УДК 519.17

О СВЯЗИ ПОНЯТИЙ ГРАНИЧНОГО И МИНИМАЛЬНОГО СЛОЖНОГО КЛАССОВ ГРАФОВ

Д.С. Малышев [1,2]

[1] Государственный университет – Высшая школа экономики (Нижегородский филиал)
[2] Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

dsmalyshev@rambler.ru

Поступила в редакцию 09.12.2011

Понятия минимального сложного и граничного классов графов являются полезными инструментами при анализе вычислительной сложности задач на графах. Доказывается, что для конечно определенных классов графов эти понятия совпадают. Приводится пример, показывающий, что для бесконечно определенных классов графов это не так.

Ключевые слова: наследственный класс, граничный класс, минимальный сложный класс, задача о списковом ранжировании.

Введение

В работе рассматриваются *наследственные классы графов*, т.е. множества графов, замкнутые относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный класс графов **X** может быть задан множеством своих *запрещенных порожденных подграфов* **S**, при этом принята запись **X**=*Free*(**S**). Минимальное по включению множество **S** с таким свойством существует, единственно и обозначается через *Forb*(**X**). Если *Forb*(**X**) конечно, то **X** называется *конечно определенным*, в противном случае этот класс называется *бесконечно определенным*. Многие классы графов, интересные с теоретической и практической точек зрения, являются наследственными. Например, леса, двудольные графы, реберные графы образуют наследственные классы. Первые два из этих множеств являются бесконечно определенными (это следует из определения лесов и теоремы Кенига), а третье – конечно определенным [5].

Пусть П – какая-нибудь NP-полная задача на графах. Наследственный класс графов называется П-*простым*, если задача П для графов из этого класса полиномиально разрешима, и П-*сложным* в противном случае. Очевидно, что каждый наследственный класс графов является либо П-*простым*, либо П-*сложным*. Ясно также, что если задача П является NP-полной для графов из какого-нибудь наследственного класса **X**, то **X** – П-сложный. Это верно, если $P \neq NP$. Некоторые результаты этой работы, а также цитированные результаты других работ верны при справедливости этого предположения, и автор разделяет его. Поэтому условие $P \neq NP$ не включается явно в формулировки утверждений.

Значительный накопленный опыт (см. [1,3]) подразделения наследственных классов графов на П-простые и П-сложные привел к тенденции рассматривать и изучать «критические» классы графов, т.е. те наследственные классы, которые играют особую роль при исследовании вычислительного статуса задачи П в решетке наследственных классов. Естественными «критическими» классами являются минимальные (по включению) П-сложные классы и максимальные (по включению) П-простые классы. Однако последних нет ни для одной задачи на графах (это доказано в [6] для задачи о независимом множестве, но все рассуждения легко переносятся и на общий случай). Минимальные П-сложные классы графов тоже существуют не всегда. Так, в [2] доказано, что для любой задачи распознавания принадлежности графа наследственному классу нет минимальных сложных классов. Этот результат, например, действует для обеих задач о k-раскраске (вершинного и реберного вариантов) при любом $k > 2$ (поскольку свойство «иметь правильную раскраску вершин (ребер) в k цветов» является наследственным). С другой стороны, в [2] для некоторых задач П были выявлены П-минимальные сложные классы.

Итак, как следует из [2], для многих задач на графах в сложном классе содержится меньший сложный класс. Это означает, что каждый сложный класс принадлежит убывающей бесконечной цепи из сложных классов графов. Особый интерес вызывают пределы таких цепей, т.к. интуиция подсказывает, что такие классы могут быть весьма полезными при анализе вычислительной сложности задач в семействе наследственных классов графов. Для конечно определенных классов графов эти надежды в полной мере оправдываются. Дадим соответствующие определения и сформулируем результат. Класс графов **X** называется П-*предельным*, если существует такая бесконечная последовательность $\mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_2 \supseteq \ldots$ из П-сложных классов, что $\mathbf{X}=\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbf{X}_i$. Минимальный по включению П-предельный класс называется П-*граничным*. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Конечно определенный класс графов является П-сложным тогда и только тогда, когда он включает какой-нибудь П-граничный класс.

