Е. В. Жужома, В. С. Медведев, Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 5, 69–92

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/sm8565

УДК 517.938

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия

Рассматриваются непрерывные потоки Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия, на замкнутых многообразиях. Получены необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности таких потоков и описана топологическая структура несущих многообразий.

Библиография: 36 названий.

Ключевые слова: потоки Морса–Смейла, топологическая эквивалентность.

DOI: 10.4213/sm8565

§ 1. Введение

Пусть f^t – непрерывный поток на замкнутом n-мерном топологическом многообразии M^n, $n \geqslant 2$. Это означает, что для любого $t \in \mathbb{R}$ задан гомеоморфизм $f_t\colon M^n \to M^n$ так, что $f_0 = \mathrm{id}$ есть тождественное отображение и $f_{t_1+t_2} = f_{t_1} \circ f_{t_2}$ для любых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности $U(x) = U$ и любого числа $T > 0$ найдется $t_0 \geqslant T$ такое, что $U(x) \cap f_{t_0}(U) \neq \varnothing$. Множество неблуждающих точек образует неблуждающее множество потока, которое обозначается через $NW(f^t)$. Известно, что $NW(f^t)$ состоит из целых траекторий, т.е. является инвариантным множеством потока [1], [2]. Напомним, что два потока f_1^t, f_2^t на многообразиях M_1^n, M_2^n соответственно называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon M_1^n \to M_2^n$, переводящий каждую траекторию потока f_1^t в траекторию потока f_2^t. Ясно, что многообразия M_1^n, M_2^n и неблуждающие множества $NW(f_1^t)$, $NW(f_2^t)$ должны быть гомеоморфными. Если N_1, N_2 – инвариантные множества потоков f_1^t, f_2^t соответственно, то будем говорить, что эти потоки *локально топологически эквивалентны* на N_1, N_2, если существуют окрестности $U(N_1)$, $U(N_2)$ и гомеоморфизм $\varphi\colon U(N_1) \to U(N_2)$ такой, что $\varphi(N_1) = N_2$ и φ отображает каждую траекторию (или часть траектории), принадлежащую $U(N_1)$, в траекторию (или в часть траектории), принадлежащую $U(N_2)$; при этом концевые точки дуг траекторий из $U(N_1)$ должны переходить в концевые точки дуг траекторий из $U(N_2)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-03687-a) и гранта Российского научного фонда (проект № 14-41-00044) в рамках Программы федеральных исследований НИУ ВШЭ в 2016 г. (Т3-98).

В связи с открытием в середине прошлого века топологических многообразий, которые не допускают гладкой структуры (см., например, [3]), такие проблемы, как исследование топологической структуры несущего многообразия и топологическая классификация, должны рассматриваться не только для гладких потоков на гладких многообразиях, но и для непрерывных потоков на топологических многообразиях. Кроме того, при доказательстве топологической эквивалентности двух потоков обычно приходится строить промежуточные и необходимо непрерывные потоки, которые топологически эквивалентны исходным потокам. Особый интерес представляют непрерывные потоки, у которых неблуждающие множества аналогичны неблуждающим множествам гладких потоков с гиперболической структурой, поскольку последние обладают определенным типом устойчивости (см. [4]).

Напомним, что инвариантное и не имеющее состояний равновесия множество $\Lambda \subset M^n$ гладкого потока f^t называется *гиперболическим* (иногда говорят, что Λ имеет *гиперболическую структуру*), если ограничение $T_\Lambda M^n$ касательного расслоения TM^n многообразия M^n на Λ можно представить в виде суммы Уитни $E^s_\Lambda \oplus E_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ df^t-инвариантных подрасслоений E^s_Λ, E_Λ, E^u_Λ, $\dim E^s_m + \dim E^u_m = n-1$, $m \in \Lambda$, где E_Λ – одномерное подпространство, определяемое векторным полем потока, и существуют такие константы $C_s > 0$, $C_u > 0$, $0 < \lambda < 1$, что

$$\|df^t(v)\| \leqslant C_s \lambda^t \|v\|, \quad v \in E^s_\Lambda, \qquad \|df^{-t}(v)\| \leqslant C_u \lambda^t \|v\|, \quad v \in E^u_\Lambda, \qquad t > 0.$$

Если Λ является состоянием равновесия x, то определение его гиперболичности видоизменяется с учетом условий $E_\Lambda = \varnothing$ и $\dim E^s_x + \dim E^u_x = n$. Структура потока вблизи гиперболического состояния равновесия описывается теоремой Гробмана–Хартмана (см. [5]). Структура потока вблизи регулярной точки x (т.е. через x проходит одномерная траектория) выглядит следующим образом. Известно (см. [6], [7]), что подрасслоения $E^u_\Lambda \oplus E_\Lambda$, $E^s_\Lambda \oplus E_\Lambda$, E^u_Λ, E^s_Λ единственно интегрируемы, и мы обозначим через $W^u(x)$, $W^s(x)$, $W^{uu}(x)$, $W^{ss}(x)$ соответствующие слои, проходящие через точку $x \in \Lambda$. Эти слои называются соответственно *неустойчивым*, *устойчивым*, *строго неустойчивым*, *строго устойчивым многообразиями* точки $x \in \Lambda$. Для этих слоев выполняются следующие свойства (d – метрика на M^n, $O(x)$ – траектория потока, проходящая через точку x):

1) для некоторой константы $c > 0$ имеем

$$W^{uu}(x) = \bigl\{y \in M^n : d(f^t x, f^t y)e^{-c} \to 0 \text{ при } t \to -\infty\bigr\},$$
$$W^{ss}(x) = \bigl\{y \in M^n : d(f^t x, f^t y)e^{c} \to 0 \text{ при } t \to +\infty\bigr\};$$

2) выполняются равенства

$$W^{ss}(f^t(x)) = f^t(W^{ss}(x)), \qquad W^{uu}(f^t(x)) = f^t(W^{uu}(x)),$$
$$W^u(x) = \bigcup_{z \in O(x)} W^{uu}(x), \qquad W^s(x) = \bigcup_{z \in O(x)} W^{ss}(x);$$

3) слои $W^s(x)$, $W^u(x)$ являются инвариантными множествами;

4) слои $W^u(p)$, $W^u(q)$ либо совпадают, либо не пересекаются; аналогично для слоев W^s, W^{uu}, W^{ss}.

Простейшими потоками с гиперболическими неблуждающими множествами являются потоки Морса–Смейла, введенные Смейлом (см. [8], а также [4], [9] с историческими комментариями).

Будем называть f^t (непрерывным) *потоком Морса–Смейла*, если выполняются следующие условия.

1) Неблуждающее множество $NW(f^t)$ состоит из конечного набора состояний равновесия и периодических траекторий, причем α- и ω-предельные множества любой траектории лежат в $NW(f^t)$.

2) В окрестности каждой траектории из $NW(f^t)$ поток f^t локально топологически эквивалентен потоку либо с гиперболической периодической траекторией, либо с гиперболическим состоянием равновесия. Как следствие, для каждой траектории $l \subset NW(f^t)$ определяются (и существуют) устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(l)$, $W^u(l)$ соответственно, которые являются топологически вложенными подмногообразиями,

$$W^s(l) = \{x \in M^n \mid f_t(x) \to l\}, \quad W^u(l) = \{x \in M^n \mid f_{-t}(x) \to l\}, \qquad t \to \infty.$$

3) Для любых траекторий l_1, $l_2 \subset NW(f^t)$ многообразия $W^s(l_1)$, $W^u(l_2)$ топологически трансверсальны (это означает, что в окрестности любой точки из $W^s(l_1) \cap W^u(l_2)$ пересечение многообразий $W^s(l_1)$, $W^u(l_2)$ локально гомеоморфно трансверсальному пересечению гиперплоскостей в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$).

Из неравенств Морса, которые справедливы для непрерывных потоков Морса–Смейла, вытекает, что любой поток Морса–Смейла на замкнутом многообразии имеет хотя бы одну притягивающую и хотя бы одну отталкивающую траектории (см. [8]). Из связности несущего многообразия M^n (ниже мы всегда будем считать это многообразие связным, если не оговорено противное) вытекает, что если поток имеет один устойчивый и один неустойчивый узлы, то M^n является n-мерной сферой и поток топологически эквивалентен стандартному потоку типа “север–юг”.

В настоящей работе рассматриваются непрерывные потоки Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит ровно из трех состояний равновесия. Мы изучаем топологическую структуру несущих многообразий и решаем задачу топологической эквивалентности указанных потоков.

Нетрудно показать, что если двумерное замкнутое многообразие M^2 допускает поток Морса–Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех точек, то M^2 является проективной плоскостью, и любые два потока Морса–Смейла с тремя критическими точками на проективной плоскости топологически эквивалентны (см. соответствующие утверждения ниже). Этот результат мотивирует введение специального класса многообразий. Пусть M^n – топологическое замкнутое n-мерное многообразие, $n \geqslant 2$. Напомним, что топологически вложенная в M^n k-мерная сфера S^k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, называется *локально плоско вложенной*, если для любой точки $z \in S^k$ существуют окрестность $U(z) = U \subset M^n$ и гомеоморфизм $\varphi_z \colon U \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi_z(S^k \cap U) = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

Многообразие M^n называется *проективно-подобным*, если:

1) $n \in \{2, 4, 8, 16\}$;
2) M^n есть дизъюнктивное объединение[1] $n/2$-мерной сферы $S^{n/2}$, локально плоско вложенной в M^n, и открытого n-мерного шара B^n,

$$M^n = S^{n/2} \cup B^n, \qquad S^{n/2} \cap B^n = \varnothing.$$

Сфера $S^{n/2}$ из приведенного определения называется *образующей* для данного проективно-подобного многообразия. Первый результат настоящей работы относится к описанию топологической структуры несущего многообразия.

Теорема 1. *Пусть f^t – непрерывный поток Морса–Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия, на замкнутом n-мерном топологическом многообразии M^n, $n \geqslant 2$. Тогда M^n является проективно-подобным многообразием. При этом M^2 является проективной плоскостью $M^2 = \mathbb{P}^2$ (неориентируемой поверхностью рода единица с фундаментальной группой $\pi_1(M^2) = \mathbb{Z}_2$), а при $n \geqslant 4$*

$$\pi_1(M^n) = \dots = \pi_{n/2-1}(M^n) = 0, \ \text{и, следовательно, } M^n \text{ ориентируемое.}$$

Более того, на каждом проективно-подобном многообразии существует непрерывный поток Морса–Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия.

Сформулируем теперь основные результаты о топологической эквивалентности потоков. Для этого введем ключевое понятие локального эквивалентного вложения подмногообразия в несущее многообразие.

Пусть M_1^k, M_2^k – топологически вложенные в M^n k-мерные подмногообразия, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Будем говорить, что M_1^k и M_2^k *локально эквивалентно вложены*, если существуют окрестности $U(\operatorname{clos} M_1^k)$, $U(\operatorname{clos} M_2^k)$ топологических замыканий $\operatorname{clos} M_1^k$, $\operatorname{clos} M_2^k$ подмногообразий M_1^k, M_2^k соответственно и гомеоморфизм $h \colon U(\operatorname{clos} M_1^k) \to U(\operatorname{clos} M_2^k)$ такой, что $h(M_1^k) = M_2^k$. Для несущих многообразий размерностей $n = 8$ и $n = 16$ имеет место следующая теорема (отметим, что поток Морса–Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия, имеет ровно одно седло, и инвариантные многообразия (устойчивые и неустойчивые) этого седла являются топологически вложенными подмногообразиями).

