

3. Математика как наука. Современные математические подходы и концепции

Предмет математики и математические методы	<i>Математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. В нее входят такие дисциплины, как арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, высшая математика (аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ, дифференциальное и интегральное исчисления и др.). Каждая из них изучает количественные отношения и пространственные формы мира в особом аспекте и действует своими собственными методами.</i>
---	---

Математика характеризуется высокой степенью абстрактности ее понятий (точки, не имеющие площади, линии без толщины, множества любых предметов и т.п.) и высокой степенью их общности (в алгебре буква обозначает любое число, в математической логике рассматривается структура произвольных высказываний).

Предмет математики в действительном мире - это пространственные формы и количественные отношения мироздания. Отсюда вытекает проблема выделения количественных отношений в чистом виде, то есть возникает вопрос, как описать отношения равенства, принадлежности, соизмеримости, геометрические отношения и т.п. таким образом, чтобы это описание не зависело от содержания объектов. *Это проблема создания метода, адекватного предмету исследования.*

В ходе становления и развития математики постепенно формировались ее основные методы такие, как анализ и синтез, индукция и дедукция, обобщение и абстрагирование, аналогия и различные типы аксиоматик - содержательная, полужформальная и формальная.

Среди обозначенных методов, применяемых в математике для выделения формы в чистом виде и ее изучения, специфическим методом математики является только *аксиоматический метод*. Это способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые аксиомами теории, а все остальные предложения теории получаются дедуктивно как логические следствия аксиом.

Теория, созданная на основе этого метода, называется аксиоматической. В аксиоматической теории все термины разделяются на исходные и производные, а все предложения – на недоказуемые (аксиомы) и доказуемые (теоремы). Считается, что система аксиом, положенная в основу аксиоматической теории должна характеризоваться полнотой и независимостью, а сама аксиоматическая теория – непротиворечивостью. Однако эти три принципа выполняются далеко не всегда.

Понятие числа. Некоторые современные обобщения понятия	<i>Число – абстракция, используемая для количественной характеристики объектов,</i>
---	---

является важнейшим понятием математики. Возникнув в первобытном обществе, представление, а затем понятие о числе с течением веков меняло свое содержание. Определение понятия натурального числа дано в 70-е гг. XIX в. в работах Г. Кантора. Чтобы подойти к понятию числа, Кантор сначала определяет понятие равномощности совокупностей. Он пишет, что две совокупности являются равномощными, если составляющие их предметы могут быть сопоставлены по одному. Затем число предметов, составляющих данную совокупность, определяется как то общее, что имеет данная совокупность и всякая другая, равномощная ей. Такое определение отражает сущность натурального числа как результата счета предметов, составляющих данную совокупность.

Другой подход к определению натурального числа предложил в 1884 г. Ф. Фреге. В начале XX века Б. Рассел вновь привлек к нему внимание ученого сообщества. Подход Фреге в изложении Рассела выглядит следующим образом. «Обычно «число» раньше отождествляли с «множественностью, совокупностью». Однако конкретный пример «числа» – это определенное число, скажем, 3, а конкретный пример 3 – это определенная тройка. Тройка и есть совокупность, а класс всех троек, который Фреге отождествляет с числом три, есть совокупность совокупностей, а число вообще, частным случаем которого является 3, есть совокупность совокупностей совокупностей»¹. Однако такое определение числа широкого признания не получило.

Наряду с основной линией развития понятия числа (натуральные числа, рациональные числа, действительные числа, комплексные числа), потребности развития некоторых областей математики вызвали к жизни различные обобщения понятия числа. Как установлено К. Вейерштрассом, совокупность всех комплексных чисел не может быть расширена за счет присоединения новых чисел так, чтобы в расширенной совокупности сохранились все законы математических действий, имеющие место в совокупности комплексных чисел. Поэтому обобщения понятия числа были сделаны в существенно других направлениях. Появились понятия гиперкомплексных, трансфинитных, p -адических чисел. В алгебре изучаются различные системы объектов, обладающие свойствами, в большей или меньшей степени близкими к свойствам совокупностей целых или рациональных чисел – группы, алгебры, кольца, поля.

Проблема обоснования математики

Проблема обоснования математики – это вопрос о том, какие объекты допустимы в математике и как они могут существовать, то есть *это проблема математического доказательства*. Доказательство

– фундаментальная характеристика математического познания, но что есть доказательство в математике?

