Глава 6. Рост в постиндустриальной экономике

В результате изучения главы студент должен:

знать понятийный аппарат современной теории экономического роста; методологические принципы построения динамических моделей в постиндустриальной экономике; особенности и отличительные признаки этих моделей; различные подходы к моделированию факторов эффективности труда, человеческого капитала, объема знаний, производственного опыта и инноваций;

уметь ориентироваться в современных теориях экономического роста; классифицировать и идентифицировать модели роста в постиндустриальной экономике; использовать математические методы при выявлении количественных взаимосвязей между экзогенными и эндогенными показателями в моделях роста; анализировать и интерпретировать эти взаимосвязи; решать задачи, связанные с расчетом темпа роста и оценкой относительной значимости факторов роста;

владеть методами моделирования динамических процессов в постиндустриальной экономике; методами построения производственных функций, учитывающих факторы эффективности труда, образования, знаний, опыта и инноваций; навыками трансформации исходных предположений модели в количественные соотношения между ее параметрами; навыками расчета количественных характеристик стационарного роста.

6.1. Модели роста с эффективным трудом

6.1.1. Модель Солоу с эффективным трудом

Эффективный (полезный) труд (LE) – отдача от физического объема труда, равная произведению коэффициента эффективности труда $(E \geq 1)$ и продолжительности оплаченного труда (L). Для неквалифицированного ручного труда эффективность равна единице, и эффективный труд сводится к физическим затратам труда. Чем выше эффективность труда, тем больший производственный эффект доставляет один час рабочего времени. Таким образом, коэффициент E равен отношению полезного эффекта квалифицированного труда и простого труда. Эффективность труда трактуют также как *человеческий капитал* общества.

Фондовооруженность полезного труда – объем капитала, приходящий на единицу полезного труда, ее обозначают тем же символом, что и «обычную» фондовооруженность (п. 5.3.1):

$$k = K / LE. \qquad (6.1)$$

Доход (Y) есть функция Кобба-Дугласа от затрат капитала (K) и объема полезного труда (LE); он выражается функцией объема полезного труда и фондоворуженности полезного труда (k):

$$Y = AK^{\alpha}(LE)^{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad Y = A \times (LE) \times k^{\alpha}. \qquad (6.2)$$

Предполагается, что население растет темпом n, а эффективность труда – темпом m, а прирост капитала равен сбережениям за вычетом амортизации. Получим уравнение динамики, для чего прологарифмируем и продифференцируем равенство (6.1), учитывая (6.2):

$$\hat{k} = \hat{K} - \hat{L} - \hat{E} = \frac{sY - \delta K}{K} - n - m = \frac{sAk^{\alpha}}{K/(LE)} - \delta - n - m,$$

$$\hat{k} = sAk^{\alpha-1} - \delta - n - m, \qquad (6.3)$$

Стационарный рост – экономический рост с неизменной фондовооруженностью полезного труда. Ее стационарное значение получим, приравняв нулю правую часть равенства (6.3):

$$k^* = \left(\frac{sA}{n + m + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Формула аналогична формуле из базовой модели Солоу (п. 5.2). Однако здесь значение стационарной фондовооруженности убывает при увеличении темпа роста эффективности труда, т.е. чем быстрее растет квалификация работников, тем меньший стационарный объем физического капитала приходится на одного работника. Иными словами, *чем выше темп научно-технического прогресса, тем ниже потребность в физическом капитале.*

Исследуем темп стационарного роста, для этого прологарифмируем и продифференцируем функцию дохода (6.2):

$$\hat{Y} = \hat{L} + \hat{E} + \alpha\hat{k}, \quad \hat{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad g = n + m.$$

Итак, темп стационарного роста распадается на экстенсивную (n) и интенсивную (m) составляющие. Из равенства (6.1) следует, что капитал растет тем же темпом ($n + g$). Поскольку стационарный темп экономического роста изначально известен, данную модель относят к моделям экзогенного роста.

6.1.2. Подушевой доход и образованность

В современной теории человеческого капитала важнейшим фактором эффективности труда служит образование работника, измеряемое инвестициями в образование или числом лет образования. Эмпирические исследования показывают, что увеличение продолжительности образования на один год вызывает рост эффективности труда приблизительно на 8%, т.е. эффективность растет по экспоненте (п. 11.1).

Образованность (S) – суммарная продолжительность образования, которая при заданной численности населения характеризует уровень образования в обществе.

Пусть в модели Солоу эффективность труда есть возрастающая экспоненциальная функция от значения образованности:

$$E = e^{bS}, \qquad (6.4)$$

где $b > 0$ – чувствительность эффективности труда к продолжительности образования, или *восприимчивость к обучению*. Для приблизительной оценки параметра b приравняем функцию (6.4) эмпирической функции:

$$e^{bS} \approx 1{,}08^S \quad \Rightarrow \quad b \approx \ln(1{,}08) = 0{,}077.$$

Предполагается, что каждый человек живет T лет, сначала S лет учится, а затем $T - S$ лет работает. Численность индивидов, родившихся за год, растет темпом n. Зафиксируем год t. Если число родившихся в этом году составило B_0, то число родившихся τ лет назад было меньше и составляло:

$$B(t-\tau) = B_0 e^{-n\tau}. \qquad (6.5)$$

Численность населения (N) в момент t равна сумме численности индивидов, родившихся T лет назад, $T+1$ лет назад и так далее вплоть до рассматриваемого года t (ноль лет назад). Формула численности населения с учетом (6.5) примет вид:

$$N = B(t-T) + B(t-T-1) + \ldots B(t-0) = \sum_{\tau=0}^{T} B(t-\tau) = \sum_{\tau=0}^{T} B_0 e^{-n\tau},$$

$$N = B_0 \sum_{\tau=0}^{T} e^{-n\tau}.$$

Запишем это равенство в интегральной форме и проинтегрируем его правую часть:

$$N = B_0 \int_{\tau=0}^{\tau=T} e^{-n\tau} d\tau \quad \Rightarrow \quad N = \frac{B_0}{n}(1 - e^{-nT}). \qquad (6.6)$$

Используя формулу (6.6) определим численность занятых (L):

$$L = \int_{\tau=S}^{\tau=T} B_0 e^{-n\tau} d\tau \quad \Rightarrow \quad L = \frac{B_0}{n}(e^{-nS} - e^{-nT}). \qquad (6.7)$$

Исследуем динамику подушевого дохода при стационарном росте в модели Солоу. Используем равенство (6.2), получим выражение для подушевого дохода:

$$\frac{Y}{N} = \frac{Y}{L} \times \frac{L}{N} = A(k^*)^{\alpha} E \times \frac{L}{N}.$$

Подставим в правую часть полученные ранее выражения для E, L и N – формулы (6.4), (6.6) и (6.7):

$$\frac{Y}{N} = A(k^*)^{\alpha} e^{bS} \times \frac{e^{-nS} - e^{-nT}}{1 - e^{-nT}} = \frac{A(k^*)^{\alpha}}{1 - e^{-nT}} (e^{(b-n)S} - e^{bS-nT}),$$

$$\frac{Y}{N} = a(e^{(b-n)S} - e^{bS-nT}), \qquad (6.8)$$

где $a > 0$. Из равенства (6.8) следуют *выводы*:

- если люди учатся всю жизнь $(S = T)$, то подушевой доход равен нулю;

- если люди вовсе не учатся $(S = 0)$, то подушевой доход выражается формулой из базовой модели Солоу (п. 5.2):

$$Y / N = A(k^*)^{\alpha},$$

- если $b \le n$, т.е. *восприимчивость к обучению мала, тогда доход на душу населения падает с ростом продолжительности образования*; в этом случае оптимальная продолжительность образования равна нулю;

- если $b > n$, т.е. *восприимчивость к обучению велика, тогда доход на душу населения сначала растет, затем падает*. Приравняем нулю производную функции Y/N по переменной S в формуле (6.8), получим «золотую» продолжительность образования (S*), при которой подушевой доход максимален, а также оптимальную (не максимальную) эффективность труда (E*):

$$(Y/N)' = a((b-n)e^{(b-n)S} - be^{bS-nT}) = 0,$$

$$S^* = T + \frac{1}{n}\ln(1-\frac{n}{b}), \quad E^* = e^{bT}\left(1-\frac{n}{b}\right)^{b/n}.$$

Если $S \le S^*$, то с ростом продолжительности образования доход на душу населения растет, если $S \ge S^*$, то он падает.

6.1.3. Рост и образованность

Эффективность труда увеличивается по экспоненте с ростом образованности (формула 6.4). Доход есть функция объема эффективного труда:

$$Y = (LE)^{\alpha},$$

где $0 < \alpha < 1$. Затраты труда равны разности ресурса времени общества и времени обучения: $L = T - S$. Исследуем темп экономического роста в двух случаях, когда затраты на ресурсы учитываются, и когда они учитываются.

1. *Общество максимизирует доход.* Найдем уровень образованности, при котором он максимален:

$$Y = (T-S)^{\alpha} e^{bS\alpha} \quad \to \quad \max_S. \qquad (6.9)$$

Приравняем нулю производную функции (6.9) по переменной S и определим оптимальное значение образованности:

$$Y' = -\alpha(T-S)^{\alpha-1}e^{\alpha bS} + \alpha b(T-S)^{\alpha}e^{\alpha bS} = 0 \quad \Rightarrow \quad S^* = T - 1/b. \qquad (6.10)$$

Из равенства (6.10) следует, что оптимальная продолжительность образования не зависит от технологии производства и растет при увеличении восприимчивости к обучению (b). Если образованность меньше S*, то ее дальнейшее увеличение вызывает рост дохода, если образованность больше S*, то ее дальнейшее увеличение вызывает падение дохода.

Для исследования темпа роста прологарифмируем и продифференцируем равенство (6.9) по времени и используем формулу оптимальной образованности (6.10), получим формулу темпа роста:

$$\ln Y = \alpha\ln(T-S) + \alpha bS, \quad \frac{\dot{Y}}{Y} = -\frac{\alpha\dot{S}}{T-S} + \alpha b\dot{S}, \quad g = \alpha\dot{S}\left[b - \frac{1}{T-S}\right],$$

$$g = \alpha\dot{S}\frac{S^*-S}{T-S}. \qquad (6.11)$$

Из равенства (6.11) следует, что темп роста:

- прямо пропорционален эластичности производственной функции (α);
- равен нулю (застой) в случае, когда образованность оптимальна;
- равен нулю (застой), когда образованность неизменна во времени;
- положителен (имеется подъем) в случае, когда образованность растет, оставаясь меньше оптимального уровня:
- отрицателен (имеется спад) в случае, когда образованность растет, оставаясь больше оптимального уровня.

