КУЗНЕЦОВ В.В., КУЗНЕЦОВА Н.А.

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЫНОЧНОГО РАВНОВЕСИЯ

Основополагающими факторами любой экономики являются производство, потребление и рыночное равновесие. Экономическая система всегда стремится к равновесию, т.е. к состоянию сбалансированности своих основных элементов; прежде всего к равенству между совокупным спросом и совокупным предложением и тем самым к установлению равновесной цены. Такое состояние является необходимым условием обеспечения высокого уровня эффективности общественного производства и его устойчивого роста. Однако состояние рыночного равновесия, выраженного в количественных показателях (равновесная цена, объемы производства и потребления), не является постоянной величиной. Цены на рынке могут пульсировать вокруг равновесной цены или “разбегаться” от нее. Рынок замечателен тем, что при любом отклонении от равновесия он стремится в него вернуться. Это может осуществиться путем возврата к старой точке равновесия или путем поиска новой. Точку рыночного равновесия, в которой цены пульсируют вокруг равновесной цены, принято называть устойчивой, а равновесие устойчивым. Интерес экономической теории к проблеме устойчивости равновесия легко объясним. Ведь выводы об устойчивости (неустойчивости) рыночного равновесия могут привести в свою очередь к важным выводам о ненужности (или, напротив, необходимости) государственного вмешательства в экономику.

Очевидно, что анализ экономического равновесия с точки зрения его устойчивости требует определения динамики изменения цены во времени и определенного представления о том механизме, посредством которого равновесие устанавливается на рынке. Так как спрос на рынке мгновенно реагирует на цену товара, а для производства характерен временной лаг, то состояние рынка надо рассматривать в динамике, т.е. с учетом временного фактора допуская, что объем спроса зависит от уровня цен текущего периода, тогда как объем предложения зависит от уровня цен предыдущего периода.

Рассмотрим вариант динамической модели рынка одного продукта. Введем обозначения: $q = f(p)$ – функция потребления; $q = g(p)$ – функция производства. Выразим цену товара через функцию потребления: $p = f^{-1}(q)$. Пусть Δt - задержка производства по сравнению с потреблением. Рассмотрим состояние рынка в дискретные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ такие, что $t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_0 + 2\Delta t, \dots, t_n = t_0 + n\Delta t$.

Спрос реагирует на цену товара мгновенно, поэтому если в момент времени t_0 сложилась цена p_0, то спрос будет соответственно равен $q_0 = f(p_0)$. Так как производство реагирует на изменение ситуации на рынке с задержкой на период Δt, то в момент времени t_1, вызванное ценой p_0, сложившейся в момент t_0, предложение будет соответственно равным $q_1 = g(p_0)$. Величина спроса $q_1 = f(p_1)$ будет определяться ценой p_1, возникшей на рынке в данный момент времени. Спрос сформирует на рынке новую цену $p_1 = f^{-1}(q_1) = f^{-1}(g(p_0))$. Через период Δt, т.е. в момент времени t_2 на рынке возникнут предложение $q_2 = g(p_1)$ и спрос $q_2 = f(p_2)$, и сформируют новую цену $p_2 = f^{-1}(q_2) = f^{-1}(g(p_1))$. Аналогичным путем в момент времени t_3 образуется цена $p_3 = f^{-1}(q_3) = f^{-1}(g(p_2))$. Процесс формирования цены на рынке отражается в рекуррентной формуле:

$$p_{k+1} = f^{-1}(g(p_k)), \quad k = 1,2,\dots,n.$$

Суперпозицию функций $f^{-1}(g(p))$ обозначим через функцию $\varphi(p)$ и получим последовательность цен, задаваемой рекуррентной формулой

$$p_{k+1} = \varphi(p_k), \quad k = 1,2,\dots,n \tag{1}$$

Ниже будет доказано, что достаточным условием сходимости числовой последовательности задаваемой рекуррентной формулой (1) к устойчивой (неподвижной) точке $p^* = \varphi(p^*)$, является малое по абсолютной величине значение производной функции $\varphi(p)$, т.е. выполнение неравенства $|\varphi'(p^*)| < 1$.

Вычислим производную функции $\varphi(p) = f^{-1}(g(p))$ по переменной p, используя правила дифференцирования сложной и обратной функций:

$$\varphi(p)' = \left(f^{-1}(g(p))\right)' = \left(f^{-1}(g(p))\right)'_g \cdot g'(p) = \frac{g'(p)}{f'(p)}. \tag{2}$$

Предположим, что равновесная цена p^* существует, тогда $p^* = \varphi(p^*)$ и, следовательно, имеет место равенство $p^* = f^{-1}(g(p^*))$. Рассмотрим и преобразуем выражение (2) в точке рыночного равновесия

$$\varphi'(p^*) = \frac{g'(p^*)}{f'(p^*)} = \frac{g'(p^*) \cdot p^*}{g(p^*)} \cdot \frac{g(p^*)}{p^* \cdot f'(p^*)} = \frac{E_{p^*}(g)}{E_{p^*}(f)}.$$