Теорема 2. *Пусть f_i^t, $i = 1, 2$, – непрерывный поток Морса–Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия, на замкнутом n-мерном топологическом многообразии M_i^n, где $n = 8, 16$. Потоки f_1^t f_2^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

[1]Объединение называется *дизъюнктивным*, если объединяемые множества попарно не пересекаются.

1) *устойчивые многообразия седел потоков* f_1^t, f_2^t *локально эквивалентно вложены*;

2) *неустойчивые многообразия седел потоков* f_1^t, f_2^t *локально эквивалентно вложены*.

Для размерностей $n=2$ и $n=4$ имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* f_1^t, f_2^t *– непрерывные потоки Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия, на замкнутых топологических многообразиях* M_1^n, M_2^n *соответственно, где* $n=2,4$. *Тогда* f_1^t, f_2^t *топологически эквивалентны. В частности, многообразия* M_1^4, M_2^4 *гомеоморфны, а для размерности* $n=2$ *многообразия* M_1^2, M_2^2 *гомеоморфны проективной двумерной плоскости* $\mathbb{P}^2$.

Структура статьи следующая. В §2 приводятся вспомогательные результаты, на два из которых хотелось бы обратить особое внимание. В лемме 1 формулируется достаточное условие для топологического многообразия быть проективно-подобным многообразием. После этой леммы можно переходить к доказательству теоремы 1. В лемме 2 доказывается, что если образующие сферы проективно-подобных многообразий локально эквивалентно вложены, то многообразия гомеоморфны (достаточное условие гомеоморфности проективно-подобных многообразий). Остальные результаты из §2 нужны для доказательств теорем 2, 3. Основные результаты доказываются в §3.

Отметим результаты, имеющие отношение к рассматриваемой тематике. В 1962 г. Иллс и Куипер (см. [10]) доказали, что существуют замкнутые многообразия (в топологической, кусочно линейной и гладкой категориях), допускающие непрерывные функции Морса с тремя критическими точками. Отсюда вытекает существование замкнутых многообразий, допускающих потоки Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия. Заметим, что для потоков даже в гладкой категории имеется априорная возможность дикого вложения замыканий сепаратрис седловых состояний равновесия (поэтому изначально не ясно, можно ли представить несущее многообразие в виде локально плоско вложенной сферы и шара). Возможность дикого вложения топологического замыкания сепаратрис седловых периодических точек была открыта Пикстоном (см. [11]) для диффеоморфизмов Морса–Смейла трехмерной сферы. Для потоков Морса–Смейла нетрудно показать, что при $n=2,3$ замыкания сепаратрис всегда локально плоско вложены (см. [12]). Что касается размерности $n \geqslant 4$ несущего многообразия, то в [13] и [14] авторы показали, что для любого $n \geqslant 4$ существуют замкнутое многообразие M^n и градиентный полярный поток Морса–Смейла f^t на M^n такие, что f^t не имеет гетероклинических пересечений, неблуждающее множество f^t состоит из четырех неподвижных точек и замыкание одной из сепаратрис потока f^t является дико вложенной сферой коразмерности 2.

В гладкой категории теоремы 1, 3 были анонсированы в работе [14] и приведены схемы их доказательств. Для теоремы 1 мы приводим новое доказательство с применением леммы 1, а для теоремы 3 даем детальное доказательство.

Вопросы топологической эквивалентности для размерностей $n = 8, 16$ до настоящего времени не рассматривались.

Авторы благодарят В. З. Гринеса и О. В. Починку, а также участников семинара “Топологическая динамика” в Национальном исследовательском университете “Высшая школа экономики” за полезные обсуждения.

§ 2. Вспомогательные результаты

Ключевым результатом для доказательства теоремы 1 является следующее утверждение, имеющее самостоятельный интерес (достаточное условие для топологического многообразия быть проективно-подобным).

Лемма 1. *Пусть замкнутое n-мерное топологическое многообразие M^n, $n \geqslant 2$, является дизъюнктивным объединением локально плоско вложенной в M^n k-мерной сферы S^k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, и открытого n-мерного шара B^n. Тогда M^n есть проективно-подобное многообразие, т.е. $k = n/2$, и $S^k = S^{n/2}$ является образующей сферой для M^n (при этом M^2 является проективной плоскостью). Более того, граница трубчатой окрестности сферы $S^{n/2}$ гомеоморфна $(n-1)$-мерной сфере.*

Доказательство. Имеем $M^n = S^k \cup B^n$, $S^k \cap B^n = \varnothing$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$. Поскольку для $n = 2$ образующая окружность многообразия M^2 не может разбивать M^2, то ее трубчатая окрестность гомеоморфна листу Мёбиуса. Поэтому M^2 является проективной плоскостью, $M^2 = \mathbb{P}^2$.

Далее мы будем предполагать, что $n \geqslant 3$. Из плоской вложимости $S^k \subset M^n$ вытекает, что S^k обладает открытой трубчатой окрестностью $T(S^k)$ такой, что ее граница $\partial T(S^k)$ является плоско вложенным подмногообразием коразмерности 1, причем окрестность $T(S^k)$ есть пространство локально тривиального расслоения $\pi\colon T(S^k) \to S^k$ над базой S^k и слоем, являющимся открытым $(n-k)$-диском D^{n-k} (см. [15]). Удобно считать D^{n-k} единичным диском, так что граница каждого слоя $\partial D^{n-k}_x = S^{n-k-1}_x$, где $x \in S^k$, $D^{n-k}_x = \pi^{-1}(x)$, принадлежит границе $\partial T(S^k)$ трубчатой окрестности $T(S^k)$.

Построим на B^n и $\operatorname{clos} T(S^k) = T(S^k) \cup \partial T(S^k)$, вообще говоря, не связанные друг с другом потоки f^t_0 и f^t_1 соответственно. Возьмем произвольную точку $x_0 \in B^n$, не принадлежащую $\operatorname{clos} T(S^k)$. Так как B^n – шар, то на B^n существует непрерывный поток f^t_0 такой, что x_0 является неустойчивым узлом, а все остальные траектории покидают любую компактную часть шара B^n и потом в нее не возвращаются (траектории при увеличении времени стремятся к виртуальной границе шара B^n). За основу для построения потока f^t_1 возьмем поток на замкнутом диске $\operatorname{clos} D^{n-k}$, у которого центр является устойчивым узлом, граница состоит из точек покоя, а остальные одномерные траектории по радиусам движутся от границы к центру. Поскольку $T(S^k)$ является локально тривиальным расслоением со слоем D^{n-k} и центр диска D^{n-k} отождествляется в этом расслоении с S^k, то на $\operatorname{clos} T(S^k)$ существует поток f^t_1 такой, что множества $\partial T(S^k)$, S^k состоят из точек покоя, а остальные (одномерные) траектории движутся от $\partial T(S^k)$ к S^k при увеличении времени.

Следующий шаг доказательства нам понадобится в доказательстве леммы 2. Сформулируем его в виде предложения.

Предложение 1. *Существует плоско вложенная в* M^n $(n-1)$-*мерная сфера* $\Sigma_T^{n-1} \subset T(S^k)$ *такая, что*:

1) $S^k \cap \Sigma_T^{n-1} = \varnothing$;

2) *сфера* Σ_T^{n-1} *ограничивает в* M^n n-*мерный шар* b^n, *содержащий* $\partial T(S^k)$.

Доказательство. Пусть Σ^{n-1} – плоско вложенная в M^n $(n-1)$-мерная сфера, окружающая n-шар b_0^n с точкой x_0 внутри и трансверсальная (в топологическом смысле) траекториям потока f_0^t. Из свойств этого потока и равенства $M^n = S^k \cup B^n$ вытекает, что для достаточно большого сдвига f_0^T на время T сферы Σ^{n-1} вдоль траекторий потока f_0^t множество $\Sigma_T^{n-1} = f_0^T(\Sigma^{n-1})$ является $(n-1)$-мерной сферой, принадлежащей $T(S^k)$. Из непрерывности потока f_0^t вытекает, что Σ_T^{n-1} плоско вложена в M^n. Граница $\partial T(S^k)$ является компактным подмножеством открытого шара B^n. Поскольку при увеличении времени траектории потока f_0^t стремятся к виртуальной границе шара B^n, то для достаточно большого T множество $\partial T(S^k)$ окажется внутри шара $b^n = f_0^T(b_0^n)$. Предложение доказано.

Пересечение $T(S^k) \cap f_0^T(b_0^n)$ есть открытое множество, граница которого содержит $\partial T(S^k)$. Поскольку $\partial T(S^k)$ – подмногообразие коразмерности 1, то у $\partial T(S^k)$ в множестве $\operatorname{clos}\bigl(T(S^k) \cap f_0^T(b_0^n)\bigr)$ есть полуокрестность $\mathfrak{U} \subset \bigl(T(S^k) \cup \partial T(S^k)\bigr) \cap f_0^T(b_0^n)$, гомеоморфная $(0,1] \times \partial T(S^k)$. Возьмем открытое подмножество $\operatorname{int}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$, гомеоморфное $(0,1) \times \partial T(S^k)$. Из свойств гомотопических групп вытекают следующие равенства:

$$\pi_i(\operatorname{int}\mathfrak{U}) = \pi_i\bigl((0,1) \times \partial T(S^k)\bigr) = \pi_i\bigl(\partial T(S^k)\bigr), \qquad i = 0, \dots, n-2. \tag{2.1}$$

Множество $A_0 = B^n \setminus \operatorname{clos} f_0^T(b_0^n)$ является открытым n-мерным кольцом, гомеоморфным $(0,1) \times \mathbb{S}^{n-1}$. Поэтому его гомотопические группы равны нулю: $\pi_i(A_0) = 0$ для всех $i = 0, \dots, n-2$. Рассмотрим представитель $\gamma\colon \mathbb{S}^i \to \operatorname{int}\mathfrak{U}$ группы $\pi_i(\operatorname{int}\mathfrak{U})$, где $\mathbb{S}^i$ – i-мерная (каноническая) сфера. Так как $\gamma(\mathbb{S}^i) \cap \partial T(S^k) = \varnothing$, то существует достаточно большой сдвиг f_1^R вдоль траекторий потока f_1^t такой, что $f_1^R(\gamma(\mathbb{S}^i)) \subset A_0$. Отсюда и из (2.1) следует, что $\pi_i(\partial T(S^k)) = 0$ для всех $i = 0, \dots, n-2$. Из справедливости гипотезы Пуанкаре вытекает, что $\partial T(S^k)$ гомеоморфна $(n-1)$-мерной сфере (см. [16]–[20]). Отсюда следует нетривиальность расслоения $\pi\colon T(S^k) \to S^k$. Более того, локально тривиальное расслоение $\pi\colon T(S^k) \to S^k$ индуцирует локально тривиальное расслоение $\partial T(S^k) \to S^k$, т.е. расслоение $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1} с базой S^k и слоем $S^{n-k-1} = \partial D^{n-k}$. Известно (см. [21], также [22]), что имеются только такие расслоения:

$$S^3 \to S^2, \quad \text{слой } S^1; \qquad S^7 \to S^4, \quad \text{слой } S^3; \qquad S^{15} \to S^8, \quad \text{слой } S^7.$$

Нетрудно видеть, что этим расслоениям соответствуют следующие пары (n,k): $(4,2)$, $(8,4)$, $(16,8)$.

