

Г. И. Пеникас

Модели «копула» в управлении валютным риском банка¹

Объектом исследования в статье является оптимизационная задача, в которой максимизируется ожидаемая доходность от выбранных значений открытых валютных позиций банка при ограничении на размер валютного риска. Целью статьи является сопоставление эффективности двух подходов к решению задачи: подхода, опирающегося на предположение многомерной нормальности логарифмированных доходностей, и подхода, использующего полупараметрический метод восстановления распределения методом копул. Для обоснования выбора копулы и сопоставления результатов применения разных подходов к оптимизации строится ретроспективный прогноз. На основе результатов исследования показано, что применение копул является предпочтительным, поскольку приводит к большему уровню доходности при одинаковом размере валютного риска.

Ключевые слова: копула, валютный риск, открытая валютная позиция (ОВП), оптимизация, поиск на сетке.

Когда купец покупает или продает товар за иностранную валюту, то не всегда дело можно вести за наличный расчет или путем учета векселей. В течение промежутка времени ... необходимого для того чтобы торговец обеспечил себя путем покупки или продажи соответствующей валюты, он несет валютный риск, который при нынешних условиях может совершенно лишить его торговой прибыли².

Дж. М. Кейнс
Трактат о денежной реформе, 1923 г.

Перед началом финансового года каждый коммерческий банк формирует планы по активам, пассивам, доходам и расходам, объединяя все данные в единый бюджет банка. На этапе его формирования казначейство банка должно определить целевые показатели позиций в основных валютах с учетом того, чтобы валютный риск не стал причиной существенных убытков или даже банкротства. Определение целевых показателей по своей сути является задачей портфельной оптимизации, где вкладом в актив является раз-

¹ Автор выражает благодарность С. А. Айвазяну за научное руководство при подготовке данного исследования и отдельно С. Н. Смирнову за важные комментарии, высказанные при обсуждении первичных результатов работы на научном семинаре лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту. Автор выражает признательность А. Косьяненко за рекомендации в части подготовки обзора литературы по теории портфельной оптимизации. Особая благодарность Ю. Н. Благовещенскому за обсуждение понятия «копула» и формулирование вывода о свойствах копул как свойств измеримой функции в теореме Колмогорова, что аналогичного теореме Шкляра. Благодарим И. А. Герасимову, А. В. Кудрова за существенные комментарии и вопросы, прозвучавшие на научном семинаре «Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов» при обсуждении второй версии доклада. Отдельное спасибо И. Л. Легостаевой за рекомендации в части редакционного оформления статьи.

² Кейнс Дж. М. Общая теория занятости, процента, денег. Избранное. М.: Эксмо, 2008. С. 842.

мер позиции в валюте; активами, из которых происходит выбор, служат валюты, а ценами активов — обменные курсы валют. Таким образом, для определения оптимальных размеров позиций можно воспользоваться основным аналитическим способом, предполагающим совместное нормальное распределение рядов логарифмированных доходностей обменных курсов, либо использовать иные способы, позволяющие более гибко моделировать многомерное распределение. Такой инструментарий доступен, в частности, благодаря применению теории копул. Поэтому целью данного исследования является сравнение эффективности данных двух способов. Для достижения намеченной цели статья построена следующим образом. Вначале дается понятие валютного риска и рассматриваются основные положения законодательства в части регулирования валютного риска, который может себе позволить коммерческий банк. Затем дается обзор литературы, освещающий историю развития портфельной теории от работы Марковитца (1952 г.) до последних исследований (2006 г.). В третьей части ставится формальная задача в общем виде и приводится постановка в предположении многомерной нормальности распределения. Далее описывается альтернативная (предлагаемая в работе) методология. В пятой части проводится визуальный анализ данных, нацеленный на выбор семейства моделей «копула», используемого в дальнейшем при описании многомерного распределения вектора логарифмированных доходностей обменных курсов. В шестой части приводятся результаты эконометрического исследования, в седьмой — основные выводы.