В XVII-XVIII вв. математики стали постепенно осознавать, что математические образы имеют некоторую автономию от физической

¹ Б. Рассел. История западной философии. Новосибирск, 2003. С.954-955.

реальности, а значит, обращение к этой реальности не может содействовать проверке истинности или ложности математических теорий. В истории европейской философии этот взгляд не был новым: об усмотрении математического знания непосредственно разумом писал древнегреческий философ Платон, априорными считал основные математические понятия и законы И. Кант.

Французский математик О. Коши в начале XIX века ввел в математику теоремы существования, которые ознаменовали новый этап в понимании статуса математического объекта. В проблеме существования математического объекта на первый план стал выдвигаться логический момент, требование обосновать допустимость того или иного предположения без ссылки на внешние эмпирические обстоятельства, на основе собственного математического аппарата. Создание геометрии Н.И. Лобачевского обострило проблему доказательства в математике, так как стало ясно, что здравый смысл, опирающийся в своих суждениях на объективную реальность, не может быть критерием истинности математических аксиом. К концу XIX века утвердился взгляд на математику как особую науку, не связанную непосредственно с какой-либо эмпирической реальностью. Математика должна удовлетворять лишь требованию логической непротиворечивости.

Однако требования непротиворечивости определений математики остаются декларативными до тех пор, пока не указаны эффективные способы доказательства этой непротиворечивости. *Отсюда вытекает проблема обоснования математики в XX в.*

Одна из первых попыток обоснования математики - ***теоретико-множественное обоснование*** - принадлежит немецкому математику Г. Кантору (1845-1918). Он предложил свести все существующие математические теории к разработанной им теории множеств. Однако это оказалось невозможным. Английский философ и математик Б. Рассел обнаружил логическое противоречие, выводимое из исходных понятий теории множеств и основных ее предложений. Его суть такова. Согласно основным принципам теории множеств, в эту теорию можно ввести такие объекты, как «множество всех множеств» и «множество всех множеств, не содержащих себя в качестве своего элемента». Отсюда следует, что можно высказать суждение о том, что «множество всех множеств, не содержащих себя в качестве своего элемента» принадлежит множеству всех множеств, не содержащих себя в качестве своего элемента. Такое суждение не будет ни истинным, ни ложным, что означает логическое противоречие. Поскольку логически противоречивая теория не могла быть положена в основу математики, канторовское обоснование было отвергнуто.

Б. Рассел (1872-1970) и А. Уайтхед (1861-1947) предложили ***логицистское обоснование математики***, то есть попытались свести математику к логике. Было предложено ограничить канторовскую теорию множеств, запретив вводить такие объекты, как «множество, содержащее себя в качестве своего элемента». Элементами множества теперь могли быть

только объекты, имеющие тип, непосредственно предшествовавший типу вводимого множества. Вследствие этого, теория Рассела стала теорией, изучающей предметы и множества, классифицируя их по типам, а потому и получила название «теория типов».

Математика, построенная на основаниях логицизма, сильно отличалась от обычной математики. В силу ограничения теории множеств из математики исключались целые разделы. Кроме того, для каждого типа предметов и множеств приходилось вводить собственную арифметику. В теории типов не было парадоксов, замеченных Расселом и другими математиками, но доказать непротиворечивость этой теории метатеоретическими средствами (то есть средствами более общей теории) оказалось невозможно. В итоге ученое сообщество пришло к выводу, что теория типов не представляет удовлетворительных оснований для математики в целом.

Формалистское направление предложило иной подход к обоснованию математики. Программа Д.Гильберта (1862-1943) предполагала доказательство непротиворечивости математики точным математическим способом. С точки зрения формализма обоснование математической теории не должно зависеть от ее содержания. Следует опираться только на формы теории, то есть доказательство должно быть формальным (синтаксическим), а не содержательным (семантическим). Поскольку непротиворечивость математической теории, создаваемой аксиоматическим методом, означает, что ни одно из доказательств, возможных в этой теории, не ведет к противоречию, программа обоснования математики Д.Гильберта предусматривала уточнение понятия доказательства таким образом, чтобы сами доказательства могли быть объектами точной математической теории – теории доказательств или метаматематики. Это осуществлялось с помощью формализации существующих теорий, то есть замены математической теории соответствующей ей формальной системой, (записью теории на некотором формальном языке).

Попытка осуществления программы Д.Гильберта оказалась несостоятельной. Как вытекает из теоремы К. Гёделя (1906-1978) о неполноте, во всякой формальной системе, содержащей арифметику, можно найти утверждение, которое невозможно доказать или опровергнуть в рамках этой теории.