2. *Общество максимизирует чистый доход*, т.е. разницу дохода и затрат на труд и обучение рабочих:

$$Y = (T-S)^{\alpha} e^{bS^{\alpha}} - w(T-S) - pS \quad \to \quad \max_{S}, \qquad (6.12)$$

где w – ставка зарплаты, p – затраты на единицу времени обучения.

Продифференцируем функцию (6.12) по переменной S:

$$Y' = \alpha (T-S)^{\alpha} e^{\alpha bS} \frac{S^* - S}{T-S} + (w-p), \qquad (6.13)$$

где S^* – оптимальная образованность в первой задаче. Приравняв нулю правую часть равенства (6.13), мы получим уравнение для определения оптимальной образованности во второй задаче (S^{**}). Поскольку сложно получить расчетную формулу для решения этого уравнения, приведем здесь ряд выводов из равенства (6.13):

- оптимальная продолжительность образования зависит от всех экзогенных параметров модели;
- доход растет при увеличении образованности $(Y' \geq 0)$, если $S \leq S^*$ и $w \geq p$, т.е. когда образованность и стоимость образования малы;
- доход падает при увеличении образованности $(Y' \leq 0)$, если $S \geq S^*$ и $w \leq p$, т.е. когда образованность и стоимость образования велики;
- темп экономического роста описывается формулой (6.11), если равны цены труда и образования $(w = p)$, при этом $S^{**} = S^*$;
- доход падает при увеличении образованности, если $S \leq S^*$;
- чистый доход максимален $(Y' = 0)$ при выполнении одного из двух условий: либо образованность низка, а стоимость образования высока, либо образованность высока, а стоимость образования низка.

6.1.4. Модель *AK* и конвергенция

В отличие от модели Солоу, где темп экономического роста заранее известен, здесь он является эндогенной величиной, т.е. определяется при анализе модели. Пусть численность населения (L) неизменна, тогда доход зависит от объема капитала (K) и эффективности труда (E):

$$Y = bK^{\alpha}(LE)^{1-\alpha}, \qquad (6.14)$$

где b – производительность экономики. Предполагается, что общество выделяет фиксированную сумму (C) на оплату капитала и повышение квалификации работников, тогда бюджетное ограничение имеет вид:

$$rK + pE = C, \qquad (6.15)$$

где r – цена капитала, p – затраты на увеличение коэффициента эффективности труда на единицу. Решая задачу максимизации (6.14) при ограничении (6.15), получим:

$$MRS = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{E} = \frac{p}{r} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{r}{p} \times \frac{1-\alpha}{\alpha} K. \qquad (6.16)$$

Подставим (6.16) в (6.14), получим:

$$Y = bK^{\alpha}(L \times \frac{r}{p} \times \frac{1-\alpha}{\alpha} K)^{1-\alpha} = A \times K, \quad A = b\left(\frac{Lr(1-\alpha)}{p\alpha}\right)^{1-\alpha}.$$

Итак, в равновесии выпуск пропорционален затратам капитала (что объясняет название модели), а выпуск на единицу эффективного труда пропорционален фондовооруженности:

$$Y = A \times K \quad \Rightarrow \quad \frac{Y}{LE} = A\frac{K}{LE} \quad \Rightarrow \quad y = A \times k. \qquad (6.17)$$

Найдем темп экономического роста, который согласно (6.17) равен темпу прироста капитала. Но поскольку численность населения неизменна, он также равен темпу прироста фондовооруженности:

$$g = \hat{K} = \hat{k}. \qquad (6.18)$$

Норма амортизации равна δ, а норма сбережения – s, тогда прирост капитала с учетом (6.17) равен

$$\dot{K} = I - \delta K = sY - \delta K \quad \Rightarrow \quad \dot{K} = sAK - \delta K. \qquad (6.19)$$

Разделим (6.19) на затраты капитала, а затем учтем равенство (6.18):

$$\dot{K}/K = sA - \delta \quad \Rightarrow \quad g = sA - \delta.$$

Выводы:

- доход растет при условии $sA \geq \delta$, когда норма сбережения и производительность экономики велики относительно нормы амортизации;
- доход падает (спад) при условии $sA \leq \delta$, когда норма сбережения и производительность экономики невелики относительно нормы амортизации;
- доход неизменен (застой) при условии $sA = \delta$.

Заметим, что в базовой модели Солоу (п. 5.3) доход при постоянном населении неизменен.

Недостаток рассмотренной модели, как и многих других моделей роста, состоит в том, что темп изменения фондовооруженности в ней не зависит от текущего значения этого показателя. Однако на практике в более развитых странах, где фондовооруженность больше, темп этого показателя меньше, а поэтому страны с одинаковой производственной функцией постепенно сближаются по уровню развития.

Конвергенция – сближение стран по уровню развития, обусловленное снижением темпа роста фондовооруженности при увеличении ее значения. Если экономика страны A более развита по сравнению со страной B, то *условия конвергенции* имеют вид:

$$k_A \geq k_B, \quad \hat{k}_A \leq \hat{k}_B.$$

Рассмотрим модель конвергенции с неизменным населением и производственной функцией, зависящей лишь от затрат капитала:

$$Y = AK + BK^{\alpha}L^{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad y = Ak + Bk^{\alpha}, \qquad (6.20)$$

где A, $B > 0$, y – подушевой доход. Прирост капитала, равный разности сбережений и амортизации, разделим на численность населения, тогда с учетом (6.19) получим:

$$\dot{K} = sY - \delta K \quad \Rightarrow \quad \dot{k} = s(Ak + Bk^{\alpha}) - \delta k. \qquad (6.21)$$

Разделим (6.21) на k, получим зависимость темпа прироста фондовооруженности от ее текущего значения:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \hat{k} = sA + s\frac{B}{k^{1-\alpha}} - \delta.$$

Итак, с ростом фондовооружености темп ее прироста падает и стремится к равновесному значению $sA - \delta$ т.е., имеется конвергенция.

6.2. Модели роста с человеческим капиталом

6.2.1. Модель с производством человеческого капитала

Человеческий капитал – качества человека, обретенные в процессе образования или квалифицированного труда и служащие источником дохода. В данном пункте рассматривается *общий человеческий капитал*, который формируется в процессе обучения в учебном заведении.

В экономике имеются два сектора, первый сектор – традиционный, он производит ВВП, или доход (Y), используя физический капитал (K), неквалифицированный труд (L) и человеческий капитал (H):

$$Y = K^{\alpha}L^{\beta}H^{\gamma}, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1. \qquad (6.22)$$

Второй сектор – сфера образования, он производит человеческий капитал, выпуск которого зависит от величины государственных расходов на образование (G) и продолжительности времени, выделенного домохозяйством на свое образование (E):

$$H = G^{\mu}E^{1-\mu}. \qquad (6.23)$$

Равновесие домохозяйства – ситуация, когда максимален суммарный доход, полученный домохозяйством в качестве оплаты простого труда и квалифицированного труда:

$$wL + hH \quad \rightarrow \quad \max, \qquad (6.24)$$

где w – цена простого труда, h – отдача от единицы человеческого капитала в форме квалификационный надбавки за один год обучения. Домохозяйство максимизирует доход, распределяя ресурс свободного времени (T) между трудом и обучением (E):

$$T = L + E. \qquad (6.25)$$

Равновесие достигается, когда доход (6.24) максимален при выполнении ограничений (6.23) и (6.25). Приравняем нулю производные функции Лагранжа:

$$\Omega = wL + hH - \lambda_1(L + E - T) - \lambda_2(H - G^{\mu}E^{1-\mu}),$$
$$\partial\Omega / \partial L = w - \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \lambda_1,$$
$$\partial\Omega / \partial H = h - \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \lambda_2,$$
$$\partial\Omega / \partial E = -\lambda_1 + \lambda_2 G^{\mu}(1-\mu)E^{-\mu} = 0.$$

Подставим первое и второе равенства в третье, получим:

$$\frac{w}{h} = (1-\mu)\left(\frac{G}{E}\right)^{\mu}. \qquad (6.26)$$

Из (6.26) следует, что *с ростом госрасходов на образование возрастает отношение цены простого труда к цене человеческого капитала*, т.е. снижается ценность платного образования для домохозяйств. Преобразуем (6.23) и подставим в (6.26), получим:

$$\frac{H}{E} = \left(\frac{G}{E}\right)^{\mu} \quad \Rightarrow \quad \frac{w}{h} = (1-\mu)\frac{H}{E}. \qquad (6.27)$$

Из (6.27) следует, что *с ростом продолжительности образования отношение цены труда и отдачи от человеческого капитала сокращается, т.е. доля надбавки за квалификацию в доходе возрастает*. В конкурентной экономике цены ресурсов равны их предельным продуктам (частным производным функции дохода). Выразим эти цены через доход и разделим выражения одно на другое:

$$:\begin{cases} w = \partial Y / \partial L = K^{\alpha}\beta L^{\beta-1}H^{\gamma} = \beta Y / L \\ h = \partial Y / \partial H = K^{\alpha}L^{\beta}\gamma H^{\gamma-1} = \gamma Y / H \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{w}{h} = \frac{\beta H}{\gamma L}. \qquad (6.28)$$

Условие равновесия получим, приравняв правые части (6.27) и (6.28):

$$(1-\mu)\frac{H}{E} = \frac{\beta H}{\gamma L} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{E} = \frac{\beta}{(1-\mu)\gamma}. \qquad (6.29)$$

Из (6.29) следует, что *равновесная пропорция, в которой домохозяйство распределяет ресурс времени между работой и учебой определяется технологиями производства дохода* (β, γ) *и человеческого капитала* (μ).

Исследуем динамику человеческого капитала при равновесии домохозяйства. Логарифмируем и дифференцируем (6.26), учитывая, что ресурс времени распределен оптимальным образом, а поэтому продолжительность образования неизменна $(\hat{E} = 0)$:

$$\hat{w} - \hat{h} = \mu\hat{G} - \mu\hat{E} \quad \Rightarrow \quad \hat{w} - \hat{h} = \mu\hat{G}. \qquad (6.30)$$

Из (6.30) следует, что *цена простого труда и отдача от человеческого капитала растут равным темпом при постоянстве госрасходов на образование*. Если эти расходы растут, то цена труда растет быстрее, а если они сокращаются, то она растет медленнее, чем надбавка за квалификацию. Логарифмируем и дифференцируем выражения для w и h, полученные при выводе формулы (6.28). Вычтем одно из другого, предполагая, что население растет темпом n:

$$-\begin{cases} \hat{w} = \hat{Y} - \hat{L} \\ \hat{h} = \hat{Y} - \hat{H} \end{cases} \Rightarrow \quad \hat{w} - \hat{h} = \hat{H} - n. \qquad (6.31)$$

Из (6.31) следует, что *цена простого труда и отдача от человеческого капитала растут равным темпом при условии, что объем человеческого капитала и население растут равным темпом.* Если человеческий капитал растет быстрее населения, то цена труда растет быстрее, в противном случае она растет медленнее, чем отдача от образования. Приравняем правые части равенств (6.30) и (6.31), получим:

$$\hat{H} = \mu\hat{G} + n. \qquad (6.32)$$

Из (6.32) следует, что при равновесии домохозяйства *темп прироста человеческого капитала равен сумме интенсивной составляющей, пропорциональной темпу прироста госрасходов на образование, и экстенсивной составляющей, равной темпу прироста населения*. Если госрасходы и население растут, то человеческий капитал также растет, если же они убывают, то человеческий капитал также убывает.