1. Понятие валютного риска

Валютный риск — это разновидность рыночного риска, который угрожает коммерческому банку будущими потерями вследствие неожиданных изменений валютных курсов на рынке. Важно отметить, что валютный риск возникает относительно выбранной валюты. Как правило, такую валюту называют привилегированной. Валютный риск также может рассчитываться относительно функциональной валюты, т. е. основной валюты расчетов. Для большинства коммерческих банков, функционирующих на территории России, такой валютой будет рубль. Именно изменение валютных курсов относительно рубля порождает валютный риск для банка.

Соответственно валютный риск возникает, когда существует ненулевая позиция, ему подверженная. Такая позиция называется **открытой валютной позицией (ОВП)**, которая представляет собой разность активных и пассивных остатков банка в данной валюте:

$$ОВП_j = A_j - П_j, \quad (1)$$

где $ОВП_j$ — открытая валютная позиция банка по j -ой валюте или драгоценному металлу ($j = 1, 2, \dots, m$), выраженная в рублях;

$A_j, П_j$ — активы и обязательства (пассивы) в j -ой валюте (драгоценном металле).

Открытая валютная позиция сводится в нуль при составлении итогового баланса, т. е. имеет место следующее равенство:

$$\sum_j ОВП_j = 0. \quad (2)$$

Кратко остановимся на текущих законодательных требованиях, предъявляемых к коммерческим банкам в России и за рубежом.

1.1. Требования Банка России

Управление валютным риском для коммерческих банков и их дочерних структур, находящихся в юрисдикции Российской Федерации, регламентируется документами Банка России: Положением № 313-П «О порядке расчета кредитными организациями величины рыночного риска» (утв. ЦБ РФ 14 ноября 2007 г.) (зарегистрировано в Минюсте РФ 6 декабря 2007 г. № 10638) и Инструкцией от 15 июля 2005 г. (ред. от 14 ноября 2007 г.) № 124-И «Об установлении размеров (лимитов) открытых валютных позиций, методике их расчета и особенностях осуществления надзора за их соблюдением кредитными организациями» (зарегистрировано в Минюсте РФ 5 августа 2005 г. № 6889). Достаточность капитала кредитной организации определяется на основе рассчитанной величины валютного риска (согласно инструкции 124-И) и величины собственных средств (капитала) банка, определенной согласно Положению 215-П «О методике определения собственных средств (капитала) кредитных организаций» (утв. ЦБ РФ 10 февраля 2003 г.) (ред. от 11 ноября 2009 г.).

Согласно Инструкции 124-И Банк России накладывает два условия на максимально допустимую величину валютного риска.

1) Открытая валютная позиция в отдельной j -ой валюте и драгоценном металле ($ОВП_j$), выраженная в рублях, не должна превышать 20% собственных средств (K) банка, т.е. $\frac{ОВП_j}{K} \leq 20\%$. Отметим, что хотя данный подход является доступным к расчету банками разного размера, он не гибкий, поскольку предполагает равную волатильность разных обменных курсов разных валютных пар.

2) Балансирующая открытая валютная позиция в рублях ($ОВП_{RUB}$) всего банка³ не должна превышать 10% собственных средств (капитала) банка:

$$\frac{ОВП_{RUB}}{K} \leq 10\%. \quad (3)$$

1.2. Рекомендации Базель II

Для коммерческих банков и их зависимых подразделений, не осуществляющих деятельность в пределах юрисдикции Российской Федерации, регулирование валютным риском определяется соглашением, разработанным Базельским комитетом по банковскому надзору (Базель II), который предлагает два подхода к регулированию валютного риска: простой метод («*shorthand method*») и подход внутренних моделей [Базель II, п. 718 (xl)].

Согласно Базель II валютный риск оценивается по всему банку. Для расчета валютного риска нужно, во-первых, определить сумму, подверженную риску для каждой валюты, переведев ее в валюту баланса, а во-вторых, определить риск, присущий банковским позици-

³ Также Банк России требует, чтобы балансирующая позиция в рублях каждого филиала не превышала 3% собственных средств (капитала) банка.

ям в разных валютах. Чистая открытая позиция банка по каждой валюте определяется путем суммирования:

- чистой спотовой (балансовой) позиции;
- чистой форвардной (внебалансовой) позиции;
- выданных гарантий (которые обязательно будут востребованы и вряд ли отозваны банком);
- чистой будущей прибыли (расходов), еще не начисленной, но полностью хеджированной;
- прочих статей, отражающих прибыли и убытки в иностранной валюте, включая накопленные, но еще не полученные (выплаченные) доходы (расходы);
- величины валютного риска по опционам (в размере величины дельта-эквивалента).