Лемма 1 доказана.

Важным промежуточным результатом в направлении доказательства теоремы 2 является следующая лемма, имеющая самостоятельный интерес (достаточное условие гомеоморфности проективно-подобных многообразий).

Лемма 2. *Пусть M_1^n, M_2^n – проективно-подобные многообразия и S_1, S_2 – их образующие сферы соответственно. Тогда если S_1, S_2 локально эквивалентно вложены, то M_1^n, M_2^n гомеоморфны.*

Доказательство. Множество $O_i = M_i^n \setminus S_i$ гомеоморфно открытому n-шару, $i = 1, 2$. По условию леммы для некоторых окрестностей $U(S_1)$, $U(S_2)$ сфер S_1, S_2 соответственно существует гомеоморфизм

$$\varphi_0 \colon U(S_1) \to U(S_2), \qquad \varphi_0(S_1) = S_2.$$

Перейдя, если необходимо, к меньшей окрестности, можно считать окрестность $U(S_1)$ трубчатой. В силу предложения 1 существует $(n-1)$-сфера $S^{n-1} \subset U(S_1)$, $S^{n-1} \cap S_1 = \varnothing$, плоско вложенная в M_1^n. Покажем, что существует гомеоморфизм $\varphi \colon M_1^n \to M_2^n$, совпадающий с φ_0 в некоторой окрестности сферы S_1.

Так как $M_1^n = S_1 \cup O_1$, то $S^{n-1} \subset O_1$, поскольку $S^{n-1} \cap S_1 = \varnothing$. Так как сфера S^{n-1} плоско вложена и O_1 гомеоморфно n-шару, то S^{n-1} ограничивает в O_1 n-шар τ_1^n, $\tau_1^n \cap S_1 = \varnothing$. Согласно предложению 1 мы можем считать, что граница $\partial U(S_1)$ трубчатой окрестности $U(S_1)$ лежит в шаре τ_1^n.

Поскольку $S^{n-1} \subset U(S_1)$ и $\partial U(S_1) \subset \tau_1^n$, то $M_1^n = U(S_1) \cup \tau_1^n$. Более того, множество $M_1^n \setminus \tau_1^n$ принадлежит $U(S_1)$. Из того, что φ_0 – гомеоморфизм, вытекает, что $(n-1)$-сфера $\varphi_0(S^{n-1})$ плоско вложена в M_2^n и $\varphi_0(S^{n-1}) \cap S_2 = \varnothing$, так как $\varphi_0(S_1) = S_2$. Поэтому $\varphi_0(S^{n-1})$ ограничивает в M_2^n n-шар τ_2^n такой, что $\tau_2^n \cap S_2 = \varnothing$ (здесь мы учитываем равенство $M_2^n = S_2 \cup O_2$). Далее, из того, что S^{n-1} ограничивает в O_1 n-шар τ_1^n, вытекает, что ограничение $\varphi_0|_{S^{n-1}} \colon S^{n-1} \to \phi_0(S^{n-1})$ продолжается до некоторого гомеоморфизма $\tau_1^n \to \tau_2^n$, который образует вместе с $\varphi_0|_{M_1^n \setminus \tau_1^n}$ требуемый гомеоморфизм $\varphi \colon M_1^n \to M_2^n$.

Лемма доказана.

Под *n-мерным замкнутым кольцом* K^n понимается множество, гомеоморфное подмножеству $1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 4$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x_1, \dots, x_n)$. Само подмножество евклидова пространства, задаваемое указанными неравенствами, будем обозначать через $\mathscr{K}_{14}^n$ и называть *каноническим n-мерным замкнутым кольцом*. Если неравенства сделать строгими, то получим определение n-мерного открытого кольца. Ясно, что внутренность $\operatorname{int} K^n$ кольца K^n является открытым кольцом. В дальнейшем мы будем использовать канонические n-мерные замкнутые кольца $\mathscr{K}_{ij}^n$, $0 < i < j$, ограниченные $(n-1)$-мерными сферами

$$\mathscr{S}_i^{n-1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = i, \qquad \mathscr{S}_j^{n-1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = j.$$

Лучи, исходящие из начала координат пространства $\mathbb{R}^n$, индуцируют в $\mathscr{K}^n = \mathscr{K}_{14}^n$ тривиальное расслоение с базой S^{n-1} и слоем $[0, 1]$. Следовательно, аналогичное расслоение имеет место на любом n-мерном замкнутом кольце

K^n и K^n гомеоморфно прямому произведению $S^{n-1} \times [0,1]$. Это тривиальное расслоение обозначается через $(K^n, S^{n-1} \times [0,1])$. Мы опускаем вопрос о единственности этого расслоения, который зависит от гомеоморфизма между $\mathscr{K}^n$ и K^n. Ясно, что граничные компоненты кольца K^n, вложенного в некоторое многообразие, являются топологически вложенными $(n-1)$-мерными сферами (которые, однако, могут быть дико вложенными). Ниже, если не оговорено противное, мы всегда будем предполагать, что граничные компоненты колец являются локально плоско вложенными сферами.

Ясно, что k-мерная плоскость P^k: $x_1 = 0, \dots, x_{n-k} = 0$ пересекает каноническое n-мерное кольцо $\mathscr{K}^n$ по k-мерному (каноническому) кольцу, которое обозначается через $\mathbb{A}^k$. Лучи, исходящие из начала координат пространства $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, индуцируют в $\mathbb{A}^k$ тривиальное расслоение $(\mathbb{A}^k, S^{k-1} \times [0,1])$, которое вкладывается в тривиальное расслоение $(\mathscr{K}^n, S^{n-1} \times [0,1])$.

Лемма 3. *Пусть $K^n \subset M^n$ – n-мерное замкнутое кольцо с граничными компонентами S_1, S_2, локально плоско вложенными в M^n, и пусть $A^k \subset K^n$ – k-мерное замкнутое кольцо с граничными компонентами $S_1^{k-1} \subset S_1$, $S_2^{k-1} \subset S_2$ такими, что S_i^{k-1} локально плоско вложена в S_i, $i = 1, 2$, и в многообразие M^n, причем $\operatorname{int} A^k \subset \operatorname{int} K^n$. Тогда если $1 \leqslant k \leqslant n-3$, то тривиальное расслоение $(A^k, S^{k-1} \times [0,1])$ продолжается до тривиального расслоения $(K^n, S^{n-1} \times [0,1])$. Более того, если $(A^k, S^{k-1} \times [0,1])$ уже продолжено до тривиального расслоения $(K^n, S^{n-1} \times [0,1])$ на некоторую окрестность k-мерного кольца A^k, то это продолжение также может быть продолжено до тривиального расслоения $(K^n, S^{n-1} \times [0,1])$.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что кольцо K^n является каноническим кольцом $\mathscr{K}_{23}^n$, ограниченным $(n-1)$-мерными сферами

$$\mathscr{S}_2^{n-1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 2, \qquad \mathscr{S}_3^{n-1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 3.$$

Таким образом, граничные компоненты суть $S_1 = \mathscr{S}_2^{n-1}$ и $S_2 = \mathscr{S}_3^{n-1}$.

Продолжим кольцо $A^k \subset \mathscr{K}_{23}^n$ на каноническое кольцо $\mathscr{K}_{12}^n$, ограниченное $(n-1)$-мерными сферами $\mathscr{S}_1^{n-1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$, $\mathscr{S}_2^{n-1}$, следующим образом. Рассмотрим пересечения лучей, исходящих из начала координат, с кольцом $\mathscr{K}_{12}^n$. Ясно, что отрезки этих лучей, проходящих через $S_1^{k-1} \subset \mathscr{S}_2^{n-1}$, образуют k-мерное замкнутое кольцо A_{12}^k со структурой тривиального расслоения $(A_{12}^k, S^{k-1} \times [0,1])$. Имеет место аналогичное продолжение $(A_{34}^k, S^{k-1} \times [0,1])$ кольца A^k на каноническое кольцо $\mathscr{K}_{34}^n$. Та же самая процедура осуществляется для канонического k-мерного кольца $\mathbb{A}^k$. Нетрудно видеть, что объединение $A_{12}^k \cup A^k \cup A_{34}^k$ является k-мерным замкнутым кольцом со структурой тривиального расслоения $(A_{12}^k \cup A^k \cup A_{34}^k, S^{k-1} \times [0,1])$. Аналогичное объединение $\mathbb{A}_{12}^k \cup \mathbb{A}^k \cup \mathbb{A}_{34}^k$ является каноническим k-мерным замкнутым кольцом со структурой тривиального расслоения $(\mathbb{A}_{12}^k \cup \mathbb{A}^k \cup \mathbb{A}_{34}^k, S^{k-1} \times [0,1])$. Можно сказать, что мы приклеили к граничным компонентам кольца A^k воротники и получили k-мерное кольцо, которое вкладывается в окрестности своих граничных компонент в тривиальное одномерное расслоение n-мерного кольца (аналогичное описание можно дать и для канонических колец).

Обозначим через O начало координат в пространстве $\mathbb{R}^n$. Существует гомеоморфизм $\psi_0\colon \operatorname{int}\mathscr{K}^n_{14} \to \mathbb{R}^n\setminus\{O\}$, переводящий отрезок луча в $\operatorname{int}\mathscr{K}^n_{14}$ в тот же луч без точки O и такой, что ψ_0 есть тождественное отображение на пересечении луча с $\mathscr{K}^n_{23}$. Другими словами, если r – луч с выколотой точкой O, то

$$\psi_0(r\cap \operatorname{int}\mathscr{K}^n_{14}) = r, \qquad \psi_0|_{r\cap\mathscr{K}^n_{23}} = \mathrm{id}.$$

Пополним $\mathbb{R}^n$ бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$ так, что $\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ гомеоморфно n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$. Тогда ψ_0 продолжается до гомеоморфизма (мы его обозначим той же буквой) $\psi_0\colon \mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$, причем $\psi_0(O) = O$ и $\psi(\{\infty\}) = \{\infty\}$. Множества

$$\psi_0(\operatorname{int}A^k_{12}\cup A^k\cup A^k_{34})\cup\{O\}\cup\{\infty\} \overset{\text{def}}{=} S_A,$$
$$\psi_0(\operatorname{int}\mathbb{A}^k_{12}\cup \mathbb{A}^k\cup \mathbb{A}^k_{34})\cup\{O\}\cup\{\infty\} \overset{\text{def}}{=} \mathscr{S}_{\mathbb{A}}$$

являются k-мерными сферами. Поскольку $k\leqslant n-3$, то на S_A и $\mathscr{S}_{\mathbb{A}}$ можно натянуть $(k+1)$-мерные диски D^{k+1}_A и $\mathscr{D}^{k+1}_{\mathbb{A}}$ соответственно,

$$\partial D^{k+1}_A = S_A, \quad \partial\mathscr{D}^{k+1}_{\mathbb{A}} = \mathscr{S}_{\mathbb{A}}, \qquad D^{k+1}_A, \mathscr{D}^{k+1}_{\mathbb{A}} \subset \mathbb{S}^n.$$

В качестве диска $\mathscr{D}^{k+1}_{\mathbb{A}}$ можно взять, например, диск

$$\mathscr{D}^{k+1}_{\mathbb{A}} : x_1 = 0,\ \ldots,\ x_{n-k-1} = 0, \qquad x_{n-k}\geqslant 0 \simeq P^k\times[0,\infty)\subset\mathbb{S}^n.$$

Поскольку на множествах $A^k_{12}\cup A^k\cup A^k_{34}$, $\mathbb{A}^k_{12}\cup\mathbb{A}^k\cup\mathbb{A}^k_{34}$ задана структура тривиального расслоения $S^k\times[0,1]$, то существует согласующий эти структуры гомеоморфизм

$$\psi_1\colon \psi_0(\operatorname{int}A^k_{12}\cup A^k\cup A^k_{34}) \to \psi_0(\operatorname{int}\mathbb{A}^k_{12}\cup\mathbb{A}^k\cup\mathbb{A}^k_{34}),$$

переводящий одномерные слои одного расслоения в одномерные слои другого расслоения. Этот гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма ψ_1: $S_A\to\mathscr{S}_{\mathbb{A}}$, если положить $\psi_1(\{O\}) = \{O\}$, $\psi_1(\{\infty\}) = \{\infty\}$. Отметим, что в силу построения ψ_1 переводит лучи, которые индуцируют одномерное расслоение на $\psi_0(\operatorname{int}A^k_{12})$, в лучи, индуцирующие одномерное расслоение на $\psi_0(\operatorname{int}\mathbb{A}^k_{12})$. Аналогичное положение имеет место в окрестности точки $\{\infty\}$.