Стационарный рост – ситуация, когда госрасходы на образование, доход и физический капитал растут равным темпом:

$$\hat{Y} = \hat{K} = \hat{G}. \qquad (6.33)$$

Из (6.33) следует, что *при стационарном росте государство выделяет на образование фиксированную долю ВВП*. Прологарифмируем и продифференцируем функцию дохода (6.22), затем преобразуем полученное выражение с учетом (6.32) и (6.33), в итоге получим и решим уравнение относительно стационарного темпа экономического роста (g):

$$\hat{Y} = \alpha\hat{K} + \beta n + \gamma\hat{H} \quad \Rightarrow \quad g = \alpha g + \beta n + \gamma(\mu g + n),$$

$$g = \frac{n(1-\alpha)}{1-\alpha-\mu\gamma}.$$

Выводы:

- при стационарном росте и равновесии домохозяйства доход растет быстрее численности населения, поскольку $\mu\gamma > 0$;
- при неизменном населении темп роста равен нулю, а при сокращении его численности наблюдается спад;
- темп экономического роста возрастает с увеличением темпа прироста населения (n) роли человеческого капитала в производстве ВВП (γ) и роли госрасходов на образование в производстве человеческого капитала (μ).

6.2.2. Модель с человеческим капиталом и НТП (Мэнкью-Ромер-Вейль)

Доход (Y) выражается функцией Кобба-Дугласа от затрат физического капитала (K), человеческого капитала (H) и эффективного труда (LE). Темп изменения эффективности труда отражает научно-технический прогресс (НТП).

Уровень образования (h) – объем человеческого капитала на единицу эффективного труда:

$$h = H / LE.$$

Данный показатель является аналогом фондовооруженности эффективного труда $(k = K / LE)$. При постоянной численности населения он обратно пропорционален отношению E/H, которое характеризует производственный эффект от инвестиций в человеческий капитал: чем выше эффективность труда на рубль инвестиций в образование, тем больше этот эффект.

Выразим доход как функцию затрат эффективного труда, его фондовоорyженности (k) и уровня образования (h):

$$Y = K^{\alpha} H^{\beta} (LE)^{1-\alpha-\beta} \quad \Rightarrow \quad Y = LEk^{\alpha} h^{\beta}.$$

Пусть инвестиции в физический и человеческий капитал (приросты объема капитала каждого вида) равны фиксированным долям дохода:

$$\dot{K} = s_K Y, \quad \dot{H} = s_H Y,$$

где s_K и s_H – нормы сбережения для физического и человеческого капитала, их сумма меньше единицы. Амортизация не учитывается, население растет темпом n, эффективность труда (НТП) – темпом m.

Стационарный рост – экономический рост при неизменных значениях фондовооруженности и уровня образования $(\hat{k} = \hat{h} = 0)$.

Для определения стационарного значения фондовооруженности эффективного труда прологарифмируем и продифференцируем ее формулу, затем приравняем производную нулю и получим искомое значение:

$$\hat{k} = \hat{K} - \hat{L} - \hat{E}, \quad \dot{k} = (\frac{s_K Y}{K} \frac{LE}{LE} - n - m)k, \quad \dot{k} = s_K y - (n+m)k = 0,$$

$$k^* = \frac{s_K y^*}{n+m},$$

где $y = Y / LE = k^{\alpha} h^{\beta}$ – средняя производительность эффективного труда. Аналогичным образом получим стационарное значение уровня образования:

$$h^* = \frac{s_H y^*}{n+m},$$

Из полученных формул следует, что стационарные значения фондовооруженности и уровня образования относятся как нормы сбережения для физического и человеческого капитала. Найдем y^*, подставив k^* и h^* в формулу средней производительности и решив уравнение:

$$y^* = \left(\frac{s_K y^*}{n+m}\right)^{\alpha} \left(\frac{s_H y^*}{n+m}\right)^{\beta} \quad \Rightarrow \quad y^* = \left[\frac{s_K{}^{\alpha} s_H{}^{\beta}}{(n+m)^{\alpha+\beta}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

Стационарные значения фондовооруженности и уровня образования получим подстановкой этой формулы y^* в формулы k^* и h^*:

$$k^* = \frac{s_K}{n+m}\left[\frac{s_K{}^{\alpha} s_H{}^{\beta}}{(n+m)^{\alpha+\beta}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \qquad h^* = \frac{s_H}{n+m}\left[\frac{s_K{}^{\alpha} s_H{}^{\beta}}{(n+m)^{\alpha+\beta}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

Из вида функции дохода следует, что в стационарном состоянии доход растет тем же темпом, что и объем полезного труда (*LE*), поэтому *темп экономического роста* равен сумме экстенсивной (n) и интенсивной (m) составляющих: $g = n + m.$ Этим темпом растут также объемы физического и человеческого капитала.

6.2.3. Человеческий капитал и рост мировой экономики

Человеческий капитал страны распадается на две части: первая часть затрачивается на производстве в форме эффективного труда, а вторая часть используется в свободное время для образования и развития человека. Имеется n стран, доход i-ой страны (Y_i) зависит от ее физического капитала (K_i) и человеческого капитала (H_i). Страны используют единую технологию:

$$Y_i = AK_i^{\alpha}(u_i H_i)^{1-\alpha}, \qquad (6.34)$$

где u_i – фиксированная доля человеческого капитала, используемого в производстве, $u_i H_i$ – затраты эффективного труда. Население каждой страны неизменно, прирост физического капитала равен сбережениям, а темп прироста человеческого капитала равен произведению уровня технического развития страны (θ_i) и доли человеческого капитала, используемого для развития $(1-u_i)$:

$$\hat{K}_i = sY_i, \quad \hat{H} = \theta_i(1-u_i), \qquad (6.35)$$

где s – единая для всех стран норма сбережения.

Стационарное состояние – выпуск и физический капитал страны растут равным темпом. Получим формулу темпа стационарного роста, для этого прологарифмируем и продифференцируем (6.34) с учетом равенств (6.35):

$$\hat{Y}_i = \alpha\hat{K} + (1-\alpha)\theta_i(1-u_i), \quad g_i = \alpha g_i + (1-\alpha)\theta_i(1-u_i),$$

$$g = \theta_i(1-u_i).$$

Отсюда *стационарный темп экономического роста страны равен произведению показателя развития экономики и доли человеческого капитала, направленного на развитие*.

Исследуем динамику мировой экономики. Человеческий капитал совершенно немобилен, а физический капитал свободно перемещается между странами.

Равновесие мировой экономики – суммарный ВВП всех стран максимален. Мировое сообщество максимизирует суммарный доход (Y), перераспределяя совокупный капитал $(K = \sum K_i)$ между странами:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i(K_i) \quad \to \quad \max_{K_{i i}}.$$

Приравняем нулю производные функции Лагранжа и придем к выводу, что при оптимальном распределении предельная продуктивность капитала в каждой стране (MP_i) равна единой доходности *r*:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} Y_i(K_i) - \lambda(\sum_{i=1}^{n} K_i - K),$$

$$\partial\Omega / \partial K_i = MP_i - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad MP_i = r. \qquad (6.36)$$

Покажем, что после перераспределения физического капитала его отношение к эффективному труду станет одинаковым в каждой стране:

$$MP_i = A\alpha K_i^{\alpha-1}(u_i H_i)^{1-\alpha} = A\alpha(K_i / u_i H_i)^{\alpha-1} = r,$$

$$K_i / u_i H_i = \beta.$$

Преобразуем эту формулу и суммируем по всем странам:

$$K_i = \beta u_i H_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} K_i = \beta \sum_{i=1}^{n} u_i H_i \quad \Rightarrow \quad \beta = K / uH,$$

где uH – часть совокупного человеческого капитала мировой экономики, используемая в производстве:

$$uH = \sum_{i=1}^{n} u_i H_i \quad \Rightarrow \quad u = \sum_{i=1}^{n} u_i H_i / \sum_{i=1}^{n} H_i.$$

Преобразуем функцию дохода (6.34):

$$Y_i = A(u_i H_i)\beta^{\alpha}, \quad Y_i = A(u_i H_i)(K / uH)^{\alpha}$$

Отсюда *равновесный доход каждой страны пропорционален объему эффективного труда*. Равновесный совокупный мировой доход равен

$$Y = \sum_{i=1}^{n} A(u_i H_i)\beta^{\alpha} = A\beta^{\alpha} uH = AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha},$$

т.е. он выражается той же функцией (6.34), что и доход каждой страны.

Пример. Имеются две страны. Параметры производственной функции: $A = 1$, $\alpha = 0{,}5$. Начальные объемы физического капитала стран – 20 и 25, неизменные объемы человеческого капитала – 10 и 15, доли человеческого капитала, используемого в производстве – 0,4 и 0,2, уровни технического развития – 0,09 и 0,07. Тогда затраты эффективного труда равны 4 и 3, а темпы экономического роста – 5,4% и 5,6%. Суммарный капитал равен 45, его оптимальное распределение между странами и ставку доходности найдем из условия равенства предельного продукта во всех странах:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{K_1}{4}\right)^{-0,5} = \frac{1}{2}\left(\frac{45 - K_1}{3}\right)^{-0,5} = r \quad \Rightarrow \; k_1 = 25{,}7, \; k_2 = 19{,}3, \; r = 0{,}197.$$

До распределения капитала доходы стран равны 8,94 и 8,66, совокупный доход – 17,6. После распределения они равны соответственно 10,14; 7,61 и 17,75. Итак, миграция капитала привела к росту мировой экономики на 0,85%, при этом доходность капитала в обеих странах стала равной 19,7%.

6.3. Модели с производством знаний

6.3.1. Рост и знания: два фактора дохода (Кремер)

Объем накопленных обществом знаний (A) характеризует развитие производства в целом и, в частности, производственный эффект одного часа труда, поэтому в данной модели он служит измерителем эффективности труда (E), т.е. объем эффективного (полезного) труда здесь равен AL, где L – продолжительность труда (численность населения). Накопленные знания могут быть измерены объемом информации в Интернете.