Интуиционисты Г. Вейль (1885-1955) и А. Рейтинг выдвинули критерий интуитивной ясности при оценке истинности суждения. Такая ясность достигается, если построение математических объектов потенциально осуществимо. Поэтому обоснование математики средствами интуиционизма предполагало удаление из предмета математики всех тех объектов, существование которых предполагает сильные идеализации. При таком условии из математики удаляются, например, актуально бесконечные множества. Главный недостаток интуиционистского обоснования математики критики этого направления видели в том, что при таком подходе сужается предмет математики, а некоторые разделы традиционной математики приобретают весьма необычный вид.

Отечественная школа конструктивизма А. А. Маркова (1903-1979)

видела свою задачу в выделении конструктивной части обычной математики и изучении ее в чистом виде. Это имело большое значение в связи с развитием вычислительной математики. Обоснование конструктивной математики предполагало конструктивное построение самих математических теорий. Конструктивная математика систематически использовала две абстракции: абстракцию потенциальной осуществимости и абстракцию отождествления. Первую из них применяли, отвлекаясь от практических ограничений конструктивных возможностей в пространстве, времени и материале. Вторую абстракцию использовали, говоря о двух в том или ином смысле одинаковых объектах как об одном и том же объекте. В конструктивной математике не применялась характерная для теоретико-множественной математики абстракция актуальной бесконечности, и это сближает ее с интуиционистской математикой.

С точки зрения конструктивизма далеко не вся классическая математика могла быть обоснована, но неконструктивные части математики удалять из нее не предполагалось. Обоснование или отбрасывание этих частей математики не входило в задачу конструктивизма, и в этом его отличие от всех рассмотренных выше направлений обоснования математики.

Таким образом, различные направления в обосновании математики исходили из принимаемых тем или иным направлением идеализаций, но создать удовлетворительные основания для всей математики ни одному из направлений не удалось. Однако работы представителей этих направлений содействовали углублению представлений о математической теории, аксиоматическом методе, математическом доказательстве; сформировалась такая часть современной математики как математическая логика. Рассмотренные направления позволили выявить такую фундаментальную особенность математики как неполнота формализации любых содержательных математических теорий и показали, что правомерно говорить в XX веке о феномене «множественности математик».

Начиная с 1960-х гг. намечается тенденция к сдвигу проблематики обоснований математики в направлении решения задач, связанных с «машинной математикой». Перспективы развития математики и поиски ее оснований начинают зависеть от взаимодействия человека и машины, в ходе которого возникают специфические критерии математического доказательства, связанные с развитием информатики, математического программирования, информационных технологий.

**Тенденции
развития
математики в XX –
начале XXI вв.**

Период современной математики (XIX – начало XXI вв.) характеризуется следующими основными чертами.

- Углубленный анализ накопленного математикой огромного фактического материала и объединение его с новых точек зрения.

- Активная разработка проблем обоснования математики: критический пересмотр ее исходных положений (аксиом), построение строгой системы определений и доказательств, критический анализ логических приемов, употребляемых в ходе этих доказательств.
- Расширение круга количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой: исследуются отношения между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, все разнообразие форм пространств любого числа измерений и т.п.
- Сознательное и активное создание математиками принципиально новых математических теорий на основе аксиоматического метода путем правильно выполненного абстрагирования от налагавшихся ранее ограничений, не имеющих внутренней логической необходимости. Наиболее яркие примеры – создание неевклидовых геометрий и многомерных алгебр.
- Формирование новых математических дисциплин, таких как дискретная математика, математическая логика, теория алгоритмов, теория информации, теория игр, математическое программирование и др.
- Усложнение и углубление традиционных связей с естествознанием и техникой, расширение использования математических методов в биологии, социальных и гуманитарных науках.
- Расширение области применения математики вследствие развития ЭВМ и компьютеризации всех сфер общественной жизни.

Кратко охарактеризуем основные направления развития математики в XX в. Формируются различные теории функций. Ф.Клейн и А. Пуанкаре создали теорию автоморфных функций (к их числу относятся, например, периодические функции). В этой теории находят замечательные применения неевклидова геометрия Лобачевского. Э. Пикар, А. Пуанкаре, Ж. Адамер, Э.Борель разработали теорию целых функций. Геометрическую теорию функций и теорию римановых поверхностей (то есть поверхностей, имеющих место в неевклидовой геометрии Б. Римана) развивали А. Пуанкаре, Д. Гильберт и др.