Так как S_A наделен структурой тривиального расслоения, которое индуцируется лучами, исходящими из начала координат O, то, немного изменив диск D^{k+1}_A, можно считать, что D^{k+1}_A вблизи O состоит из малых лучей. Аналогичное допущение можно сделать о D^{k+1}_A вблизи $\{\infty\}$. С помощью стандартной операции продолжим ψ_1 со сферы S_A до гомеоморфизма $\psi_1\colon D^{k+1}_A\to\mathscr{D}^{k+1}_{\mathbb{A}}$ так, чтобы малые лучи вблизи точек O и $\{\infty\}$ переходили в малые лучи вблизи тех же точек.

Возьмем замкнутую окрестность $\overline{U}(D^{k+1}_A)$, гомеоморфную прямому произведению $D^{k+1}_A\times D^{n-k-1}$, где D^{n-k-1} – это $(n-k-1)$-мерный замкнутый шар. Гомеоморфизм ψ_1 можно продолжить вдоль второго множителя произведения $D^{k+1}_A\times D^{n-k-1}$ до гомеоморфизма

$$\psi_2\colon D^{k+1}_A\times D^{n-k-1}\to\mathscr{D}^{k+1}_{\mathbb{A}}\times D^{n-k-1}.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что граница $\partial\overline{U}(D_A^{k+1})$ окрестности $\overline{U}(D_A^{k+1})$ является локально плоско вложенной $(n-1)$-мерной сферой, которая разбивает $\mathbb{S}^n$ на два n-мерных шара. Поэтому с границы $\partial\overline{U}(D_A^{k+1})$ гомеоморфизм ψ_2 стандартным образом (вдоль радиусов) продолжается на шар $\mathbb{S}^n \backslash \overline{U}(D_A^{k+1})$ так, что мы получаем гомеоморфизм $\psi_3 \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Можно так подправить ψ_3, чтобы малые лучи вблизи точек O и $\{\infty\}$ переходили в малые лучи вблизи тех же точек. В силу построения ψ_3 переводит тривиальное расслоение $\bigl(\psi_0(A^k), S^{k-1} \times [0,1]\bigr)$ в тривиальное расслоение $(\mathbb{A}^k, S^{k-1} \times [0,1])$, которое естественным образом вкладывается в тривиальное расслоение $(\mathscr{K}_{23}^n, S^{n-1} \times [0,1])$. Поэтому гомеоморфизм ψ^{-1} переводит $(\mathscr{K}_{23}^n, S^{n-1} \times [0,1])$ в тривиальное расслоение на кольце $\mathscr{K}_{23}^n$, которое является продолжением расслоения $(A^k, S^{k-1} \times [0,1])$.

Анализ доказательства показывает, что если $(A^k, S^{k-1} \times [0,1])$ уже продолжено до тривиального расслоения $(S^{n-1} \times [0,1])$ на некоторую окрестность k-мерного кольца A^k, то это продолжение также может быть продолжено до тривиального расслоения $(\mathscr{K}_{23}^n, S^{n-1} \times [0,1])$.

Лемма 3 доказана.

Пусть $f \colon M \to M$ – гомеоморфизм многообразия M. Говорят, что f *изотопен тождественному гомеоморфизму*, если существует непрерывное отображение $F \colon M \times [0,1] \to M$ такое, что $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = x$ для всех $x \in M$ и ограничение $F|_{M \times \{\mu\}} \colon M \times \{\mu\} \to M$ является гомеоморфизмом для любого $\mu \in [0,1]$. Семейство $f_\mu = F|_{M \times \{\mu\}}$ называют *изотопией* отображения $f = f_0$ к тождественному отображению $f_1 = \mathrm{id}$. Будем говорить, что изотопия f_μ согласована со структурой произведения $M \times [0,1]$.

Известно, что сохраняющий ориентацию гомеоморфизм n-мерной сферы изотопен тождественному. Следующая лемма является уточнением этого утверждения.

Лемма 4. *Пусть $f \colon S^n \to S^n$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм n-мерной сферы S^n такой, что S^n содержит k-мерную сферу $S^k \subset S^n$, состоящую из неподвижных точек гомеоморфизма f. Тогда если $n-k \geqslant 3$, то существует изотопия f_μ отображения $f = f_0$ к тождественному гомеоморфизму $f_1 = \mathrm{id}$ такая, что $f_\mu(x) = x$ для всех $x \in S^k$ и любого $\mu \in [0,1]$.*

Доказательство. Нам понадобится следующее утверждение для n-мерного диска.

Предложение 2. *Пусть $f \colon D^n \to D^n$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм замкнутого n-мерного шара D^n такой, что граница $\partial D^n = S^{n-1}$ шара D^n состоит из неподвижных точек гомеоморфизма f. Будем считать, что D^n вложен в $\mathbb{R}^n$ и определяется уравнением $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1$. Предположим, что k-мерный шар D^k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, который является пересечением D^n с k-мерной гиперплоскостью, проходящей через начало координат, также состоит из неподвижных точек[2] гомеоморфизма f. Тогда существует*

[2] В случае $k = 0$ шар D^0 является точкой.

изотопия f_μ *отображения* $f = f_0$ *к тождественному отображению* $f_1 = \mathrm{id}$ *такая, что* $f_\mu(x) = x$ *для всех* $x \in S^{n-1} \cup D^k$ *и любого* $\mu \in [0,1]$.

Доказательство. Будем считать, что $D^n \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и что этот шар задан уравнениями $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1$, $x_{n+1} = 0$ с границей $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$, $x_{n+1} = 0$. Обозначим через D_μ^n n-мерный шар $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1$, $x_{n+1} = \mu$. Ясно, что $D^n = D_0^n$. Возьмем на D_1^n точку N с координатами $(0, \dots, 0, 1)$. Обозначим через $s(N, x_0)$ отрезок, соединяющий точку N с некоторой точкой $x_0 \in D_0^n$. Положим $x_\mu = D_\mu^n \cap s(N, x_0)$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Очевидно, $x_1 = N$ для любой точки $x_0 \in D_0^n$. Когда точка $x_0 \in D_0^n$ пробегает весь шар D_0^n, соответствующие точки x_μ образуют подмножество $d_\mu \subset D_\mu^n$. Определим на d_μ гомеоморфизм g_μ следующим образом. Положим $g(x_\mu) = y_\mu = D_\mu^n \cap s(N, f(x_0))$. Поскольку f на границе шара D_0^n тождественный, то g_μ можно продолжить на весь шар D_μ^n с помощью тождественного гомеоморфизма.

Обозначим через $h_r\colon D_r^n \to D_0^n$ отображение $(x_1, \dots, x_n, r) \to (x_1, \dots, x_n, 0)$. Нетрудно проверить, что семейство отображений $f_\mu = h_\mu \circ g_\mu \circ h_\mu^{-1}$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, является искомой изотопией. Предложение доказано.

Не уменьшая общности, можно считать, что сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ определяется уравнением $x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 4$, а сфера S^k задается как пересечение сферы S^n с плоскостью $P^k \subset \mathbb{R}^{n+1}$, которая определяется уравнениями $x_i = 0$ при $i = k+1, \dots, x = n$. Выделим на S^n n-мерный диск

$$D_r^n: \ x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant r, \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 4, \qquad x_{n+1} \geqslant 0, \quad 0 < r \leqslant 1.$$

Ясно, что точка $(0, \dots, 0, 2)$ принадлежит сфере S^k и является, следовательно, неподвижной точкой гомеоморфизма f. Поэтому найдется $\varepsilon > 0$ такое, что n-мерный диск $D_\varepsilon^n \subset D_1^n \subset S^n$ удовлетворяет условию

$$f(D_\varepsilon^n) \subset D_1^n. \tag{2.2}$$

Очевидно, границы $S_1^{n-1} = \partial D_1^n$, $S_\varepsilon^{n-1} = \partial D_\varepsilon^n$ дисков D_1^n, D_ε^n соответственно ограничивают на S^n замкнутое n-мерное кольцо, которое мы обозначим через $K_{1\varepsilon}$. Из (2.2) вытекает, что границы S_1^{n-1}, $f(S_\varepsilon^{n-1}) = \partial f(D^n \varepsilon)$ дисков D_1^n, $f(D_\varepsilon^n)$ соответственно также ограничивают на S^n замкнутое n-мерное кольцо, которое будем обозначать через K_2.

Доказательство проводится индукцией по $k \geqslant 0$ в предположении $k \leqslant n-3$.

Для $k = 0$ сфера $S^k = S^0$ представляет собой объединение двух точек $(0, \dots, 0, 2)$ и $(0, \dots, 0, -2)$. Так как $f|_{S_\varepsilon^{n-1}}$ изотопно тождественному, то существует продолжение отображения $f|_{D_\varepsilon^n}$ с помощью гомеоморфизма колец $K_{1\varepsilon} \to K_2$ такое, что полученный гомеоморфизм $g\colon D_1^n \to D_1^n$ удовлетворяет условию $g|_{S_1^{n-1}} = \mathrm{id}$. Из конструкции вытекает, что существует изотопия $g_\nu\colon D_1^n \to D_1^n$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1$, гомеоморфизма $g = g_0$ к тождественному $g_1 = \mathrm{id}$. Из того, что g является продолжением $f|_{D_\varepsilon^n}$, следует, что $g_\nu((0, \dots, 0, 2)) = (0, \dots, 0, 2)$ при всех $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Ясно, что $g\colon D_1^n \to D_1^n$ можно продолжить тождественным отображением $S^n \setminus D_1^n \to S^n \setminus D_1^n$ на всю сферу S^n. В итоге мы получаем изотопию $g_\nu\colon S^n \to S^n$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1$, такую, что

$$g_0|_{D^n_\varepsilon} = f|_{D^n_\varepsilon}, \qquad g_1 = \mathrm{id}, \qquad g_\nu((0,\dots,0,2)) = (0,\dots,0,2),$$
$$g_\nu((0,\dots,0,-2)) = (0,\dots,0,-2), \quad g_\nu|_{S^n\setminus D^n_1} = \mathrm{id} \quad \text{при всех} \ \ 0 \leqslant \nu \leqslant 1.$$

Тогда $f_\nu = f \circ g^{-1}_{1-\nu}$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1$, является изотопией гомеоморфизма $f_0 = f\circ g_1^{-1} = f$ к гомеоморфизму $f_1 = f\circ g_0^{-1}$, причем $f_\nu|_{S^0} = \mathrm{id}$ при всех $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Нетрудно видеть, что $f_1|_{D^n_\varepsilon} = \mathrm{id}$. Таким образом,

$$f_1|_{S^n\setminus \operatorname{int} D^n_\varepsilon}\colon S^n\setminus \operatorname{int} D^n_\varepsilon \to S^n\setminus \operatorname{int} D^n_\varepsilon$$

является гомеоморфизмом замкнутого n-мерного шара $S^n\setminus \operatorname{int} D^n_\varepsilon$, тождественного на границе и имеющего неподвижную точку $(0,\dots,0,-2)$. Применяя к $f_1|_{S^n\setminus \operatorname{int} D^n_\varepsilon}$ предложение 2, получаем требуемую изотопию f_μ в случае $k=0$.