Доход (Y) зависит от объема накопленных знаний и затрат труда, он описывается производственной функцией с убывающим эффектом от масштаба производства $(\alpha \le 1)$:

$$Y = (AL)^{\alpha}. \qquad (6.37)$$

Годовой прирост знаний $(\dot{A})$ рассматривается как выпуск особого сектора экономики (наука, образование, искусство), который производит новые знания, использует те же ресурсы, но описывается производственной функцией с возрастающим эффектом от масштаба производства $(1+\theta \ge 1)$:

$$\dot{A} = LA^{\theta}. \qquad (6.38)$$

Выполняется мальтузианское условие: численность населения регулируется с целью сохранения дохода на душу населения на заданном уровне прожиточного минимума (y_0):

$$Y / L = y_0. \qquad (6.39)$$

Из (6.39) следует равенство темпов роста дохода и затрат труда. Прологарифмируем и продифференцируем (6.37) с учетом $\hat{Y} = \hat{L}$:

$$\hat{Y} = \alpha\hat{A} + \alpha\hat{L} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{L} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\hat{A}. \qquad (6.40)$$

Выводы из равенства (6.40):

- при низкой эластичности дохода по затратам полезного труда $(\alpha \le 0{,}5)$ население и доход растут медленнее объема знаний $(\hat{L} \le \hat{A})$;

- при высокой эластичности дохода по затратам полезного труда $(\alpha \ge 0{,}5)$ население и доход растут быстрее объема знаний,

- если $\alpha = 0{,}5$, то население, доход и знания растут равным темпом.

Получим формулу темпа прироста объема знаний. Разделим (6.38) на A, в правой части из равенства (6.37) выразим A через Y и L, затем с учетом (6.39) выразим Y через y_0 и L:

$$\hat{A} = LA^{\theta-1} = L\left[\left(\frac{Y}{L^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\theta-1}, \qquad \hat{A} = L\left(\frac{Ly_0}{L^{\alpha}}\right)^{\frac{\theta-1}{\alpha}}. \qquad (6.41)$$

Подставим (6.41) в (6.40), получим темп роста как функцию затрат труда:

$$g = bL^{\psi}, \qquad (6.42)$$

$$b=\frac{\alpha}{\alpha-1}y_0^{\frac{\theta-1}{\alpha}},\qquad \psi=1-\frac{1-\alpha}{\alpha}(1-\theta). \qquad (6.43)$$

Выводы из формул (6.42) и (6.43):

- если $\theta=1,$ тогда роль накопленных знаний при производстве новых знаний и роль простого труда являются сравнимыми. Прирост знаний пропорционален объему накопленных знаний, темп экономического роста пропорционален затратам труда и не зависит от прожиточного минимума: $g=\alpha L/(1-\alpha)$;

- если $\theta > 1$, тогда при производстве знаний накопленные знания важнее простого труда. Прирост знаний эластичен по объему знаний, темп экономического роста эластичен по затратам труда ($\Psi > 1$) и растет с ростом прожиточного минимума;

- если $\theta < 1$, тогда при производстве знаний накопленные знания менее важны по сравнению с простым трудом. Прирост знаний неэластичен по объему знаний, темп экономического роста неэластичен по затратам труда ($\Psi < 1$) и падает с ростом прожиточного минимума;

- если $\theta > 1$, т.е. «знания более важны», тогда темп экономического роста увеличивается с ростом численности населения ($\Psi > 0$).

- если $\theta < 1$, т.е. «знания менее важны», тогда темп экономического роста может снижаться с ростом численности населения ($\Psi < 0$). Например, при θ = 0,5, α = 0,25 имеем $\psi=1-3\times 0{,}5=-0{,}5\le 0$.

6.3.2. Рост и знания: три фактора дохода

Капитал и труд распределены между двумя секторами экономики в фиксированной пропорции: a_K, a_L – удельные веса капитала и труда во втором секторе, их сумма равна единице. Первый сектор – традиционный, он производит ВВП, или доход (Y), используя физический капитал, неквалифицированный (простой) труд и накопленные знаний (A), которые характеризуют эффективность труда:

$$Y=[(1-a_K)K]^{\alpha}[A(1-a_L)L]^{1-\alpha}. \qquad (6.44)$$

Накопленные знания не распределяются между секторами, а используются ими целиком, поскольку являются общественным благом.

Второй сектор – производство знаний (наука, образование и др.), его выпуск равен годовому приросту объема знаний $(\dot{A})$. Производственная функция типа, в отличие от модели из предыдущего пункта, зависит от капитала, труда и накопленных знаний:

$$\dot{A}=(a_K K)^{\beta}(a_L L)^{\gamma}A^{\theta},\qquad \beta+\gamma+\theta=1. \qquad (6.45)$$

Темп прироста населения (труда) равен n, прирост капитала составляет фиксированную долю дохода:

$$\dot{K}=sY, \qquad (6.46)$$

где s – норма сбережения (амортизации нет).

Стационарный рост – темпы роста капитала (g_K) и знаний (g_A) постоянны.

Кривая неизменного темпа роста капитала – множество точек в плоскости (g_A, g_K), для которых темп роста капитала неизменен.

Из (6.44) и (6.46) получим формулу прироста капитала. Разделим ее на объем капитала, получим формулу темпа прироста капитала. Прологарифмируем и продифференцируем ее, получим формулу темпа прироста показателя g_K . Приравняем нулю ее правую часть, получим формулу кривой неизменного темпа роста капитала:

$$\dot{K} = sY = CK^{\alpha} A^{1-\alpha} L^{1-\alpha}, \quad где \quad C = s(1-a_K)^{\alpha}(1-a_L)^{1-\alpha},$$

$$g_K = \frac{\dot{K}}{K} = CK^{\alpha-1} A^{1-\alpha} L^{1-\alpha} = C\left(\frac{AL}{K}\right)^{1-\alpha},$$

$$\hat{g}_K = (1-\alpha)(g_A + n - g_K) = 0,$$

$$g_K = g_A + n. \quad (6.47)$$

Кривая неизменного темпа роста капитала описывается равенством (6.47): выше этой прямой темп прироста капитала падает, а ниже ее растет.

Кривая неизменного темпа роста знаний – множество точек в плоскости (g_A, g_K), для которых темп роста знаний неизменен.

Из (6.45) получим формулу темпа прироста капитала. Разделим ее на A, Прологарифмируем и продифференцируем ее, получим формулу темпа прироста показателя g_A. Приравняем нулю ее правую часть, получим формулу кривой неизменного темпа роста знаний:

$$g_A = DK^{\beta} L^{\gamma} A^{\theta-1}, \quad где \quad D = a_K{}^{\beta} a_L{}^{\gamma},$$

$$\hat{g}_A = \beta g_K + \gamma n + (\theta-1) g_A = 0,$$

$$g_K = \frac{1-\theta}{\beta} g_A - \frac{\gamma n}{\beta}. \quad (6.48)$$

Кривая неизменного темпа роста знаний описывается равенством (6.48): выше этой прямой темп прироста капитала растет, а ниже ее падает.

Стационарная точка – точка пересечения кривых неизменного темпа роста знаний и неизменного роста капитала.

Определим параметры стационарного роста. Пусть население растет ($n > 0$), тогда (6.47) пересекает ось ординат в положительной точке, а (6.48) – в отрицательной. Прямые линии пересекаются, если наклон прямой (6.48) больше, чем наклон прямой (6.47). Отсюда условие стационарного роста:

$$\frac{1-\theta}{\beta} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \beta + \theta \leq 1.$$

Из (6.45) следует, что это условие выполнено, т.к. $\beta + \gamma + \theta = 1.$ Таким образом, при сделанных предположениях всегда существует единственное стационарное состояние.

Решим систему уравнений (6.47) и (6.48), получим стационарные значения темпов прироста капитала и знаний:

$$g_A = \frac{1-\theta}{\gamma} n, \qquad g_K = \frac{1-\theta+\gamma}{\gamma} n.$$

Стационарный темп роста получим логарифмированием и дифференцированием формулы (6.44) с учетом (6.47):

$$g = \alpha g_K + (1-\alpha)(g_A + n) = \alpha g_K + (1-\alpha) g_K = g_K.$$

Итак, *стационарный темп экономического роста равен стационарному темпу прироста капитала, он не зависят от параметра производственной функции дохода, а также от пропорций, в которых распределены труд и капитал между секторами экономики*. Он превышает темп прироста населения на величину темпа прироста объема накопленных знаний. Равенство (6.47) трактуют как разложение темпа экономического роста на интенсивную составляющую (темп прироста знаний) и экстенсивную (темп прироста населения).

6.4. Модели с обучением

6.4.1. Модель с накоплением опыта

Специальный человеческий капитал – качества человека, обретенные в процесс трудовой деятельности и служащие источником дохода. В п. 6.2 рассматривался *общий человеческий капитал*, который формируется в процессе обучения в учебном заведении.

Предполагается, что темп роста ВВП $(1+g)$ зависит лишь от накопленного опыта, или профессионального стажа (z):

$$g + 1 = z^{\alpha}, \qquad (6.49)$$

где $\alpha > 0$. Опыт увеличивается со временем, в начальный момент он минимален и равен единице, а темп экономического роста (g) равен нулю.

Предполагается, что прирост накопленного опыта есть степенная функция его объема: чем больше опыт, темп быстрее он растет:

$$\dot{z} = bz^{\beta}, \qquad (6.50)$$

где $b > 0$, $0 < \beta < 1$. Решение дифференциального уравнения (6.50) с учетом $z(0) = 1$ имеет вид:

$$z = [b(1-\beta)t + 1]^{1/(1-\beta)}. \qquad (6.51)$$

Подставим (6.51) в (6.49), получим формулу темпа роста:

$$g = [b(1-\beta)t + 1]^{\alpha/((1-\beta)} - 1. \qquad (6.52)$$

Выводы из равенства (6.52):

- если $\alpha + \beta \geq 1$, то темп роста растет ускоренным темпом, если $\alpha + \beta \leq 1$, то замедленным темпом, если $\alpha + \beta = 1$, то темп роста прямо пропорционален длине промежутка времени:

$$g = b(1-\beta)t; \qquad (6.53)$$

- если годовой прирост опыта прямо пропорционален его накопленному объему $(\beta \approx 1)$, тогда темп экономического роста фактически не растет с течением времени, оставаясь на нулевом уровне;

- если скорость возрастания опыта слабо зависит от его накопленного объема $(\beta \approx 0)$ и неизменно близка по величине к b, то темп экономического роста возрастает ускоренным темпом.

