y}_t$ – это нечетко-случайный процесс авторегрессии – скользящего среднего с ненулевым ожиданием.

Библиографический список

1. Шведов А.С. О нечетко-случайных величинах. Препринт WP2/2013/02. М.: НИУ ВШЭ, 2013.
2. Möller B., Reuter U. Uncertainty forecasting in engineering. Berlin: Springer, 2007.
3. Nguyen H.T., Wu B. Fundamentals of statistics with fuzzy data. Berlin: Springer, 2006.
4. Viertl R. Statistical methods for fuzzy data. Chichester: Wiley, 2011.

Shvedov, A. S. On fuzzy random time series models [Text] : Working paper WP2/2015/01 / A. S. Shvedov ; National Research University Higher School of Economics. – Moscow : Higher School of Economics Publ. House, 2015. – (Series WP2 “Quantitative Analysis of Russian Economy”). –28 p. (in Russian). – 65 copies.

The definition of fuzzy random variable from the paper Shvedov (2013) is applied to fuzzy time series analysis. Autoregression models with fuzzy data are considered. The definition of covariance of fuzzy random variables from the paper Shvedov (2013) is modified.

JEL Classification: C22

Key phrases: fuzzy random variable; autoregression model.

Препринт WP2/2015/01

Серия WP2

Количественный анализ в экономике

Шведов Алексей Сергеевич

К анализу нечетко-случайных временных рядов

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» с представленного оригинал-макета

Формат 60×84 $\frac{1}{16}$, Тираж 65 экз. Уч.-изд. л. 1,6

Усл. печ. л. 1,6. Заказ № . Изд. № 1913

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