Для $k \geqslant 1$ пересечения $S^k \cap D^n_\varepsilon = d_\varepsilon$, $S^k\cap D^n_1 = d_1$ являются k-мерными шарами (мы будем пользоваться введенными выше обозначениями), состоящими из неподвижных точек гомеоморфизма f. Поскольку $(0,\dots,0,2)\in S^k$, то имеет место включение (2.2) и, следовательно, корректно определены кольца $K_{1\varepsilon}$ и K_2. Отметим, что поскольку $f(S^k) = S^k$, то $f(D^n_\varepsilon)$ пересекает S^k только по шару d_ε:

$$f(D^n_\varepsilon)\cap S^k = f(D^n_\varepsilon)\cap f(S^k) = f(D^n_\varepsilon\cap S^k) = f(d_\varepsilon) = d_\varepsilon.$$

В частности, $f(D^n_\varepsilon)$ не пересекает $d_1\setminus d_\varepsilon$.

Пересечения $S^k\cap S^{n-1}_\varepsilon = S^{k-1}_\varepsilon$, $S^k\cap S^{n-1}_1 = S^{k-1}_1$ являются $(k-1)$-мерными сферами, которые ограничивают на сфере S^k k-мерное кольцо $A^k = \operatorname{clos}(d_1\setminus d_\varepsilon)$. Это кольцо допускает структуру стандартного тривиального расслоения $(A^k, S^{k-1}_1\times[0,1])$. Отметим, что A^k принадлежит обоим кольцам $K_{1\varepsilon}$ и K_2. Согласно лемме 3 расслоение $(A^k, S^{k-1}_1\times[0,1])$ продолжается в кольца $K_{1\varepsilon}$ и K_2 до тривиальных расслоений $(K_{1\varepsilon}, S^{n-1}\times[0,1])$, $(K_2, S^{n-1}\times[0,1])$ соответственно. Существует согласованная с этими тривиальными расслоениями изотопия гомеоморфизма $f|_{S^{n-1}_\varepsilon}$ к тождественному гомеоморфизму, так как $f|_{S^{n-1}_\varepsilon}$ изотопен тождественному отображению. Более того, так как $f|_{S^{k-1}_\varepsilon} = \mathrm{id}$, то в силу предположения индукции существует изотопия, которая равна тождественному отображению на S^{k-1}_ε. Отсюда следует, что существует продолжение отображения $f|_{D^n_\varepsilon}$ с помощью гомеоморфизма колец $K_{1\varepsilon}\to K_2$ так, что полученный гомеоморфизм $g\colon D^n_1 \to D^n_1$ является тождественным отображением на A^k и удовлетворяет условию $g|_{S^{n-1}_1} = \mathrm{id}$. Из конструкции вытекает, что существует изотопия $g_\nu\colon S^n\to S^n$, $0\leqslant \nu\leqslant 1$, гомеоморфизма $g = g_0$ к тождественному $g_1 = \mathrm{id}$ такая, что

$$g_0|_{D^n_\varepsilon} = f|_{D^n_\varepsilon}, \qquad g_1 = \mathrm{id}, \qquad g_\nu|_{d_1\cup(S^n\setminus D^n_1)} = \mathrm{id} \quad \text{при всех} \ \ 0\leqslant\nu\leqslant 1.$$

Тогда $f_\nu = f\circ g^{-1}_{1-\nu}$, $0\leqslant\nu\leqslant 1$, является изотопией гомеоморфизма $f_0 = f\circ g_1^{-1} = f$ к гомеоморфизму $f_1 = f\circ g_0^{-1}$, причем $f_1|_{D^n_\varepsilon} = \mathrm{id}$ и $f_\nu|_{S^k} = \mathrm{id}$ при всех $0\leqslant\nu\leqslant 1$. Пара $(S^n\setminus \operatorname{int} D^n_\varepsilon, S^k\setminus \operatorname{int} d_\varepsilon)$ гомеоморфна паре (D^n, D^k), удовлетворяющей предложению 2.

Предложение 2 доказано.

Лемма 5. *Пусть* M^k – k*-мерное линейно-связное подмногообразие, плоско вложенное в ориентируемое замкнутое* n*-многообразие* M^n*, где* $1 \leqslant k \leqslant n-3$*, и пусть* B_0 – *замкнутый* n*-мерный шар с плоско вложенной границей* $\partial B_0 = S_0^{n-1}$ *такой, что пересечение* $B_0 \cap M^k = D_0^k$ *есть* k*-мерный диск с границей* $\partial D_0^k = S_0^{k-1}$*, плоско вложенной в* $\partial B_0 = S_0^{n-1}$*. Пусть* $h_0 \colon B_0 \to h_0(B_0) = B_1$ – *сохраняющий ориентацию гомеоморфизм*[3] *на свой образ такой, что* n*-мерный шар* B_1 *пересекает* M^k *по* k*-мерному диску* D_1^k*, причем ограничение* $h_0|_{D_0^k}$ *также сохраняет ориентацию и выполняются следующие равенства*:

$$h_0(D_0^k) = D_1^k, \qquad B_1 \cap M^k = D_1^k.$$

Тогда существует продолжение гомеоморфизма h_0 *до гомеоморфизма* $h\colon M^n \to M^n$ *такого, что* $h(M^k) = M^k$*. Более того, если* B^n – *произвольный* n*-мерный шар, содержащий шары* B_0 *и* B_1*, то существует продолжение* h *такое, что* $h = \mathrm{id}$ *вне шара* B^n*.*

Доказательство. Поскольку M^k – линейно-связное и плоско вложенное подмногообразие, то существует достаточно малый замкнутый n-мерный шар $\mathscr{B}^n$, содержащий внутри себя оба шара B_0, $h_0(B_0) = B_1$ и такой, что пересечение $\mathscr{B}^n \cap M^k$ есть k-диск $\mathscr{D}^k$, $\mathscr{B}^n \cap M^k = \mathscr{D}^k$. Ясно, что $D_0^k \cup D_1^k \subset \mathscr{D}^k$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\partial \mathscr{B}^n = S^{n-1}$ и $\partial D^k = S^{k-1}$ являются плоско вложенными сферами, так что множества

$$\mathscr{B}^n \setminus \operatorname{int} B_i^n \overset{\text{def}}{=} K_i^n, \qquad \mathscr{D}^k \setminus \operatorname{int} D_i \overset{\text{def}}{=} A_i^k$$

являются замкнутыми n-мерными и k-мерными кольцами соответственно для всех $i = 1,2$. Согласно лемме 3 структура тривиального расслоения $(A_i^k, \mathbb{S}^{k-1} \times [0,1])$ на A^k продолжается до структуры тривиального расслоения $(K_i^n, \mathbb{S}^{n-1} \times [0,1])$ на K_i^n для всех $i = 1,2$ (мы учитываем условие $k \leqslant n-3$). Поэтому h_0 вдоль одномерных слоев продолжается до гомеоморфизма $h_1 \colon \mathscr{B}^n \to \mathscr{B}^n$, причем $h_1(M^k \cap \mathscr{B}^n) = M^k \cap \mathscr{B}^n$, поскольку расслоение $(A_i^k, \mathbb{S}^{k-1} \times [0,1])$ вложено в $(K_i^n, \mathbb{S}^{n-1} \times [0,1])$.

Возьмем n-мерный шар B_1^n, содержащий $\mathscr{B}^n$, такой, что пересечение n-мерного замкнутого кольца $B_1^n \setminus \operatorname{int} \mathscr{B}^n$ с M^k является k-мерным замкнутым кольцом $R = \bigl(B_1^n \setminus \operatorname{int} \mathscr{B}^n\bigr) \cap M^k$, гомеоморфным $\mathbb{S}^{k-1} \times [0,1]$. На одной граничной компоненте (скажем, $\mathbb{S}^{k-1} \times \{0\}$) кольца R определен (в силу предыдущей конструкции) сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h_1 \colon \mathbb{S}^{k-1} \times \{0\} \to \mathbb{S}^{k-1} \times \{0\}$. Поэтому существует изотопия $H \colon \mathbb{S}^{k-1} \times [0,1] \to \mathbb{S}^{k-1} \times [0,1]$ такая, что $H|_{\mathbb{S}^{k-1} \times \{0\}} = h_1$, $H|_{\mathbb{S}^{k-1} \times \{1\}} = \mathrm{id}$. Под действием H тривиальное расслоение $\bigl(R, \mathbb{S}^{k-1} \times [0,1]\bigr)$ переходит в тривиальное расслоение $\xi \colon R \to \mathbb{S}^{k-1} \times \{0\}$, у которого одномерные слои соединяют точки $(h_1(x), \{0\})$ и $(x, \{1\})$ для любого $x \in \mathbb{S}^{k-1} \times \{0\}$ (другими словами, мы деформируем расслоение $\bigl(R, \mathbb{S}^{k-1} \times [0,1]\bigr)$ так, чтобы концевые точки одномерных слоев на компоненте $\mathbb{S}^{k-1} \times \{1\}$ кольца R оставались неподвижными). Согласно лемме 3 тривиальное расслоение

[3] Ориентация на B_0 и $h_0(B_0)$ индуцируется ориентацией многообразия M^n.

$\bigl(\xi, R, \mathbb{S}^{k-1}\times\{0\}\bigr)$ продолжается до тривиального расслоения n-мерного замкнутого кольца $B_1^n \setminus \operatorname{int}\mathscr{B}^n$. В силу леммы 4 гомеоморфизм h_1 продолжается до сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $h_2\colon B_1^n \to B_1^n$ такого, что $h_2|_{R\cap B_1^n} = \mathrm{id}$.

Возьмем n-мерный шар B^n, содержащий B_1^n, такой, что пересечение n-мерного замкнутого кольца $B^n\setminus\operatorname{int}B_1^n$ с M^k является k-мерным замкнутым кольцом. Снова применяя лемму 4, получаем продолжение гомеоморфизма h_2 до гомеоморфизма $h\colon B^n\to B^n$ такого, что h является тождественным отображением на границе шара B^n. Ясно, что в качестве B^n можно взять сколь угодно малый шар, содержащий шары B_0 и B_1.

Лемма 5 доказана.