Пример. $\alpha = \beta = 0{,}5,\ b = 0{,}06.$ Тогда $\alpha + \beta = 1$, и согласно (6.53), через год темп экономического роста составит $0{,}06 \times 0{,}5 \times 1 = 0{,}03\,(3\%),$ через два года – 6%, через три года – 9%.

6.4.2. Модель с обучением на рабочем месте (Лукас)

Две отрасли производят близкие заменители, выпуск каждой отрасли равен произведению объема простого труда и объема специального человеческого капитала одного работника (эффективность труда), т.е. выпуск пропорционален затратам эффективного (полезного) труда. Неизменный объем простого труда (L) распределен между отраслями: a_1 и a_2 – доли затрат труда по отраслям:

$$Q_1 = h_1 a_1 L, \qquad Q_2 = h_2 a_2 L, \qquad (6.54)$$

где Q_1, Q_2 – выпуски, h_1, h_2 – объемы специального человеческого капитала на одного работника (эффективность труда).

Прирост эффективности труда в отрасли пропорционален текущему значению эффективности объему, уровню технического развития отрасли (δ), а также доли затрат труда в отрасли:

$$\dot{h}_1 = h_1 \delta_1 a_1, \qquad \dot{h}_2 = h_2 \delta_2 a_2. \qquad (6.55)$$

Пусть уровень развития первой отрасли больше: $\delta_1 > \delta_2$, например, в ней огурцы выращивают в теплице, а во второй – на открытом грунте.

Цена первого продукта равна 1, второго – q. Если бы полезность продуктов была равной, то со временем разорилась бы отрасль с большей ценой, поэтому при долговременной конкуренции отраслей продукт с большей ценой имеет также б*о*льшую полезность.

Стационарный рост – цены продуктов неизменны во времени и таковы, что движение рабочих между отраслями не изменяет доход.

Доход равен суммарной стоимости продукции обеих отраслей (Y), с учетом равенства $a_2 = 1 - a_1$ имеем:

$$Y = 1 \times Q_1 + q \times Q_2 = [a_1(h_1 - qh_2) + qh_2]L. \qquad (6.56)$$

Из (6.56) следует, что условие стационарного роста выполняется, т.е. доход не зависит от a_1, если цена во второй отрасли равна отношению эффективности труда:

$$h_1 - qh_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = h_1 / h_2. \qquad (6.57)$$

Итак, при стационарном росте:

1) поскольку цена q постоянна, то эффективности труда в обеих отраслях растет равным темпом: $\hat{h}_1 = \hat{h}_2 = \hat{h}$;

2) темп экономического роста равен темпу прироста эффективности труда, что следует из формулы стационарного дохода:

$$Y = qh_2L \quad \Rightarrow \quad \hat{Y} = \hat{h}_2 \quad \Rightarrow \quad g = \hat{h};$$

3) распределение труда между отраслями определяется показателями уровня развития отраслей, причем более развития отрасль использует меньший объем труда:

$$\hat{h}_1 = \hat{h}_2, \quad \delta_1 a_1 = \delta_2(1 - a_1) \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2}, \quad a_2 = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2};$$

4) темп экономического роста равен средней геометрической величине показателей уровня развития отраслей:

$$g = \hat{h}_1 = \delta_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}.$$

Таким образом, обучение работников на рабочем месте вызывает гарантированный рост дохода при постоянной численности населения.

Равновесие домохозяйства – домохозяйство достигает максимальной полезности при заданной величине реального ВВП (дохода).

Частный случай 1. Полезность домохозяйства выражается *функцией с постоянной эластичностью замещения*:

$$U = (\alpha_1 Q_1^{-\rho} + \alpha_2 Q_2^{-\rho})^{-1/\rho} \quad \to \quad \max_q,$$

где эластичность замещения: $\sigma = 1/(1+\rho) \ge 1$, $(\rho < 0)$, где α_1 и α_2 – относительные полезности продуктов ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$). Ограничение задачи:

$$Q_1 + qQ_2 = Y.$$

Решим задачу на условный экстремум:

$$\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{\alpha_1 Q_1^{-\rho-1}}{\alpha_2 Q_2^{-\rho-1}} = \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \left(\frac{\alpha_2}{q\alpha_1}\right)^{\sigma}. \quad (6.58)$$

Отсюда чем выше полезности продукта и тем ниже его цена, тем больше его выпуск при равновесии домохозяйства.

Общее равновесие – домохозяйство максимизирует полезность при стационарном росте. Условие общего равновесия получим, разделив два равенства (6.54) и преобразовав это отношение с учетом (6.57). Приравняем полученное выражение для отношения выпусков и правую часть (6.58):

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{h_2}{h_1}\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{q} \times \frac{1 - a_1}{a_1} = \left(\frac{\alpha_2}{q\alpha_1}\right)^{\sigma} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{1 + q^{1-\sigma}(\alpha_2/\alpha_1)^{\sigma}}. \quad (6.59)$$

Итак, доля работников развитой отрасли растет при сокращении полезности и росте цены продукции другой отрасли.

Стационарную цену определим, приравнивая два выражение для стационарной доли работников первой отрасли:

$$\frac{1}{1+q^{1-\sigma}(\alpha_2/\alpha_1)^{\sigma}}=\frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2} \quad\Rightarrow\quad q^*=\left[\frac{\delta_2/\delta_1}{(\alpha_2/\alpha_1)^{\sigma}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

Если цена второго продукта больше $q^*,$ то отрасль разорится, и будет производиться только первый продукт. Если она меньше $q^*,$ то будет производиться только второй продукт.

Частный случай 2. Полезность домохозяйства выражается функцией Кобба-Дугласа:

$$U=Q_1^{\alpha}Q_2^{\beta} \quad\to\quad \max_q .$$

Тогда условие равновесия домохозяйства:

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{1}{q} \quad\Rightarrow\quad \frac{Q_2}{Q_1}=\frac{1}{q}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Условие общего равновесия:

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{1}{q}\times\frac{1-a_1}{a_1}=\frac{1}{q}\frac{\beta}{\alpha} \quad\Rightarrow\quad a_1^*=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Итак, в случае общего равновесия:

- распределение работников между отраслями не зависит цен;
- чем полезнее продукт отрасли, тем больше доля ее работников.

Если доля работников первой отрасли не равна a_1*, то состояние не равновесное. Если доля больше a_1*, то цена второго продукта растет, и со временем будет производиться только первый продукт. Если она меньше a_1*, то эта цена падает, и со временем будет производиться только этот продукт.

6.5. Рост и инновации

6.5.1. Рост в условиях НТП. Остаток Солоу

Научно-технический прогресс (НТП) – доход возрастает при неизменных затратах труда и капитала. НТП моделируется тремя основными способами.

1. В число аргументов производственной функции включают *время*. В формуле дифференциала дохода заменим производные приростами:

$$Y(L,K,t) \quad\Rightarrow\quad \Delta Y=Y_L'\Delta L+Y_K'\Delta K+Y_t'\Delta t,$$

где Y_L', Y_K', Y_t' – предельные продукты труда, капитала и времени, т.е. прирост дохода равен сумме трех слагаемых: двух экстенсивных, пропорциональных приростам затрат ресурсов, и одного интенсивного, пропорционального времени.

2. Физические затраты труда и капитала умножают на возрастающие показатели *эффективности факторов* $A(t)$ и $B(t)$, тогда доход является сложной функцией полезных объемов труда $(\overline{L})$ и капитала $(\overline{K})$:

$$Y(A(t)L,\, B(t)K)=Y(\overline{L},\overline{K}).$$

Продифференцируем доход по времени, разделим обе части полученного равенства на величину дохода, преобразуем слагаемые, получим формулу темпа экономического роста (g):

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial \overline{L}}(\dot{A}L + A\dot{L}) + \frac{\partial Y}{\partial \overline{K}}(\dot{B}K + B\dot{K}),$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\overline{L}\partial Y}{Y\partial \overline{L}}\left(\frac{\dot{A}L}{AL} + \frac{A\dot{L}}{AL}\right) + \frac{\overline{K}\partial Y}{Y\partial \overline{K}}\left(\frac{\dot{B}K}{BK} + \frac{B\dot{K}}{BK}\right),$$

$$g = e_1(\hat{A} + \hat{L}) + e_2(\hat{B} + \hat{K}) \quad \Rightarrow \quad g = e_1\hat{L} + e_2\hat{K} + (e_1\hat{A} + e_2\hat{B}),$$

где e_1, e_2 – эластичность дохода по аргументам, т.е. темп роста равен сумме экстенсивной (g_e) и интенсивной (g_i) составляющих:

$$g = g_e + g_i \quad \Rightarrow \quad g_e = e_1\hat{L} + e_2\hat{K}, \quad g_i = e_1\hat{A} + e_2\hat{B}.$$

Экстенсивная составляющая зависит от темпов роста физических объемов затрат ресурсов, а интенсивная составляющая – от темпов роста эффективности использования этих ресурсов.

В случае функции Кобба-Дугласа с постоянным эффектом от масштаба сумма эластичностей равна единице и темп роста равен:

$$g = g_R + g_E,$$

где g_R, g_E – средневзвешенные темпы прироста затрат ресурсов и их эффективностей.

3. *Остаток Солоу.* Пусть производительность экономики $A(t)$ растет, затраты труда и капитала также являются функциями времени. Производственная функция:

$$Y(t) = A(t) \times F[L(t), K(t)].$$

Продифференцируем ее по времени как произведение простой функции и сложной функции двух переменных:

$$\dot{Y} = \dot{A} \times F + A(F'_L \times \dot{L} + F'_K \times \dot{K}) \quad \Rightarrow \quad \dot{Y} = \dot{A}F + MPL \times \dot{L} + MPK \times \dot{K},$$

где MPL и MPK – предельные продукты труда и капитала, т.е. частные производные дохода при заданной производительности A. Разделим равенство на Y, второе слагаемое в правой части умножим и разделим на L, третье – на K, получим:

$$g = g_A + \frac{MPL \times L}{Y}\hat{L} + \frac{MPK \times K}{Y}\hat{K},$$

где $g, g_A, \hat{K}, \hat{L}$ – темпы прироста ВВП, производительности экономики, затрат капитала и труда. При совершенной конкуренции предельные продукты ресурсов равны их ценам: $MPK = r$, $MPL = w$, где r и w – цена капитала и труда. Тогда равенство примет вид:

$$g = g_A + a\hat{L} + b\hat{K} \qquad \Rightarrow \qquad g_A = g - a\hat{L} - b\hat{K},$$

где a и b – доли дохода рабочих и капиталистов в ВВП.