Понятие граничного класса было введено В.Е. Алексеевым в [6], им же была доказана теорема 1. Значение этого понятия состоит в том, что известное множество П-граничных классов позволяет полностью описать все конечно определенные П-простые классы графов. К сожалению, для бесконечно определенных классов графов теорема 1 верна только в одну сторону – П-сложный класс содержит некоторый П-граничный класс (лемма 4 из работы [6]) и неверно, что надкласс П-граничного класса является П-сложным (соответствующие примеры обсуждаются в диссертации [3]).

В центре внимания настоящей работы – соотношение понятий граничного и минимального сложного классов графов. Для конечно определенных классов графов ситуация предельно проста – такой класс является П-минимальным сложным тогда и только тогда, когда он является П-граничным классом (теорема 2 настоящей работы). Для бесконечно определенных классов все оказалось гораздо сложнее. Есть довольно много примеров П-граничных классов, являющихся простыми бесконечно определенными классами (см. [3]). Есть и примеры бесконечно определенных классов, являющихся одновременно П-граничными и минимальными П-сложными [2]. Вместе с тем был открытым вопрос о существовании минимальных П-сложных классов, не являющихся П-граничными классами. В этой статье будет показано, что такие ситуации возможны. В качестве задачи П рассматривается некоторое ослабление задачи о списковом ранжировании, которая, в свою очередь, является обобщением задачи о списковой раскраске. Рассмотрим ее постановку для вершинного варианта задачи.

Заданы граф G с множеством вершин V и множество $\mathrm{L} = \{L(v) : v \in V\}$, где каждое $L(v)$ – конечное множество натуральных чисел (цветов, в которые разрешается покрасить вершину v). L-ранжированием ребер графа G называется такая раскраска c его ребер, что:

1. $\tilde{n}(v) \in L(v)$ для каждой вершины v;
2. Если $c(v_1) = c(v_2)$, $v_1 \neq v_2$, то каждый путь, соединяющий v_1 и v_2, содержит такую вершину v_3, что $c(v_3) > c(v_1)$.

Задача о вершинном списковом ранжировании (далее задача ВСР) состоит в том, чтобы по данным G и L определить, существует ли L-ранжирование вершин графа G. Уточним, что под ВСР-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что задача ВСР для графов из этого класса решается за полиномиальное время при любом множестве G. В постановке задачи о реберном списковом ранжировании слово «вершина» заменяется словом «ребро».

Задача об условном вершинном списковом ранжировании (далее задача УВСР) состоит в том, чтобы по данным G и L определить, существует ли L-ранжирование вершин графа G при условии, что G либо сам является гребенкой, либо не является собственным порожденным подграфом никакой гребенки. При невыполнении каждого из этих двух условий ответ рассматриваемой задачи распознавания считается положительным. Под *гребенкой* $Comb(i)$ понимается граф, получаемый добавлением к простому пути $P_{3i} = (a_1, a_2,\ldots,a_{3i})$ вершин $b_1, b_2,\ldots,b_i$ и ребер (b_1, a_{i+1}), $(b_2, a_{i+2}),\ldots,(b_i, a_{2i})$. В постановке задачи об условном реберном списковом ранжировании слово «вершина» заменяется словом «ребро».

В этой работе будет доказано, что для обеих задач об условном списковом ранжировании (вершинного и реберного вариантов) класс **Comb** (состоящий из всевозможных порожденных подграфов гребенок) является минимальным сложным классом, а множество графов (обозначенное в [4] через $\mathbf{T}_1$), каждая компонента связности которых – либо простой путь, либо получается подразбиениями не более чем двух ребер графа $K_{1,3}$, является граничным классом.

Результаты работы

Теорема 2. Для любой задачи П конечно определенный класс графов **X** является минимальным П-сложным тогда и только тогда, когда он является П-граничным.

Доказательство. Если **X** является минимальным П-сложным, то он является П-предельным, а значит, по теореме 1 существует такой П-граничный класс **Y**, что $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$. Данное включение не может быть строгим, т.к. в противном случае существует такой граф $G \in \mathbf{X}\text{-}\mathbf{Y}$, что $\mathbf{X} \cap Free(\{G\}) \supseteq \mathbf{Y}$, и по теореме 1 класс $\mathbf{X} \cap Free(\{G\})$ является П-сложным. Следовательно, класс **X** не является минимальным П-сложным, что неверно. Значит, **Y=X**.

Если **X** является П-граничным, то по той же теореме 1 этот класс является П-сложным. Вместе с тем, **X** должен быть и минимальным П-сложным, т.к. существование собственного сложного его подкласса означает, что **X** не является минимальным по включению среди П-предельных. Теорема 2 доказана.