§ 3. Доказательства основных теорем

Доказательство теоремы 1. Поток Морса–Смейла f^t необходимо имеет устойчивый сток ω и неустойчивый источник α. Из связности несущего многообразия M^n вытекает, что третье состояние равновесия является седлом σ с k-мерным $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ устойчивым многообразием $W^s(\sigma)$ и $(n-k)$-мерным неустойчивым многообразием $W^u(\sigma)$. Множество $\operatorname{Sep}^\tau(\sigma)=W^\tau(\sigma)\setminus\{\sigma\}$ называется сепаратрисой (τ либо s, либо u). Если $\operatorname{Sep}^\tau(\sigma)$ не пересекается с сепаратрисами других седел, то $\operatorname{Sep}^\tau(\sigma)$ принадлежит неустойчивому (при $\tau=s$) или устойчивому (при $\tau=u$) многообразию некоторого стока (соответственно источника), скажем, N. Тогда топологическое замыкание сепаратрисы $\operatorname{Sep}^\tau(\sigma)$ равно $W^\tau(\sigma)\cup\{N\}$ и является топологически вложенной в M^n сферой (k-сферой или $(n-k)$-сферой соответственно); см. [23]–[25]. Поскольку сепаратрисы одного седла у потока f^t Морса–Смейла не пересекаются, то топологическое замыкание неустойчивой сепаратрисы $\operatorname{Sep}^u(\sigma)$ является топологически вложенной k-сферой $W^u(\sigma)\cup\{\omega\}=S_\omega$, а топологическое замыкание устойчивой сепаратрисы $\operatorname{Sep}^s(\sigma)$ является топологически вложенной $(n-k)$-сферой $W^s(\sigma)\cup\{\alpha\}=S_\alpha$. Иногда, чтобы подчеркнуть, что речь идет о сепаратрисе седла потока f^t, мы будем обозначать сепаратрису через $\operatorname{Sep}^\tau(\sigma,f^t)$. Нам нужно показать, что хотя бы одна из сфер S_ω, S_α локально плоско вложена. Поскольку для размерности $n=4$ обозначения и конструкция доказательства нам понадобятся при рассмотрении топологической эквивалентности, то мы сформулируем утверждение в виде предложения. Далее будут использованы введенные выше обозначения.

Предложение 3. *Хотя бы одна из сфер S_ω, S_α локально плоско вложена.*

Доказательство. Отметим, что из определения потока Морса–Смейла вытекает, что инвариантные многообразия седел являются локально плоско вложенными подмногообразиями. Поэтому единственной точкой дикого вложения сферы S_ω (соответственно сферы S_α) может быть только точка ω (соответственно точка α).

Для $n=2$ сферы S_ω, S_α являются окружностями. Известно, что топологически вложенная окружность плоско вложена (см. [26], [27]).

Из работы [28] вытекает, что на трехмерных замкнутых многообразиях не существуют потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия (на самом деле в [28] доказан более сильный результат для систем Морса–Смейла, но нам достаточно частного случая).

При $n \geqslant 5$ одна из сфер S_ω или S_α (скажем, S_ω) имеет коразмерность не менее 3. Тогда из [29] следует, что S_ω локально плоско вложена.

Осталось рассмотреть случай $n = 4$. Если одна из сфер S_ω, S_α трехмерная, то известно, что она не может быть дико вложенной только в одной точке (см. [30], а также [29], [31]). Поэтому далее будем считать, что обе сферы S_ω, S_α двумерные (для сфер коразмерности 2 имеется априорная возможность быть дико вложенной ровно в одной точке; см. [32]).

Сначала рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами $(x_1, \dots, x_4)$ векторное поле $\vec{V}_s$, которое задается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -x_1, \qquad \dot{x}_2 = -x_2, \qquad \dot{x}_3 = x_3, \qquad \dot{x}_4 = x_4. \tag{3.1}$$

Ясно, что начало координат $O = (0, \dots, 0)$ является седлом поля $\vec{V}_s$ с двумерной устойчивой сепаратрисой $W^s(O)$ и двумерной неустойчивой сепаратрисой $W^u(O)$, где

$$W^s(O) = \big\{(x_1, \dots, x_4) \mid x_3 = 0,\ x_4 = 0\big\} \subset \mathbb{R}^4,$$
$$W^u(O) = \big\{(x_1, \dots, x_4) \mid x_1 = 0,\ x_2 = 0\big\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Нетрудно видеть, что функция $F(x_1, \dots, x_4) = \sum_{i=1}^2 x_i^2 \sum_{j=3}^4 x_j^2$ является интегралом системы (3.1) (детали см. в [13]). Из вида F следует, что гиперповерхность $F = 1$ является трехмерным многообразием, которое разбивает $\mathbb{R}^4$ на два открытых множества

$$\big\{\vec{x} = (x_1, \dots, x_4) \mid F(\vec{x}) < 1\big\} \overset{\text{def}}{=} U_0, \qquad \big\{\vec{x} = (x_1, \dots, x_4) \mid F(\vec{x}) > 1\big\} \overset{\text{def}}{=} U_\infty.$$

Объединение $W^s(O) \cup W^u(O)$ определяется равенством $F = 0$. Поскольку $O \in W^s(O) \cup W^u(O)$, то $O \in U_0$. Таким образом, U_0 – инвариантная окрестность седла O, которую мы будем называть *специальной*. Отметим, что множества

$$P_1 = \big\{(x_1, \dots, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\big\},$$
$$P_2 = \big\{(x_1, \dots, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3^2 + x_4^2 \leqslant 1\big\}$$

являются полноториями с общей границей $\partial P_1 = \partial P_2 = P_1 \cap P_2$, которая представляет собой двумерный тор.

Окружим сток ω и источник α потока f^t четырехмерными шарами B_1, B_2 соответственно такими, что их границы $\partial B_1 = S_1^3$, $\partial B_2 = S_2^3$ трансверсальны потоку, а седло σ принадлежит $M^4 \setminus (B_1 \cup B_2)$. Тогда сепаратрисы $\mathrm{Sep}^u(\sigma)$, $\mathrm{Sep}^s(\sigma)$ пересекают S_1^3, S_2^3 по замкнутым простым кривым C_1, C_2 соответственно. Отметим, что поток индуцирует отображения последования Пуанкаре

$$\xi\colon \big(S_2^3 \setminus C_2\big) \to \big(S_1^3 \setminus C_1\big),$$

и ниже будет показано, что трехмерная сфера S_1^3 получается из трехмерной сферы S_2^3 в результате перестройки S_2^3 по узлу C_2 с помощью отображения, которое индуцирует ξ на границе трубчатой окрестности узла C_2.

Докажем, что каждая кривая C_1, C_2 является тривиальным узлом соответственно в S_1^3 и S_2^3. Эти кривые на инвариантных многообразиях $W^s(\sigma)$, $W^u(\sigma)$ ограничивают замкнутые двумерные диски D_1, D_2 соответственно. Так как сферы S_1^3, S_2^3 трансверсальны векторному полю, то седло σ лежит внутри каждого диска D_1, D_2. Из того, что в потоках Морса–Смейла отсутствуют петли сепаратрис, следует, что D_1, D_2 пересекаются ровно в одной точке $\sigma = D_1 \cap D_2$.

Предположим противное и рассмотрим для определенности случай, когда кривая C_1 образует нетривиальный узел в S_1^3 (случай, когда C_2 образует нетривиальный узел в S_2^3, рассматривается аналогично). Согласно расширенной версии теоремы Гробмана–Хартмана существует окрестность U множества $D_1 \cup D_2$, в которой поток топологически эквивалентен линейному потоку, определяемому линейной частью векторного поля $\vec{V}$ в точке σ. В силу предложения 2.15 из [33] линейные гиперболические векторные поля топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые типы состояния равновесия. Поэтому поле $\vec{V}$ в U топологически сопряжено векторному полю $\vec{V}_s$, которое определяется системой дифференциальных уравнений (3.1). В частности, U гомеоморфна достаточно большой части специальной окрестности U_0, содержащей седло O. Не уменьшая общности, можно считать, что U гомеоморфна окрестности $W_0 \subset U_0$. Из классических теорем теории дифференциальных уравнений следует, что ξ – гомеоморфизм. Таким образом, C_1 и C_2 – два узла с гомеоморфными дополнениями. В силу [34] нетривиальность узла C_1 влечет нетривиальность узла C_2.

Рассмотрим полноторий $P_1 \subset U \cap S_1^3$, являющийся трубчатой окрестностью кривой C_1 в S_1^3. Поскольку C_1 – гладкая кривая, то такая окрестность существует. Из эквивалентности поля $\vec{V}$ в окрестности U с полем $\vec{V}_s$ вытекает, что $\xi(P_1 - C_1)$ совместно с C_2 образуют трубчатую окрестность (обозначим ее через P_2) кривой C_2. Уменьшив, если необходимо, полнотории P_1 и P_2, можно считать, что P_1, P_2 принадлежат границе окрестности U. Поскольку U гомеоморфна окрестности $W_0 \subset U_0$, то границы полноториев P_1, P_2 соединены отрезками траекторий векторного поля $\vec{V}$, причем ограничение $\xi|\partial P_1 \colon \partial P_1 \to \partial P_2$ переводит меридиан полнотория P_1 в параллель полнотория P_2, а параллель P_1 – в меридиан P_2.

Покажем, что сфера S_2^3 гомеоморфна многообразию, которое получается после перестройки сферы S_1^3 вдоль узла C_1. Действительно, удалим из S_1^3 полноторий P_1 и вклеим вместо него полноторий P_2 с помощью гомеоморфизма $\xi|\partial P_1 \colon \partial P_1 \to \partial P_2$. Поскольку приклеивающий гомеоморфизм $\xi|\partial P_1$ является продолжением гомеоморфизма

$$\xi|S_1^3 \setminus P_1 \colon S_1^3 \setminus P_1 \to S_2^3 \setminus P_2,$$

то отображение

$$\xi_* \colon \left(S_1^3 \setminus P_1\right) \cup_\xi P_2 \to S_2^3,$$

которое совпадает с ξ на $S_1^3 \setminus P_1$ и суть тождественное на P_2, является корректно определенным гомеоморфизмом. Таким образом, сфера S_2^3 получается в результате перестройки сферы S_1^3 вдоль узла C_1 с помощью нетривиального гомеоморфизма $\xi|\partial P_1\colon \partial P_1 \to \partial P_2$. Так как C_1 – нетривиальный узел, то в результате такой перестройки всегда получается многообразие, отличное от трехмерной сферы (см. [34], а также [35]).

Полученное противоречие доказывает предложение 3.

Таким образом, M^n является дизъюнктивным объединением локально плоско вложенной в M^n k-мерной сферы $S^k = S_\omega$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, и неустойчивого многообразия $W^u(\alpha)$ источника α, которое гомеоморфно открытому n-мерному шару B^n. Отсюда в силу леммы 1 следует, что M^n является проективно-подобным многообразием.

Из того, что M^n есть дизъюнктивное объединение сферы $S^{n/2}$ и n-мерного шара B^n, вытекают равенства $\pi_1(M^n) = \cdots = \pi_{n/2-1}(M^n) = 0$ при $n \geqslant 4$. Из $\pi_1(M^n) = 0$ следует ориентируемость M^n.