Остаток Солоу – темп прироста производительности экономики (g_A), он характеризует вклад в экономический рост всех интенсивных факторов, т.е. вклад научно-технического прогресса.

Частный случай. Для функции Кобба-Дугласа $Y = AL^{1-\alpha}K^{\alpha}$ доли дохода рабочих и капиталистов равны коэффициентам эластичности:

$$b = \frac{MPK \times K}{Y} = \frac{AL^{1-\alpha}\alpha K^{\alpha-1} \times K}{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}} = \alpha, \qquad a = 1 - \alpha.$$

Остаток Солоу равен разности темпа экономического роста и среднего взвешенного темпа прироста затрат ресурсов (g_R):

$$g_A = g - (1-\alpha)\hat{L} - \alpha\hat{K} \qquad \Rightarrow \qquad g_A = g - g_R.$$

Пример. Производственная функция: $Y = AL^{0,4}K^{0,6}$. Доход вырос на 6%, численность работников – на 3%, объем капитала – на 7%. Тогда остаток Солоу равен: $g_A = 6 - (0,4 \times 3 + 0,6 \times 7) = 0,6\%$.

6.5.2. Модель с инвестициями в *R&D* (Ромер)

Доход есть производственная функция с постоянным эффектом от масштаба производства, причем производительность экономики (A) растет с ростом капитала за счет инвестиций в научно-технические разработки (R&D). В итоге производственная функция приобретает возрастающий эффект от масштаба:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad A = K^{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad Y = K^{\alpha+\beta}L^{1-\alpha}, \quad (6.60)$$

где $\beta < 1$ – интенсивность инвестиций в R&D. Население растет темпом n.

Стационарный рост – капитал растет постоянным темпом. Покажем, что при стационарном росте доход и капитал растут равным темпом, для чего формулу прироста капитала разделим на его объем:

$$\dot{K} = sY - \delta K \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta,$$

где s и δ – нормы сбережения и амортизации. Так как левая часть равенства при стационарном росте постоянна, то отношение Y/K в правой части также постоянно, т.е. доход и капитал растут равным темпом (g).

Логарифмируем и дифференцируем (6.60):

$$g = (\alpha + \beta)g + (1-\alpha)n \qquad \Rightarrow \qquad g = \frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}n.$$

Выводы о темпе экономического роста:

- если $\alpha + \beta > 1$, то имеем экономический спад ($g < 0$), вызванный чрезмерно большой интенсивностью инвестиций в R&D;

- если $\alpha + \beta < 1$, то имеем экономический рост, превышающий темп роста населения за счет инвестиций в R&D ($g > n > 0$);

- если $\alpha + \beta = 1$, то стационарный рост невозможен:

$$\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta = s\frac{K^{1}L^{1-\alpha}}{K} - \delta = sL^{1-\alpha} - \delta.$$

Правая часть растет с увеличением численности населения, т.е. темп прироста капитала не является константой;

- если численность населения неизменна, то имеем застой ($g < 0$).

Исследуем динамику фондовооруженности $(k = K / L)$, ее темп прироста равен:

$$\hat{k} = \hat{K} - \hat{L} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}n - n \quad \Rightarrow \quad \hat{k} = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}n.$$

Отсюда следуют выводы:

- если при экономическом росте дробь в правой части равенства больше единицы $(\alpha + 2\beta > 1)$, то k растет быстрее населения – случай высокой интенсивности инвестиций в *R&D*;

- если при экономическом росте $\alpha + 2\beta < 1$, то k растет медленнее населения – случай низкой интенсивности инвестиций в R&D;

- если численность населения сокращается ($n < 0$), то доход и фондовооруженность сокращаются вне зависимости от интенсивности инвестиций в *R&D*.

6.5.3. Модель растущего разнообразия товаров

Исследуем влияние числа производителей в экономике на экономический рост. Пусть производится m продуктов, причем каждый производится монополистом и является капитальным средством. Доход выражается суммой функций Кобба-Дугласа:

$$Y = \sum_{i=1}^{m} K_i^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

где K_i – выпуск i-го монополиста, L – затраты труда в экономике.

Равновесие экономики – доход за вычетом издержек (чистый доход) максимален. Издержки общества (C) равны сумме стоимости всех продуктов и труда, а чистый доход (П) равен:

$$\Pi = Y - C = \sum K_i^{\alpha} L^{1-\alpha} - \sum K_i p_i - wL \quad \rightarrow \quad \max_{K_{i_i}},$$

где p_i – цена i-го продукта, w – ставка зарплаты. Приравняем нулю частные производные и получим, что равновесный выпуск каждого монополиста прямо пропорционален неизменным затратам труда в экономике:

$$\alpha K_i^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - p_i = 0 \quad \Rightarrow \quad K_i = (\alpha / p_i)^{1/(1-\alpha)} L \quad \Rightarrow \quad K_i = b_i' L.$$

Если цены продуктов одинаковы, то $b_i' = b'$, $K_i = b'L$, а тогда доход пропорционален количеству продуктов:

$$Y = \sum (b'L)^{\alpha} L^{1-\alpha} = mbL, \qquad (6.61)$$

где $b = (b')^{\alpha}$. Пусть m_t – количество продуктов в момент t, тогда $Y_t = m_t bL$. Из (6.61) следует, что при постоянной численности работников доход и количество производителей растут равным темпом: $g = \hat{m}$.

Инвестиции равны постоянной доле дохода:

$$I_t = sY_t. \qquad (6.62)$$

Предполагается, что инвестиции равны сумме затрат на разработку новых продуктов (*R&D*) и издержек на производство старых продуктов, а выпуск каждого монополиста равен K:

$$I_t = (m_{t+1} - m_t)\varphi + \gamma K m_t, \quad (6.63)$$

где $(m_{t+1} - m_t)$ – количество новых продуктов, φ – издержки на разработку одного нового продукта, γ – издержки на выпуск единицы старого продукта.

Приравняем (6.62) и (6.63) и учтем (6.61), получим:

$$s m_t bL = (m_{t+1} - m_t)\varphi + \gamma K m_t \quad \Rightarrow \quad \frac{m_{t+1}}{m_t} = 1 + \frac{sbL}{\varphi} - \frac{\gamma}{\varphi}K. \quad (6.64)$$

Из (6.64) с учетом равенства $K = bL$ получим формулу темпа роста:

$$1 + g_t = 1 + \frac{sbL}{\varphi} - \frac{\gamma}{\varphi}K,$$

$$g = \frac{b(s-\gamma)}{\varphi}L. \quad (6.65)$$

Из (6.65) следуют выводы:

1) темп роста не зависит от количества товаров;

2) спад возникает при низкой норме сбережения и высоких издержках производства;

3) с увеличением цены продукта (p) и издержек на разработку нового продукта (φ) экономический рост замедляется;

4) темп прироста темпа экономического роста равен темпу прироста численности населения:

$$\hat{g} = n.$$

Отсюда при возрастании дохода темп экономического роста:

- не изменяется при постоянном населении,
- растет экспоненциально при возрастании численности населения,
- падает экспоненциально при снижении численности населения.

6.5.4. Модель заимствования технологий

В экономике используются несколько видов капитальных товаров, которые не производятся, а импортируются в объемах K_i, их количество m_t зависит от времени. Товары импортируются по одинаковой цене p. Производственная функция – та же, что и в предыдущем пункте:

$$Y = \sum_{i=1}^{m_t} K_i^{\alpha} L^{1-\alpha}. \quad (6.66)$$

Равновесие экономики – чистый доход (за вычетом издержек) максимален. Издержки (C) равны суммарной стоимости всех товаров и труда, тогда чистый доход равен

$$\Pi = Y - C = \sum K_i^{\alpha} L^{1-\alpha} - p\sum K_i - wL \quad \to \quad \max_{K_{i_i}}.$$

Приравняем нулю частные производные, тогда оптимальные закупки каждого товара одинаковы и пропорциональны затратам труда:

$$\alpha K_i^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - p = 0 \quad \Rightarrow \quad K = (\alpha / p)^{1/(1-\alpha)} L.$$

Подставим K в (6.66) и убедимся, что при постоянной численности населения темп экономического роста равен темпу прироста количества импортируемых товаров:

$$Y_t = m_t K^{\alpha} L^{1-\alpha} = m_t (\alpha / p)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L \quad \Rightarrow \quad g_{t+1} = \frac{m_{t+1}}{m_t} - 1. \qquad (6.67)$$

Для обучения одного человека работе на одном виде капитального продукта требуются затраты φ, а издержки на производство равны нулю. Тогда для L человек и $(m_{t+1} - m_t)$ новых продуктов требуются инвестиции:

$$I_t = (m_{t+1} - m_t)\varphi L \quad \Rightarrow \quad m_{t+1} = m_t + I_t / \varphi L.$$

Инвестиции (sY) полностью расходуют на обучение работников, тогда с учетом (6.67) получим формулу темпа экономического роста:

$$g_{t+1} = \frac{m_t + I_t / \varphi}{m_t} - 1 = \frac{sY_t}{\varphi m_t},$$

$$g = \frac{sL(\alpha / p)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\varphi}.$$

Выводы:

1) темп экономического роста не зависит от количества товаров, он больше нуля, т.е. спад невозможен;

2) темп роста и население растут равным темпом: $\hat{g} = n$. Отсюда темп роста не изменяется при постоянном населении, растет экспоненциально при его возрастании, падает экспоненциально при его снижении;

3) темп роста растет при увеличении нормы сбережения (s), снижении цены товаров (p) и издержек обучения (φ).

6.5.5. Модель улучшения качества продукции

Исследуем влияние числа инноваций в отраслях экономики на экономический рост. Число продуктов m неизменно, каждый производится одной отраслью и является капитальным средством.