В результате систематического построения математического анализа на основе строгой арифметической теории иррациональных чисел и теории множеств возникла новая отрасль математики – теория функций действительного переменного. Под этим названием понимают по преимуществу исследование основных понятий анализа с достаточно общей точки зрения. Основы современной теории функций действительного переменного заложили математики французской школы (К. Жордан, Э. Борель, А. Лебег, Р. Бэр), но затем ведущая роль в разработке этой теории перешла к русским и советским математикам, в частности к московской математической школе (Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин, А.Я. Хинчин, Д.Е. Меньшов, Н.К. Бари, А.Н. Колмогоров и др.), работы которой внесли большой вклад в создание метрической теории функций – важного раздела теории функций действительного переменного, в котором изучаются

свойства функций на основе понятия меры множеств.

Исследование функций действительного переменного велось и с другой, примыкающей к идеям П.Л. Чебышева (1821-1894), классической точки зрения. Наиболее значительные результаты на этом направлении были получены в конце XIX – первой половине XX вв. русскими и советскими математиками. В частности, принципиальный вклад в изучение приближения функций комплексного переменного внесли М.А. Лаврентьев, В.М. Келдыш, С.Н. Мергелян.

Теория функций действительного переменного оказала большое влияние на развитие многих других разделов математики. Выработанные в ее пределах методы оказались особенно необходимы при построении основ функционального анализа, достижения которого широко применяются в квантовой физике, главным образом, в теории операторов. Центральное положение в функциональном анализе занимает теория бесконечномерных пространств, разработанная в наиболее употребительной ныне форме С. Банахом, и операторов в них.

Наибольшее число задач, выдвигаемых перед математикой естествознанием и техникой, сводится к решению дифференциальных уравнений. Поэтому интенсивно развиваются все направления исследований дифференциальных уравнений. Для решения сложных линейных и нелинейных систем создаются новые методы. Продолжает разрабатываться теория обыкновенных дифференциальных уравнений (А. Пуанкаре и др.). Однако наибольшее внимание привлекают вопросы качественного исследования обыкновенных дифференциальных уравнений: классификация особых точек (А. Пуанкаре и др.), вопросы устойчивости, особенно глубоко изученные А.М. Ляпуновым.

Качественная теория дифференциальных уравнений послужила А. Пуанкаре отправным пунктом для широкого продолжения едва намеченных Б. Риманом исследований по топологии многообразий, особенно в направлении изучения неподвижных точек и их непрерывных отображений на самих себя. Здесь получил свое начало целый ряд методов современной топологии. Другое направление в топологии возникло на основе теории множеств и функционального анализа и привело к систематическому построению общих топологических пространств, в частности, теории их размерности.

Теория дифференциальных уравнений с частными производными еще в конце XIX в. приобретает новый вид. Однако аналитическая теория, восходящая к О. Коши, К. Вейерштрассу и С.В. Ковалевской, не теряет своего значения, хотя и несколько отступает на второй план, так как обнаруживается, что при рассмотрении ряда задач она не гарантирует возможности приближенно найти решение. Наиболее удачным подходом оказалось обращение к физическим представлениям (о распространении волн, течении тепла, диффузии и др.). Поэтому теория дифференциальных уравнений с частными производными превращается по преимуществу в теорию уравнений математической физики. После П. Дирехле и Б. Римана

уравнениями математической физики занимались А. Пуанкаре, Ж. Адамар, Д. Гильберт, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов и др.

Существенным дополнением к методам дифференциальных уравнений при изучении природы и решении технических задач являются методы теории вероятностей. Наиболее глубокие исследования по общим вопросам теории вероятностей в конце XIX – первой половине XX вв. принадлежат русской школе (П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов). В XX в. происходит общий подъем интереса к теории вероятностей во всех странах. Создаются основы теории случайных процессов, и дается окончательная форма аксиоматического изложения теории вероятностей, исходящая из усмотренных впервые Э. Борелем аналогий между понятием вероятности и понятием меры в теории функций действительного переменного.

Практическое использование результатов математического исследования требует получения ответа на поставленную задачу в численной форме. Между тем даже после исчерпывающего теоретического разбора задачи это часто оказывается не легким делом. В конце XIX – начале XX вв. численные методы анализа оформились в самостоятельную ветвь математики. Особенно большое внимание уделялось при этом методам численного интегрирования дифференциальных уравнений (методы Д.Ж. Адамса, С. Штермера, К. Рунге и др.) и квадратурным формулам (П.Л. Чебышев, А.А. Марков, В.А. Стеклов). Широкое развитие работ, требующих численных расчетов, привело к составлению и публикации все возрастающего количества математических таблиц.