Пусть M^n – проективно-подобное многообразие с образующей сферой $S^{n/2}$. Определим на $S^{n/2}$ поток Морса–Смейла $\widetilde{f}^t$ ровно с одним стоком ω и ровно с одним источником $\widetilde{\sigma}$. Поскольку в силу леммы 1 граница $\partial T(S^{n/2})$ трубчатой окрестности $T(S^{n/2})$ сферы $S^{n/2}$ есть $(n-1)$-мерная сфера, то $\widetilde{f}^t$ можно продолжить на $T(S^{n/2})$ так, чтобы $S^{n/2}$ стала притягивающим инвариантным множеством с седлом $\widetilde{\sigma}$ и притягивающей областью $T(S^{n/2})$, а $\partial T(S^{n/2})$ была трансверсальна потоку $\widetilde{f}^t$. Так как дополнение к $T(S^{n/2})$ гомеоморфно открытому шару, то нетрудно продолжить $\widetilde{f}^t$ на M^n с источником α внутри данного открытого шара. В результате получается непрерывный поток Морса–Смейла на M^n с тремя состояниями равновесия: стоком ω, седлом $\widetilde{\sigma}$ и источником α.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимость вытекает из того, что гомеоморфизм, осуществляющий топологическую эквивалентность, переводит (любую) окрестность замыкания сепаратрисы седла одного потока в окрестность замыкания сепаратрисы седла другого потока, поскольку такой гомеоморфизм задан на всем многообразии и переводит траектории в траектории.

Далее мы будем доказывать достаточность. Предположим для определенности, что неустойчивые сепаратрисы седел потоков f_1^t, f_2^t локально эквивалентно вложены. Пусть σ_1, σ_2 – седла потоков f_1^t, f_2^t соответственно и $W^u(\sigma_1)$, $W^u(\sigma_2)$ – их неустойчивые многообразия. Пусть имеется гомеоморфизм $\varphi\colon M^n \to M^n$. Под действием этого гомеоморфизма поток f^t преобразуется в топологически эквивалентный ему поток, который мы будем обозначать через $\varphi(f^t)$. Формально поток $\varphi(f^t)$ задается действием аддитивной группы $\mathbb{R}$ по правилу

$$t \mapsto \varphi \circ f_t \circ \varphi^{-1}\colon M^n \to M^n.$$

Идея доказательства состоит в том, что мы построим гомеоморфизмы несущих многообразий, переводящие исходные потоки в одинаковые потоки.

Согласно условию существуют гомеоморфные окрестности замыканий $\operatorname{clos} W^u(\sigma_1)$ и $\operatorname{clos} W^u(\sigma_2)$ и гомеоморфизм, переводящий одну окрестность в другую. Согласно лемме 2 мы можем (и будем) считать, что потоки f_1^t, f_2^t заданы на одном и том же многообразии $M_1^n = M_2^n = M^n$ и замыкания неустойчивых многообразий $\operatorname{clos} W^u(\sigma_1)$, $\operatorname{clos} W^u(\sigma_2)$ их седел σ_1, σ_2 соответственно как множества совпадают: $\operatorname{clos} W^u(\sigma_1) = \operatorname{clos} W^u(\sigma_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} W^k$. Так как множество W^k линейно связное, то можно сразу совместить узлы ω_1, ω_2 потоков f_1^t, f_2^t соответственно: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Кроме этого, не уменьшая общности, можно считать, что поток f_1^t в некоторой окрестности $U(\sigma_1)$ седла σ_1 линейный в силу определения потока Морса–Смейла. Дальнейшие рассуждения представляются в виде шагов.

Шаг 1. Существует гомеоморфизм $\varphi\colon M^n \to M^n$, переводящий поток f_2^t в поток $\varphi(f_2^t)$ с седлом $\sigma_1 = \varphi(\sigma_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma$, такой, что:

1) $\varphi(W^k) = W^k = \operatorname{clos} \operatorname{Sep}^u\bigl(\sigma, \varphi(f^t)\bigr)$;
2) существует окрестность $U(\sigma)$ седла σ такая, что ограничения потоков $f_1^t|_{U(\sigma)}$, $\varphi(f_2^t)|_{U(\sigma)}$ совпадают (в частности, оба ограничения в окрестности $U(\sigma)$ линейны).

Докажем это. Поскольку потоки f_1^t, f_2^t топологически эквивалентны в окрестности седел σ_1, σ_2, то существуют окрестности $U(\sigma_1)$, $U(\sigma_2)$ и гомеоморфизм $\varphi_0\colon U(\sigma_2) \to U(\sigma_1)$, переводящий локальные траектории потока $f_2^t|_{U(\sigma_2)}$ в локальные траектории потока $f_1^t|_{U(\sigma_1)}$. Ясно, что $\varphi_0(\sigma_2) = \sigma_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma$.

Напомним, что $W^k = \operatorname{clos} W^u(\sigma_1) = \operatorname{clos} W^u(\sigma_2)$ является $n/2$-мерной сферой $S^{n/2}$, плоско вложенной в M^n. Не уменьшая общности, можно считать окрестности $U(\sigma_1)$, $U(\sigma_2)$ n-мерными шарами с локально плоскими границами такими, что пересечения $U(\sigma_1) \cap W^k$, $U(\sigma_2) \cap W^k$, $\varphi_0\bigl(U(\sigma_1)\bigr) \cap W^k$ гомеоморфны k-мерному диску с границами, локально плоско вложенными в W^k. Поскольку при $n \geqslant 8$ имеем $n - k = n - n/2 \geqslant 4$, то в силу леммы 5 φ_0 можно продолжить до гомеоморфизма $\varphi\colon M^n \to M^n$ такого, что $\varphi(W^k) = W^k$ и φ тождественный вне некоторой окрестности $U(\sigma_1)$. Таким образом, поток $\varphi(f_2^t)$ совпадает с потоком f_1^t в окрестности $U(\sigma)$ и имеет с f_1^t совпадающие как множество замыкания неустойчивых сепаратрис W^k. Шаг 1 завершен.

Переобозначим поток $\varphi(f_2^t)$ через f_2^t и будем считать, что потоки f_1^t, f_2^t имеют совпадающие как множества седла $\sigma_1 = \sigma_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma$, совпадающие замыкания неустойчивых сепаратрис $\operatorname{clos} W^u(\sigma_1) = \operatorname{clos} W^u(\sigma_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} W^k$ и потоки f_1^t, f_2^t совпадают в некоторой окрестности седла σ. Более того, оба потока f_1^t, f_2^t линейны в окрестности седла σ. В силу определения потока Морса–Смейла потоки f_1^t и f_2^t в некоторой окрестности узла ω (напомним, что узлы потоков f_1^t, f_2^t совпадают, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$) локально топологически эквивалентны линейному потоку с узловым притягивающим состоянием равновесия. Полностью аналогично рассуждениям в шаге 1 можно дополнительно добиться того, чтобы потоки f_1^t, f_2^t в некоторой окрестности узла ω были одинаковыми.

Шаг 2. Существует гомеоморфизм $\varphi_i\colon M^n \to M^n$, переводящий поток f_i^t в поток $\varphi_i(f_i^t)$, $i = 1, 2$, так, что выполняются следующие условия:

1) $\varphi_i(W^k) = W^k = \operatorname{clos} \operatorname{Sep}^u\bigl(\sigma, \varphi(f_i^t)\bigr)$, $i = 1, 2$;
2) существует окрестность $U(W^k)$ множества W^k такая, что ограничения потоков $\varphi_1(f_1^t)|_{U(W^k)}$, $\varphi_2(f_2^t)|_{U(W^k)}$ совпадают;

3) в $U(W^k)$ имеется трансверсальная секущая Σ^{n-1}, гомеоморфная $(n-1)$-мерной сфере, такая, что в M^n секущая Σ^{n-1} ограничивает n-шар, который содержит источники потоков $\varphi_i(f_i^t)$, $i = 1, 2$.

Докажем это. Не уменьшая общности, можно считать что окрестность $U(\sigma)$ седла σ является n-шаром с гладкой (в локальных координатах) границей такой, что пересечение $U(\sigma) \cap W^k$ есть k-шар d_σ, причем сток ω не принадлежат d_σ. Более того, можно считать, что граница $\partial U(\sigma)$ окрестности $U(\sigma)$ пересекает W^k в точности вдоль границы ∂d_σ k-шара d_σ, которая трансверсальна ограничениям потоков f_1^t, f_2^t на W^k.

Поскольку область притяжения $W^s_\omega(f_1^t)$ стока ω гомеоморфна евклидовому пространству $\mathbb{R}^n$, то нам будет удобно $W^s_\omega(f_1^t)$ представить в виде $\mathbb{R}^n$ так, чтобы пересечение $W^s_\omega(f_1^t) \cap W^k = P^k$ являлось гиперплоскостью $x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0$, а ω – началом координат O. Из определения потока Морса–Смейла вытекает, что мы можем одномерные траектории в $W^s_\omega(f_1^t) = \mathbb{R}^n$ считать лучами, исходящими из O (движение при увеличении времени происходит вдоль лучей к началу координат $O = \omega$).

Возьмем трансверсальную потоку f_2^t $(n-1)$-мерную сферу S_1, ограничивающую n-мерный шар D_1 с точкой ω внутри D_1 и пересекающую W^k по $(k-1)$-мерной сфере s_1^{k-1}, которая лежит в k-шаре d_σ, $s_1^{k-1} \subset d_\sigma$. Не уменьшая общности, можно считать, что $S_1 \subset W^s_\omega(f_1^t)$. Отметим, что так как потоки f_1^t, f_2^t совпадают в $U(\sigma)$, то s_1^{k-1} также трансверсальна потоку $f_1^t|_{d_\sigma}$. Более того, на S_1 имеется окрестность $\mathscr{N}_1 \subset S_1$ $(k-1)$-мерной сферы s_1^{k-1}, которая гомеоморфна $s_1^{k-1} \times D^{n-k}$ и которая трансверсальна потоку f_1^t (здесь D^{n-k} – открытый $(n-k)$-мерный диск).

В силу построения $S_1 \subset W^s_\omega(f_1^t) = \mathbb{R}^n$. Не уменьшая общности, можно считать, что S_1 локально плоско вложена в $\mathbb{R}^n$. Возьмем в $\mathbb{R}^n$ канонические $(n-1)$-мерные сферы S_2, S_3, которые задаются уравнениями вида $x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2$ и которые ограничивают n-мерные (вложенные друг в друга) шары $D_2 \subset D_3$ соответственно такие, что $D_1 \subset D_2 \subset D_3$. Так как траектории потока f_1^t в $\mathbb{R}^n$ суть лучи, то сферы S_2, S_3 трансверсальны потоку f_1^t.

Построим гомеоморфизм $D_3 \to D_3$, тождественный на S_3, который будет переводить каждую положительную полутраекторию $l^+(x)$ потока f_2^t с начальной точкой $x \in S_1$ в отрезок $(O, y]$ луча, проходящего через точку $y \in S_2$ (тем самым, мы построим гомеоморфизм, переводящий поток $f_2^t|_{D_1}$ в поток $f_1^t|_{D_2}$).

Из включений $D_1 \subset D_2 \subset D_3$ следует, что

$$K^n = D_3 \setminus \operatorname{int} D_1, \qquad K_{23} = D_3 \setminus \operatorname{int} D_2$$

являются n-мерными замкнутыми кольцами. Пересечение $K^n \cap W^k = A^k$ есть замкнутое k-мерное кольцо, наделенное структурой тривиального расслоения $(A^k, \mathbb{S}^{k-1} \times [0,1])$, которое индуцируется лучами, исходящими из O. Согласно лемме 3 расслоение $(A^k, \mathbb{S}^{k-1} \times [0,1])$ вкладывается в некоторое тривиальное расслоение $(K^n, \mathbb{S}^{n-1} \times [0,1])$. Одномерный слой этого расслоения с концевыми точками $x \in S_1$, $z \in S_3$ обозначим через $s(x,z)$. Лучи, исходящие из O, индуцируют на кольце K_{23} структуру тривиального расслоения $(K_{23}, \mathbb{S}^{n-1} \times [0,1])$.