Фактический объем капитала – характеристика производственной отдачи капитала, равная произведению объема физического капитала и коэффициента эффективности капитала:

$$\tilde{K}_i = E_i K_i,$$

где $\tilde{K}_i$ – фактический выпуск, K_i – физический выпуск, E_i – эффективность капитала в i-й отрасли, она является аналогом коэффициента эффективности труда (п. 6.1). Предполагается, что эффективность капитала в отрасли выражается степенной функцией от количества инноваций:

$$E_i = q^{k_i},$$

где $q > 1$ – *фактор качества*, который показывает, во сколько раз вырастет эффективность производимого капитала в результате одной инновации в каждой отрасли, k_i – количество инноваций в i-ой отрасли. Если инновации в отрасли не проводились, то коэффициент эффективности равен единице, а фактический и физический объемы капитала равны между собой. Итак,

$$\tilde{K}_i = q^{k_i} K_i ,$$

Доход выражается суммой функций Кобба-Дугласа, которые зависят от фактических объемов капитала в отраслях и численности занятых в экономике (L):

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \tilde{K}_i^{\alpha} L^{1-\alpha}.$$

Равновесие экономики – чистый доход (за вычетом издержек) максимален. Издержки (C) равны суммарной стоимости всех продуктов и труда:

$$\Pi = Y - C = \sum q^{\alpha k_i} K_i^{\alpha} L^{1-\alpha} - \sum K_i p_i - wL \quad \rightarrow \quad \max_{K_{шi}},$$

где p_i – цена i-го капитального средства, не зависящая от его эффективности, w – ставка зарплаты. Приравняем нулю частные производные, тогда оптимальный выпуск каждого продукта пропорционален совокупным затратам труда:

$$\alpha q^{\alpha k_i} K_i^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - p_i = 0 \quad \Rightarrow \quad K_i = (\alpha q^{\alpha k_i} / p_i)^{1/(1-\alpha)} L \quad \Rightarrow \quad K_i = b_i L.$$

Тогда оптимальный доход пропорционален затратам труда:

$$Y = \sum (b_i L)^{\alpha} L^{1-\alpha} = L \sum b_i^{\alpha} = LQ,$$

где Q – *агрегированный индекс качества*, зависящий от количества инноваций в отраслях. При неизменной численности населения и заданных ценах продуктов возможен только интенсивный экономический рост, который вызывается увеличением числа инноваций в отраслях. Он равен темпу прироста агрегированного индекса качества:

$$g = \hat{Q}.$$

В отсутствие инноваций показатель Q неизменен и рост отсутствует.

6.5.6. Технологии и структура рынка

Продукт производится несколькими фирмами, причем фирма применяет либо старую технологию A, либо новую технологию B. Зарплата работника равна единице. Собственники фирмы являются также ее работниками, их численность (L) неизменна, их доход (Y) равен сумме зарплаты (L) и прибыли (π):

$$Y = L + \pi. \qquad (6.68)$$

Технология А. Прибыль фирмы равна нулю $(\pi = 0)$, производственная функция:

$$Y = L.$$

Технология В. Нанимают дополнительно фиксированное число работников (F), тогда производственная функция становится более продуктивной:

$$Y = bL,$$

где $b > 1$ – производительность технологии *B,* отсюда $L = Y/b$. Прибыль фирмы равна разности дохода и суммарной зарплаты постоянных и дополнительных работников, она зависит от дохода и равна

$$\pi = Y - (L + F) = Y - Y/b - F \quad \Rightarrow \quad \pi = aY - F, \qquad (6.69)$$

где $a = (b-1)/b \le 1$, отсюда следует: $1/(1-a) = b$. Из (6.69) следует, что технология *B* прибыльна $(\pi \ge 0)$, если $Y \ge F/a$, т.е. выпуск превосходит некоторую величину.

В экономике спрос на продукт фирм растет с ростом доли фирм, применяющих технологию *B*, поскольку ее применение вызывает рост занятости и доходов населения. Как следствие, растет доход каждой фирмы вне зависимости от применяемой технологии. Пусть $Y(n)$ и $\pi(n)$ – доход и прибыль каждой фирмы при доле фирм n, применяющих технологию *B*. Из (6.68) и (6.69) рассчитаем доход при переходе всех фирм на технологию *B*:

$$Y(1) = L + \pi(1), \quad \pi(1) = aY(1) - F \quad \Rightarrow \quad (1-a)Y(1) = L - F,$$

$$Y(1) = b(L - F). \qquad (6.70)$$

Из (6.70) следует, что переход всей экономики на технологию *B* возможен при условии, что число дополнительных работников не превосходит число постоянных работников: $F \le L$. Необходимо также, чтобы доход при повсеместном использовании новой технологии был больше, чем при повсеместном использовании старой технологии:

$$Y(1) \ge Y(0) \quad \Rightarrow \quad b(L - F) \ge L \quad \Rightarrow \quad F \le aL. \qquad (6.71)$$

Поскольку $a \le 1$, то из (6.71) следует, что при использовании только новой технологии число дополнительных работников должно быть меньше фиксированной доли постоянных работников. Если производительность равна $b = 2$, тогда $a = 0{,}5$, и согласно (6.71) численность дополнительных работников не должна превышать половину численности собственников фирмы.

При доле прогрессивных фирм n доход каждой фирмы равен $Y(n)$, тогда средний доход фирмы в экономике также равен $Y(n)$. Прибыль фирмы может принимать два значение (нулевое и положительное), а средняя прибыль в экономике $\Pi(n)$ равна средневзвешенному значению:

$$\Pi(n) = n \times (aY(n) - F) + (1-n) \times 0,$$

$$\Pi(n) = n(aY(n) - F). \qquad (6.72)$$

Определим средние значения обоих частей равенства (6.69), получим:

$$Y(n) = \Pi(n) + L. \qquad (6.73)$$

Решим систему уравнений (6.72) и (6.73), получим зависимость дохода фирмы от доли фирм, использующих прогрессивную технологию:

$$Y(n) = \frac{L - Fn}{1 - an}. \qquad (6.74)$$

Дифференцируем (6.74) по n, и с учетом (6.71) заключаем, что доход растет с ростом доли фирм, использующих технологию *B*:

$$\frac{dY}{dn} = \frac{aL - F}{(1-an)^2} \geq 0. \qquad (6.75)$$

Согласно (6.69), прибыль прогрессивной фирмы растет с ростом выпуска, поэтому она растет с ростом доли фирм, использующих технологию *B*:

$$\pi(n) = \frac{aL - F}{1 - an}.$$

В обоих «крайних» состояниях прибыль положительна:

$$\pi(0) = aL - F \geq 0, \qquad \pi(1) = (aL - F)/(1-a) \geq 0,$$

где $\pi(0)$ – прибыль фирмы, которая применяет технологию *B*, но при этом занимает ничтожную долю рынка, в этом случае средняя прибыль в экономике равна нулю.

Пример 1. $\alpha = 2, L = 10, F = 4.$ Тогда $a = 0{,}5$, и для фирмы, использующей технологию *B*, имеем: $Y = (10 - 4n)/(1 - 0{,}5n), \pi = 1/(1 - 0{,}5n).$ При доле 0 доход фирмы равен 10, прибыль – 1, при доле 0,5 доход – 10,7, прибыль – 1,3, при доле 1 доход – 12, прибыль – 2.

Случай нескольких технологий. Обобщим (6.69):

$$\pi_i = a_i Y - F_i \quad (i = 1, ..., N), \qquad (6.76)$$

где *N* – количество технологий, *Y* – выпуск фирмы, $a_i = (\alpha_i - 1)/\alpha_i$, где α_i – производительность *i*-ой технологии. Средняя прибыль равна:

$$\Pi = \sum n_i \pi_i, \quad \Pi = \sum n_i (a_i Y - F_i), \qquad (6.77)$$

где n_i – доля фирм, использующих *i*-ю технологию. Подставим (6.77) в (6.68):

$$Y(n_1, ..., n_N) = \frac{L - \overline{F}}{1 - \overline{a}}, \qquad (6.78)$$

где $\overline{F}, \overline{a}$ – средние значения показателей, $\Pi = \overline{a}Y - \overline{F}$.

Рассмотрим случай двух технологий и определим условия, при которых их прибыль одинакова. Из (6.76) следует:

$$a_1 Y - F_1 = a_2 Y - F_2 \quad \Rightarrow \quad Y_0 = (F_1 - F_2)/(a_1 - a_2), \qquad (6.79)$$

где Y_0 – доход, при котором прибыли равны. Обозначим через *n* долю фирм, использующих первую технологию, тогда из (6.78) и (6.79) получаем:

$$Y = \frac{L - nF_1 - (1-n)F_2}{1 - na_1 - (1-n)a_2}, Y = Y_0 \quad \Rightarrow \quad L_0 = Y_0 - \frac{1}{a_1 - a_2}\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}. \qquad (6.80)$$

Итак, прибыли равны при любой структуре рынка в случае, когда численность постоянных работников рассчитывается по формуле (6.80). Тогда доход фирмы при использовании только первой или только второй технологии равен Y_0. Две технологии имеют равную эффективность, если определитель в (6.80) равен нулю, тогда $L_0 = Y_0$. Если он больше нуля, то вторая технология эффективнее.

Пример 2. $a = (0{,}8;\, 0{,}3), F = (10;\, 2).$ Согласно (6.79) технологии обеспечивают равную прибыль 2,8 при доходе 16. Согласно (6.80) соответствующая численность персонала равна 13,2. При большей численности более прибыльна первая технология, при меньшей численности – вторая, более эффективная технология.

6.5.7. Эволюционная модель роста

Рассмотрим модель роста, в которой постепенная замена старой технологии на новую технологию вызывает изменение темпа экономического роста. (см. Нельсон Р., Уинтер С. Эволюционная теория экономических изменений. М.: Дело, 2002. С. 306).

Продукт производят с помощью старой и новой технологии, обе производственные функции относятся к типу Леонтьева:

$$Y_1 = \min\{K_1, L_1 / l_1\}, \quad Y_2 = \min\{K_2, L_2 / l_2\}, \qquad (6.81)$$

где Y_1, Y_2 – выпуски, K_1, K_2 – затраты капитала, L_1, L_2 – затраты капитала, l_1, l_2 – трудоемкость в первой и второй «отрасли», т.е. при производстве по старой и новой технологии. Трудоемкость новой технологии меньше:

$$l_1 \geq l_2 \quad \Rightarrow \quad l_2 = \alpha l_1, \quad \alpha \leq 1. \qquad (6.82)$$

Из (6.81) следует, что выпуск в каждой отрасли равен затратам капитала, отсюда отраслевые темпы роста выпуска и капитала равны между собой. Из (6.81) также следует, что затраты труда в отрасли равны произведению выпуска и трудоемкости. Отсюда трудоемкость в экономике (l) зависит от трудоемкости в отраслях и распределения совокупного капитала между ними:

$$l = \frac{L_1 + L_2}{Y} = \frac{l_1 Y_1}{Y} + \frac{l_2 Y_2}{Y} = l_1 \frac{K_1}{K} + l_2 \frac{K_2}{K}. \qquad (6.83)$$

Предполагается, что темп прироста капитала в каждой отрасли пропорционален прибыли на единицу продукта. Тогда абсолютный прирост капитала в первой отрасли равен:

$$\dot{K}_1 = \lambda \pi_1 K_1 = \lambda (p - r - w l_1) K_1, \qquad (6.84)$$

где p – цена продукта, r – затраты капитала на единицу продукции, w – ставка зарплаты, wl_1 – затраты труда на единицу продукции, λ – чувствительность темпа прироста капитала к объему прибыли. Для второй отрасли:

$$\dot{K}_2 = \lambda (p - r - w l_2) K_2. \qquad (6.85)$$

Заменим в (6.84) и (6.85) производные по времени абсолютными приростами капитала, затем сложим эти равенства и с учетом равенства (6.83) получим формулу абсолютного прироста дохода:

$$\Delta Y = \Delta Y_1 + \Delta Y_2 = \Delta K_1 + \Delta K_2 = \lambda K (p - r - wl). \qquad (6.86)$$

Отсюда получим формулу темпа экономического роста (g):

$$g = \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta Y}{K}, \quad g = \lambda (p - r - wl). \qquad (6.87)$$

Поскольку затраты капитала в отраслях переменны, то из (6.83) следует, что темп роста также зависит от времени: чем меньше трудоемкость в экономике (l), тем он выше. Следует ожидать, что менее затратная технология будет вытеснять старую технологию, и со временем трудоемкость в экономике достигнет минимального значения l_2, а темп роста – максимального значения:

$$g^* = \lambda(p - r - wl_2). \qquad (6.88)$$

Факторы экономического роста. Из (6.88) следует, что в долгосрочной перспективе подъем экономики имеет место $(g \geq 0)$, если цена превышает затраты на единицу продукции при новой технологии $(p \geq r + wl_2)$. Спад имеет место $(g \leq 0)$, если цена меньше затрат на единицу продукции при новой технологии $(p \leq r + wl_2)$. Доход неизменен, если цена равна затратам.