Итак, для конечно определенных классов графов понятия граничного и минимального сложного классов совпадают. Оказывается, что для бесконечно определенных классов это не так, т.е. существуют примеры задач на графах, для которых некоторые минимальные сложные классы содержат граничные классы в качестве собственных подмножеств. Именно, для задач об условном списковом ранжировании класс **Comb** является минимальным сложным, а класс $\mathbf{T_1} \subset \mathbf{Comb}$ является граничным. Для обоих вариантов задачи (вершинного и реберного) доказательства этих утверждений весьма похожи, и для простоты далее рассматривается только задача УВСР.

Репей $Burdock(i)$ – результат добавления к простому циклу $P_{i^2} = (a_1, a_2, \ldots, a_{i^2})$ вершин $b_1, b_2, \ldots, b_i$ и ребер (b_1, a_i), $(b_2, a_{2i}), \ldots, (b_i, a_{i^2})$.

Теорема 3. Класс **Comb** является минимальным УВСР-сложным, а класс $\mathbf{T_1}$ является УВСР-граничным.

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 3 из работы [4] можно показать, что задача ВСР является NP-полной в классах графов $\{Comb(i): i \geq 1\}$ и $\{Burdock(i): i \geq 1\}$. Поэтому класс **Comb** является УВСР-сложным и при любом $j \geq 1$ класс $\mathbf{X}_j = \{G$: существует такое $i \geq j$, что граф G является порожденным подграфом репья $Burdock(i)\}$ тоже является УВСР-сложным. Последнее следует из того, что для любого $j \geq 1$ классу $\mathbf{X}_j$ не принадлежит лишь конечное множество репьев.

Докажем, что **Comb** является минимальным УВСР-сложным классом. Для любого графа G из этого класса существует такое $i = i(G)$, что граф G является порожденным подграфом гребенки $Comb(i)$. Но тогда $\mathbf{Comb} \cap \mathrm{Free}(\{Comb(i)\}) \supseteq \mathbf{Comb} \cap \mathrm{Free}(\{G\})$, и сложность задачи УВСР для графов из $\mathbf{Comb} \cap \mathrm{Free}(\{Comb(i)\})$ совпадает со сложностью той же задачи для графов из $\{Comb(i): i \geq 1\} \cap \mathrm{Free}(\{Comb(i)\})$. Это множество содержит конечное множество гребенок, и поэтому любой собственный наследственный подкласс класса **Comb** является УВСР-простым.

Докажем, что класс $\mathbf{T_1}$ является УВСР-граничным. Действительно, $\mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_2 \supseteq \ldots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbf{X}_i = \mathbf{T_1}$. Поэтому $\mathbf{T_1}$ является УВСР-предельным. В статье [4] доказано, что этот класс является ВСР-граничным. Очевидно, что любой УВСР-предельный класс, являющийся ВСР-граничным, будет УВСР-граничным. Поэтому класс $\mathbf{T_1}$ является УВСР-граничным. Теорема 3 доказана.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 10-01-00357-а и № 11-01-00107-а, и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2012 гг.», номер ГК 16.740.11.0310.

Список литературы

1. Алексеев В.Е. Исследование количественных и сложностных характеристик наследственных классов графов: Дисс. … д-ра физ.-мат. наук по специальности 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика». Нижний Новгород, 2002 г. 116 с.

2. Малышев Д.С. О минимальных сложных классах графов // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16. № 6. С. 43–51.

3. Малышев Д.С. Исследование границ эффективной разрешимости в семействе наследственных классов графов: Дисс. … канд. физ.-мат. наук по специальности 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика». Нижний Новгород, 2009 г. 113 с.

4. Малышев Д.С., Алексеев В.Е. Граничные классы графов для задач о списковом ранжировании относительно лесов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. № 6. С. 61–70.

5. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1982.

6. Alekseev V.E. On easy and hard classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. 2004. V. 132. № 3. P. 17–26.

ON A RELATION BETWEEN NOTIONS OF BOUNDARY AND MINIMAL HARD CLASSES OF GRAPHS

D.S. Malyshev

The notions of boundary and minimal hard classes of graphs are helpful tools for the analysis of the computational complexity of graph problems. It is shown that these notions coincide for finitely defined classes of graphs. An example is given to show that this is not true for infinitely defined classes of graphs.

Keywords: hereditary class, boundary class, minimal hard class, list-ranking problem.