Одномерный слой этого расслоения с концевыми точками $y \in S_2$, $z \in S_3$ обозначим через $[y, z]$ (мы его обозначаем в виде отрезка, так как $[y, z]$ есть пересечение луча с каноническим кольцом K_{23}). В силу указанных структур тривиальных расслоений существует гомеоморфизм $\psi_1 \colon K^n \to K_{23}$, переводящий каждый слой $s(x, z) \subset K^n$ в слой $[y, z] \subset K_{23}$ с общей концевой точкой $z \in S_3$. Продолжим теперь ψ_1 внутрь сферы S_1 (т.е. на диск D_1). Обозначим через $l_2^+(x)$ положительную полутраекторию потока f_2^t с начальной точкой $x \in S_1$. Поскольку S_1 трансверсальна потоку f_2^t, то $l_2^+(x) \subset D_1$ и ω-предельное множество $l_2^+(x)$ совпадает с O. Обозначим через $[O, y]$ отрезок луча с начальными точками O и $y \in S_2$. Из теоремы о непрерывной зависимости траекторий от начальных условий (см. [1], [2], [36]) вытекает, что существует продолжение ψ_1 до гомеоморфизма $\psi_2 \colon D_1 \to D_2$, который переводит каждую подожительную полутраекторию $l_2^+(x)$ в $[O, y]$, если только $\psi_1(x) = y$. Понятно, что $\psi_2(O) = O$. Гомеоморфизм $\psi \colon D_3 \to D_3$, который равен ψ_2 на D_1 и ψ_1 на K^n, равен тождественному отображению на $S_3 = \partial D_3$. Поэтому ψ продолжается с помощью тождественного отображения на все многообразие M^n до гомеоморфизма, который мы снова обозначим через ψ. Тогда потоки f_1^t, $\psi(f_2^t)$ совпадают в некоторой окрестности $U(W^k)$ сферы W^k.

Немного уменьшив, если требуется, $U(W^k)$, можно считать, что $U = U(W^k)$ является трубчатой окрестностью сферы W^k с границей ∂U, гомеоморфной $(n-1)$-мерной сфере. Более того, поскольку на W^k лежит седло и сток потоков $f_1^t|_U = \psi(f_2^t)|_U$, то в $U(W^k)$ имеется трансверсальная секущая Σ^{n-1}, гомеоморфная $(n-1)$-мерной сфере, через которую входят положительные полутраектории потоков f_1^t, $\psi(f_2^t)$. Следовательно, секущая Σ^{n-1} ограничивает n-шар, который содержит источники потоков f_1^t, $\psi(f_2^t)$. Шаг 2 завершен.

Для завершения доказательства теоремы 2 достаточно рассмотреть два потока f_1^t и f_2^t, которые совпадают в некоторой области $N \subset M^n$, так что $\partial N = \Sigma^{n-1}$ есть секущая, ограничивающая n-мерный шар $M^n \setminus N$, и внутри $M^n \setminus N$ у каждого из потоков f_1^t, f_2^t лежит ровно один источник. Следовательно, потоки f_1^t, f_2^t на $M^n \setminus N$ топологически эквивалентны потоку с линейным источником, для которого концентрические сферы, окружающие источник, являются трансверсальными гиперповерхностями. Отсюда вытекает, что тождественный на N гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма $M^n \to M^n$, который переводит траектории потока f_1^t в траектории потока f_2^t.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Сначала рассмотрим случай $n = 2$. Пусть f_1^t, f_2^t – непрерывные потоки с тремя состояниями равновесия, заданные на замкнутых двумерных многообразиях M_1^2, M_2^2 соответственно. Неблуждающее множество потока f_i^t состоит из источника α_i, стока ω_i и седла σ_i, $i = 1, 2$. Согласно теореме 1 $M_1 = M_2 = \mathbb{P}^2$ – проективная плоскость. Окружность $S_i^1 = W^u(\sigma_i) \cup \{\omega_i\}$ локально плоско вложена и не может разбивать $\mathbb{P}^2$, поскольку вне S_i^1 находится ровно одно состояние равновесия α_i, $i = 1, 2$. Следовательно, трубчатая окрестность $T(S_i^1)$ окружности S_i^1 гомеоморфна листу Мёбиуса. Так как на S_i^1 лежат сток и седло потока f_i^t, то можно считать (немного уменьшив, если необходимо, трубчатую окрестность), что граница окрестности $T(S_i^1)$

является замкнутой секущей, ограничивающей двумерный диск D_i^2, в котором находится источник α_i, $i = 1, 2$. Потоки $f_1^t|_{T(S_1^1)}$, $f_2^t|_{T(S_2^1)}$ локально топологически эквивалентны, и осуществляющий эту эквивалентность гомеоморфизм продолжается на диски D_1^2, D_2^2. В случае $n = 2$ теорема доказана.

Пусть теперь f_1^t, f_2^t – потоки Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек, на замкнутых четырехмерных многообразиях M_1^4, M_2^4 соответственно. Окружим узлы этих потоков трехмерными сферами, которые ограничивают в M_1^4, M_2^4 четырехмерные шары B_α^1, B_ω^1 и B_α^2, B_ω^2 соответственно. Существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $h_\alpha\colon B_\alpha^1 \to B_\alpha^2$, $h_\omega\colon B_\omega^1 \to B_\omega^2$, переводящие интегральные кривые потока f_1^t в интегральные кривые потока f_2^t. Из предложения 3 вытекает, что гомеоморфизмы h_α и h_ω можно продолжить до гомеоморфизма

$$M_1^4 \setminus \bigl(B_\alpha^1 \cup B_\omega^1\bigr) \to M_2^4 \setminus \bigl(B_\alpha^2 \cup B_\omega^2\bigr),$$

переводящего траектории потока f_1^t в траектории потока f_2^t. Следовательно, f_1^t, f_2^t топологически эквивалентны. В частности, многообразия M_1^4, M_2^4 гомеоморфны.

Теорема 3 доказана.

Список литературы

[1] Д. В. Аносов, “Исходные понятия. Элементарная теория”, Гл. 1, 2, *Динамические системы* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **1**, ВИНИТИ, М., 1985, 156–204.

[2] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ОГИЗ, М.–Л., 1947, 448 с.; англ. пер.: V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Mathematical Series, **22**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1960, viii+523 pp.

[3] J. Milnor, “On manifolds homeomorphic to the 7-sphere”, *Ann. of Math.* (2), **64**:2 (1956), 399–405.

[4] Д. В. Аносов, “Грубые системы”, *Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы*, Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института, Тр. МИАН СССР, **169**, 1985, 59–93; англ. пер.: D. V. Anosov, “Structurally stable systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **169** (1986), 61–95.

[5] C. Robinson, *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd ed., Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999, xiv+506 pp.

[6] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977, ii+149 pp.

[7] С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1(151) (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

[8] S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical system”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.

[9] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Глобальная динамика систем Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 115–139; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Global dynamics of Morse–Smale systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **261** (2008), 112–135.

[10] J. Eells, Jr., N. H. Kuiper, “Manifolds which are like projective planes”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **14** (1962), 5–46.

[11] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

[12] В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2011, 424 с.

[13] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Градиентные потоки с дико вложенными замыканиями сепаратрис”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, 2010, 138–146; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Gradient flows with wildly embedded closures of separatrices”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 132–140.

[14] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Системы Морса–Смейла с тремя неблуждающими точками”, *Докл. РАН*, **440**:1 (2011), 11–14; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Morse–Smale systems with three nonwandering points”, *Dokl. Math.*, **84**:2 (2011), 604–606.

[15] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979, 279 с.; пер. с англ.: M. W. Hirsch, *Differential topology*, Grad. Texts in Math., **33**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1976, x+221 pp.

[16] M. H. Freedman, “The topology of four-dimensional manifolds”, *J. Differential Geom.*, **17**:3 (1982), 357–453.

[17] M. H. A. Newman, “The engulfing theorem for topological manifolds”, *Ann. of Math.* (2), **84**:3 (1966), 555–571.

[18] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, 2003, arXiv: math.DG/0303109.

[19] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, 2003, arXiv: math.DG/0307245.

[20] S. Smale, “Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four”, *Ann. of Math.* (2), **74**:2 (1961), 391–406.

[21] J. F. Adams, “On the non-existence of elements of Hopf invariant one”, *Ann. of Math.* (2), **72**:1 (1960), 20–104.

[22] С. П. Новиков, *Топология*, 2-е изд., Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2002, 336 с.

[23] Х. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. Пеку, “О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях”, *Докл. РАН*, **377**:2 (2001), 151–155; англ. пер.: C. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, E. Pecou, “On the topological classification of gradient-like diffeomorphisms without heteroclinic curves on three-dimensional manifolds”, *Dokl. Math.*, **63**:2 (2001), 161–164.

[24] Х. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. Пеку, “О диффеоморфизмах Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, **236**, Наука, М., 2002, 66–78; англ. пер.: Ch. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, E. Peku, “On Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections on three-manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **236** (2002), 58–69.

[25] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “О диффеоморфизмах Морса–Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 369–386; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “On Morse–Smale diffeomorphisms with four periodic points on closed orientable manifolds”, *Math. Notes*, **74**:3 (2003), 352–366.

[26] Л. В. Келдыш, *Топологические вложения в евклидово пространство*, Тр. МИАН СССР, **81**, 1966; англ. пер.: L. V. Keldysh, “Topological imbeddings in Euclidean space”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **81** (1966), 1–203.

[27] R. J. Daverman, G. A. Venema, *Embeddings in manifolds*, Grad. Stud. Math., **106**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, xviii+468 pp.

[28] Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology Appl.*, **117**:3 (2002), 335–344.

[29] А. В. Чернавский, “Об особых точках топологических вложений многообразий и объединении локально плоских клеток”, *Докл. АН СССР*, **167**:3 (1966), 528–530; англ. пер.: A. V. Chernavskii, “Singular points of topological imbeddings of manifolds and the union of locally flat cells”, *Soviet Math. Dokl.*, **7** (1966), 433–436.

[30] J. C. Cantrell, “Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**:5 (1963), 716–718.

[31] J. Cantrell, C. Edwards, “Almost locally flat imbeddings of manifolds”, *Michigan Math. J.*, **12** (1965), 217–223.

[32] J. J. Andrews, M. L. Curtis, “Knotted 2-spheres in the 4-sphere”, *Ann. of Math.* (2), **70**:3 (1959), 565–571.

[33] Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, Мир, М., 1986, 302 с.; пер. с англ.: J. Palis, Jr., W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, xii+198 pp.

[34] C. McA. Gordon, J. Luecke, “Knots are determinned by their complements”, *J. Amer. Math. Soc.*, **2**:2 (1989), 371–415.

[35] P. B. Kronheimer, T. S. Mrowka, “Witten's conjecture and property P”, *Geom. Topol.*, **8** (2004), 295–310.

[36] S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, E. V. Zhuzhoma, *Introduction to qualitative theory of dynamical systems on closed surfaces*, Transl. Math. Monogr., **153**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, xiv+325 pp.

Евгений Викторович Жужома
(Evgeny V. Zhuzhoma)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступила в редакцию
02.07.2015

Владислав Сергеевич Медведев
(Vladislav S. Medvedev)
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского
E-mail: medvedev@unn.ac.ru