Эволюция – процесс вытеснения старой технологии новой технологией. **Скорость эволюции** $(\hat{k})$ – темп прироста отношения объемов капитала, используемого при производстве по новой и старой технологии. Из равенств (6.82), (6.84) и (6.85) получаем:

$$k = K_2 / K_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{k} = \hat{K}_2 - \hat{K}_1 = \lambda w(1-\alpha)l_1.$$

Итак, скорость эволюции всегда положительна и прямо пропорциональна коэффициенту чувствительности темпа прироста капитала к объему прибыли, ставке зарплаты, относительному различию трудоемкости технологий и трудоемкости старой технологии. Она не зависит от цены продукта, затрат капитала на единицу продукта и распределения совокупного капитала между отраслями.

Пример. Известны цены продукта, капитала и труда, трудоемкость технологий, коэффициент чувствительности, начальные объемы капитала:

$$K_1(0) = 8431, K_2(0) = 1540, \ p = 2, r = 1, w = 1, l_1 = 0{,}8, l_2 = 0{,}4, \lambda = 0{,}3.$$

Таблица 6.1

Эволюционная модель роста: пример

Год	Капитал		Инвестиции		Эволюция		Трудоемкость, l	Темп роста, g
	K_1	K_2	ΔK_1	ΔK_2	k	$\hat{k}$		
0	8431	1540	506	277	0,183	-	0,7380	0,079
1	8937	1817	536	327	0,203	0,109	0,7324	0,080
2	9473	2144	568	386	0,226	0,115	0,7260	0,082
…	…	…	…	…	…	…	…	…
100	0	…	0	…	∞	0,120	0,4000	0,180

Рассчитаем характеристики эволюционного процесса (табл. 6.1).

1. Темп прироста капитала в первой отрасли равен $0{,}3 \times (2 - 1 - 0{,}8) = 0{,}06$, поэтому в начальном году прирост капитала (инвестиции) в ней равен $8431 \times 0{,}06 = 506$, а объем капитала в следующем году – 8937. Во второй отрасли инвестиции в начальном году равны 277, капитал в следующем году – 1817.

2. Рассчитаем трудоемкость и темп роста в начальном году. Доля капитала в первой отрасли – 0,845, во второй отрасли – 0,155. Трудоемкость в

экономике равна $0{,}845 \times 0{,}8 + 0{,}155 \times 0{,}4 = 0{,}738$. Тогда темп экономического роста равен $0{,}3(2 - 1 - 0{,}738 \times 1) = 0{,}079$ (7,9%).

3. В долгосрочной перспективе трудоемкость равна 0,4, темп роста – $0{,}3(2 - 1 - 0{,}4) = 0{,}18$. Темп эволюции равен $0{,}3 \times 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}12$.

Выводы главы

1. Экономический рост в постиндустриальной экономике зависит от эффективности труда, объемов общего и специального человеческого капитала, уровня образования, объема накопленных обществом знаний, инвестиций в инновации.
2. Эффективность труда в современных моделях роста служит динамическим показателем, отражающим процесс повышения квалификации работников. Введение данного показателя позволило обобщить базовую индустриальную модель роста Солоу на случай постиндустриального общества.
3. В ряде моделей постиндустриального роста общий человеческий капитал, измеряемый продолжительностью образования, включают в число аргументов производственной функции наравне с физическим капиталом и труда. Такой подход позволяет оценить сравнительную значимость человеческого и материального факторов экономического роста.
4. Специальный человеческий капитал, измеряемый величиной трудового стажа, служит важным производственным фактором в наукоемких отраслях, где в процессе трудовой деятельности происходит повышение квалификации работников, их обучение.
5. Влияние инноваций на экономический рост моделируется и исследуется разными методами: учитывают объем и интенсивность инвестиций в научно-технические и опытно-конструкторские разработки, производство, импорт и динамику количества новых товаров, количество и качество инноваций в различных отраслях экономики, процессы вытеснения старых технологий новыми.

Проектные задания

Проект 1. «Сравнение экономики России и других стран»

Тема «Оценка роли человеческого капитала в экономике России и других стран»

Задание. Определить уровень развития человеческого капитала в России и нескольких странах на основе статистических данных, используемых при расчете индекса человеческого развития. Для каждой страны построить линейные уравнения регрессии, выражающие зависимость реального ВВП, объема физического капитала, численности занятого населения и уровня человеческого капитала. На основе полученных результатов построить производственные функции Кобба-Дугласа, сравнить показатели эластичности по уровню развития человеческого капитала, сделать выводы.

Проект 2. «Статистическое обоснование моделей макроэкономики»

Тема «Анализ конвергенции»

Задание. Рассчитать величину фондовооруженности и ее годовой прирост для нескольких стран за продолжительный период времени. Для каждой страны построить линейный тренд для каждого показателя и рассчитать коэффициент парной корреляции между ними. Сделать вывод о наличии конвергенции в каждой стране за рассматриваемый период.

Вопросы для самопроверки

1. Объем эффективного труда зависит от:
а) параметров производственной функции;
б) эффекта от масштаба производства;
в) величины фондовооруженности;
г) физического объема труда.

2. В модели Солоу с эффективным трудом стационарный темп роста:
а) растет постоянным темпом;
б) не может превышать темп прироста эффективности труда;
в) не меньше темпа прироста численности населения;
г) зависит от используемой технологии.

3. Конвергенция имеет место в случае, когда:
а) доход растет ускоренным темпом;
б) скорость роста фондовооруженности падает;
в) фондовооруженность стремится к стационарному значению;
г) доход растет быстрее фондовооруженности.

4. В модели роста человеческого капитала обычно не рассматривают показатель:
а) норма амортизации человеческого капитала;
б) норма сбережения человеческого капитала;
в) предельная продуктивность человеческого капитала;
г) темп роста объема человеческого капитала.

5. В модели роста с производством знаний объем накопленных в обществе знаний характеризует:
а) эффективность труда;
б) объем выпуска особого сектора экономики;
в) эффективный объем труда;
г) производительность экономики.

6. В модели роста с обучением на рабочем месте темп роста человеческого капитала в отрасли зависит от:
а) производственной функции отрасли;
б) цены продукта отрасли;
в) технического развития отрасли;
г) фондовооруженности в отрасли.

7. Остаток Солоу характеризует:
а) эффективность труда;
б) интенсивную компоненту роста;
в) скорость научно-технического прогресса;
г) темп роста производительности труда.

8. Выпуск описывается функцией Кобба-Дугласа с постоянным эффектом от масштаба производства. Выпуск вырос на 8%, затраты труда – на 3%, затраты капитала – на 4% , тогда остаток Солоу:
а) равен 4,5%;
б) равен 1%;
в) больше 5%;
г) не меньше 4%.

9. В модели улучшения качества продукции фактором роста служит:
а) снижение уровня издержек в отрасли;
б) объем инвестиций в инновации в отрасли;
в) количество инноваций в отрасли;
г) повышение конкурентоспособности отрасли.

10. В модели «Технологии и структура рынка» драйвером экономического роста служит:
а) увеличение количества производимых продуктов;
б) увеличение количества новых технологий;
в) усиление конкуренции между разными технологиями;
г) увеличение доли передовых фирм.

Задания для самостоятельной работы

1. Технология и структура рынка. Первая технология $(Y = 2L)$ требует для обслуживания 3 рабочих, 2-я технология $(Y = 2{,}5L)$ – 5, 3-я технология $(Y = 3L)$ – 4 рабочих. Численность постоянных рабочих – 12. Рассматривается экономика с двумя наиболее эффективными технологиями. Найти: а) наименее эффективную технологию; б) структуру рынка при доходе 20; в) среднюю прибыль при доходе 20; г) среднюю численность работников при доходе 20; д) максимально возможный доход, е) максимально возможную прибыль.

2. Эволюционная модель роста. Известны цены продукта, капитала и труда, трудоемкость технологий, коэффициент чувствительности, начальные объемы капитала.

$$K_1(0) = 6230,\ K_2(0) = 1183,\ p = 1{,}6,\ r = w = 1,\ l_1 = 0{,}8,\ l_2 = 0{,}4,\ \lambda = 0{,}1.$$

Найти:
а) темп экономического роста в начальном периоде;
б) темп экономического роста в долгосрочной перспективе;
в) темп эволюции.

3. Новая технология вытесняет старую технологию по логистической кривой: $q = 1/[1 + a\exp(-bt)]$, где q – удельный вес новой технологии, δ_1 – ее

производительность, t – время, a, $b > 0$. Выпуск равен $Y = \delta_1 q + \delta_2 (1 - q)$, где δ_2 – производительность старой технологии, $\delta_1 > \delta_2$. Найти темп экономического роста в нулевой момент времени.

Список литературы

Бланшар О., Фишер С. Лекции по макроэкономике. М.: Дело, 2014. Глава 5.

Ромер Д. Высшая макроэкономика. М.: ВШЭ, 2014. Глава 1, 3.

Розанова Н.М. Макроэкономика. Продвинутый уровень. Учебник для магистров. Т.2. М.: Юрайт, 2016. Глава 13.

Лукас Р.Э. Лекции по экономическому росту. – М.: Изд-во Института Гайдара, 2013.

Туманова Е.А., Шагас Н.Л. Макроэкономика. Элементы продвинутого уровня – М.: ИНФРА-М, 2011.