Так как для сходимости последовательности цен к равновесной цене в окрестности точки рыночного равновесия достаточно выполнения условия $|\varphi'(p^*)| < 1$, то справедливо неравенство

$$|\varphi'(p^*)| = \left|\frac{g'(p^*)}{f'(p^*)}\right| = \left|\frac{E_{p^*}(g)}{E_{p^*}(f)}\right| < 1.$$

Таким образом, *достаточное* условие устойчивости точки рыночного равновесия может быть записано как соотношение эластичностей спроса и предложения

$$\left|E_{p^*}(g)\right| < \left|E_{p^*}(f)\right|. \tag{3}$$

Учитывая, что в точке рыночного равновесия значения функций производства и потребления совпадают, то используя определение эластичности, из неравенства (3) легко получить неравенство, содержащее абсолютные значения производных этих функций в данной точке рыночного равновесия

$$\left|g'(p^*)\right| < \left|f'(p^*)\right|. \tag{4}$$

В связи с тем, что производная есть скорость изменения функции, для устойчивости рыночного равновесия (краткосрочного) достаточно, что бы производство развивалось медленнее, чем потребление. С другой стороны из условия (4) следует, что в геометрической интерпретации закономерностей поведения на рынке покупателей и продавцов углы наклона кривых спроса и предложения имеют существенное значение для понимания механизма рыночного равновесия: точка пересечения кривых спроса и предложения будет устойчивой, если угол наклона кривой предложения меньше угла наклона кривой спроса.

Математическое обоснование достаточного условия устойчивости точки рыночного равновесия предполагает использовании с некоторыми допущениями математического понятия "неподвижная точка" в качестве устойчивой равновесной цены.

Пусть $\varphi(x)$ – непрерывная в исследуемой области функция и x_0 – произвольная точка этой области. Положим $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ....

Определение: Точка x^* называется *неподвижной* для непрерывной функции $\varphi(x)$, если $x^* = \varphi(x^*)$.

Лемма: Если последовательность чисел $\{x_n,\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1,2,\ldots\}$ сходится, т.е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, то x^* - неподвижная точка функции $\varphi(x)$.

Доказательство: Так как $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, перейдя к пределу при условии $n \to \infty$, получим $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \varphi(x^*)$, т.е. $x^* = \varphi(x^*)$. Следовательно, точка x^* является неподвижной точкой функции $\varphi(x)$.

Возникает вопрос, какими качествами должна обладать функция $\varphi(x)$, чтобы числовая последовательность $\{x_n,\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1,2,\ldots\}$ сходилась к неподвижной точке. Ответ на этот вопрос дают следующее определение и известная теорема [1].

Определение: Функция $\varphi(x)$ есть *сжимающее отображение*, если для любых x и y имеет место неравенство $|\varphi(x) - \varphi(y)| < q\ |x - y|$, $0 < q < 1$, т.е. расстояние между образами меньше чем расстояние между аргументами.

Теорема: Если функция $\varphi(x)$, определенная на некотором отрезке, является сжимающим отображением на этом отрезке с коэффициентом $0 < q < 1$, то последовательность $\{x_n,\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1,2,\ldots\}$ сходится.

Следовательно, если функция $\varphi(x)$ – сжимающее отображение, то последовательность $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ имеет неподвижную точку $x^* = \varphi(x^*)$, причем $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$.

Достаточное условие сжимаемости. В области непрерывности функции $f(x)$ имеет место формула конечных приращений Лагранжа $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$, $x < z < y$. Следовательно, для непрерывной функции $\varphi(x)$ имеет место равенство $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(z)||x - y|$. И при выполнении условия $|\varphi'(z)| < 1$, справедливо неравенство $|\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y|$.

Таким образом, достаточным условием сжимаемости непрерывной в некоторой области функции является достаточно малое по абсолютной величине значение ее производной в этой области.

Вывод: Для того чтобы числовая последовательность $\{ x_n : x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1, 2, ... \}$ сходилась к неподвижной точке $x^* = \varphi(x^*)$, достаточно чтобы для функции $\varphi(x)$ выполнялось условие $|\varphi'(x)| < 1$.

Процесс формирования цены товара на рынке обычно геометрически иллюстрируется с помощью "паутинной" модели [2]. В случае, когда потребление опережает производство, т.е. выполняется условие (4) и кривая предложения более пологая, чем кривая спроса, спираль закручивается и, как следствие, цена стремится к устойчивому состоянию и точка рыночного равновесия является устойчивой. В противном случае спираль раскручивается и цены "разбегаются" от равновесной цены, т.е. точка рыночного равновесия не является устойчивой. Возможен, наконец, и такой вариант, когда цена совершает регулярные колебательные движения вокруг положения равновесия. Это происходит в том случае, если углы наклона кривых спроса и предложения равны. В этом случае неравенство (4) превращается в равенство.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. - 544с.
2. Мэнкью Н. Г. Принципы экономикс. М.: ПИТЕР,2004.- 623 с.