Во второй половине XX – начале XXI вв. математика стремительно развивается. Потребности развития самой математической науки, «математизация» научных дисциплин, проникновение математических методов во многие сферы практической деятельности, быстрый прогресс вычислительной техники приводят к смене приоритетов и к появлению целого ряда новых математических дисциплин, таких как теория алгоритмов, теория информации, исследование операций, теория игр, математическое программирование и др.

На основе теории задач управляющих систем, комбинаторного анализа, теории графов, теории кодирования возникла дискретная математика.

Проблемы наилучшего управления физическими или механическими системами привели к созданию математической теории оптимального управления, вопросы управления объектами в конфликтных ситуациях – к возникновению и развитию теории дифференциальных игр.

Исследования в области общих проблем управления и связанных с ними областях математики создают основу для автоматизации все новых и новых сфер человеческой деятельности.

Появилась и активно развивается теория систем искусственного интеллекта, весомым вкладом в которую является предложенная В.А. Фомичевым Интегральная формальная семантика, представляющая собой теорию математического описания процессов общения интеллектуальных систем (в первую очередь, человека и компьютера) на естественном языке.

Активно развиваются новые информационные технологии, базирующиеся на фундаментальных результатах в области искусственного интеллекта – методах и концептуальных объектно-ориентированных языках представления знаний 5-го поколения. Эти методы позволяют осуществлять эффективное концептуальное моделирование сложных динамических областей широкого класса.

Продолжаются работы и в области традиционных разделов математики. Разрабатываются топология, теория инвариантов, алгебраическая геометрия, теория представлений, теория графов, математический анализ и теория функций, теория дифференциальных уравнений, функциональный анализ и его приложения, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика и др.

Взаимосвязь математики и других наук

Математика в высокой степени абстрактная наука, однако, она не оторвана от реальной действительности. Математика развивается, как

исходя из внутренней логики математического знания, так и под воздействием запросов естествознания и техники, в рамках которых математика выступает как прикладная наука.

Потребности науки и техники стимулируют развитие теоретической математики. Так, создание метода наименьших квадратов связано с геодезическими работами; из запросов электротехники возник новый раздел теории вероятностей – теория информации; развитие методов приближенного решения дифференциальных уравнений связано с нуждами астрономии и т.д.

Приложения математики весьма разнообразны. *Принципиально область применения математического метода не ограничена: все формы движения материи, а также сознание могут исследоваться математически. Однако роль и значения математического метода в различных ситуациях далеко не одинаковы.* Математическая схема не в состоянии вполне адекватно описать действительность в ее конкретности, поэтому процесс познания конкретного протекает в борьбе двух подходов. С одной стороны, происходит выделение формы изучаемых явлений и осуществляется анализ этой формы. С другой – выявляются факты, не укладывающихся в установленные формы, и происходит поиск новых форм, более гибких, способных полнее охватить изучаемые явления и процессы.

Применение математического метода оправдано в том случае, если сравнительно простые и устойчивые формы изучаемых явлений характеризуют эти явления с большой точностью и полнотой, но возникают сложные проблемы в пределах данных зафиксированных форм. Если же каждый новый шаг исследования связан с привлечением к рассмотрению качественно новых сторон явления, то математический метод или вовсе не применим, или способен играть лишь вспомогательную роль. В противном случае анализ всей конкретности явления будет только затемнен математической схематизацией.

В науке XX – начала XXI вв. значение математического метода

возрастает. Это связано как с прогрессом самой математики, так и с успехами естественных, технических, социальных и гуманитарных наук. Однако ожидать сколько-нибудь полной математизации наук об обществе и результатах человеческого мышления в обозримом будущем не приходится: прогрессивное развитие социальных и гуманитарных дисциплин невозможно без глубокого качественного анализа изучаемых явлений.

В настоящее время наиболее универсальными математическими методами, широко и успешно применяемыми в разных науках, являются **методы математической гипотезы и математического моделирования.** Данные методы позволяют спрогнозировать и изучать явления в любой сфере человеческой деятельности, поэтому они используются не только в естествознании, но также и в социально-гуманитарных науках. Наиболее эффективно их использование в физике, технических науках, астрономии, социальной экологии.