В рамках простого метода чистая открытая позиция (номинальная стоимость) по каждой валюте и золоту переводится в валюту отчетности по текущему курсу спот, рассчитывается суммарная чистая длинная и короткая позиции, в том числе и по золоту ($ОВП_{GOLD}$). Капитал, который резервируется под валютный риск, рассчитывается как 8% от наибольшей по абсолютной величине из чистых позиций (короткой или длинной) плюс 8% чистой позиции по золоту, независимо от знака последней позиции [Базель II (2006), п. 718 (xli); Дополнение к Базель I (1996), часть А2. II, п. 12, с. 25].

Таким образом, совокупный валютный риск, согласно простому методу Базель II, определяется по следующей формуле:

$$ОВП_{RUB} = 8\% \cdot (\max_j |ОВП_j| + |ОВП_{GOLD}|). \quad (4)$$

В рамках подхода внутренних моделей Базель II разрешает коммерческим банкам самостоятельно разрабатывать модели оценки валютного риска на основе методологии границы потерь.

2. Обзор литературы

История формального решения задачи выбора оптимального портфеля начинается с работы Марковитца [Markowitz (1952)], где сформулирована целевая функция как математическое ожидание портфеля при одновременной минимизации его дисперсии как меры риска. Необходимость введения ограничения на дисперсию вызвана наблюдавшимся фактом склонности инвесторов к диверсификации инвестиционного портфеля. Если бы инвесторы ориентировались единственно на ожидаемую доходность, то все вложения были бы сконцентрированы в одном активе (валюте). Важно остановиться на нескольких предположениях, которые были введены Марковитцем. Им рассмотрены только длинные позиции в активах. В своем исследовании ученый приводит геометрическое решение для оптимизационной задачи 3х- и 4х-мерного порядка. Он замечает, что меру эксцесса можно интерпретировать как склонность к азарту (*propensity to gamble*). Его аргументом было то, что если эксцесс входит в функцию ожидаемой полезности инвестора, то такой инвестор согласится сыграть в справедливую в актуарном смысле игру, где вероятность выигрыша, помноженная на сумму выигрыша, равна вероятности проигрыша, умноженной на сумму проигрыша. Если же эксцесс не является аргументом функции ожидаемой полезности, то такая игра не будет принята (см. [Markowitz (1952)], с. 90). Интересно отметить, что Марковитцем выделе-

ны два этапа решения оптимизационной задачи. На первом формируются представления (веры) инвестора относительно распределения доходностей. На втором этапе происходит решение задачи оптимизации доходности портфеля на основе распределения, сформированного ожиданиями из первого этапа. Сам автор подчеркивает, что его работа посвящена второму этапу при допущении, что многомерные распределения нормальны. При этом он не задается целью пройти первый этап, т.е. проверить, насколько предположение нормальности удовлетворяет стилизованным фактам из инвестиционной практики.

Развитием теории оптимизации инвестиционного портфеля стала работа Тобина [Tobin (1958)], в которой автор формулирует так называемую разделяющую теорему. Суть ее заключается в следующем. Если ввести в сформулированную Марковитцем задачу возможность коротких продаж, то ее решение можно *разделить* на два этапа, которые не будут зависеть друг от друга. Тобин доказал, что решение о структуре (долях) активов в портфеле не зависит от решения о том, сколько брать в долг. Таким образом, вначале решается задача оптимизации структуры портфеля. На выходе получаем значение ожидаемого дохода как функции от суммы вложенных средств. Затем в результате сопоставления стоимости средств, доступных для взятия в долг, и ожидаемой доходности инвестор принимает решение о сумме долга.

Дальнейшее развитие теории оптимизации портфеля находит в работе Линтнера [Lintner (1965a)], в которой автор расширяет модель Марковитца возможностью осуществлять короткие продажи. Необходимо отметить, что Линтнер сужает свою теоретическую модель, поскольку предполагает 100-процентный уровень маржинального залога для короткой позиции. Так, в случае короткой позиции инвестор получает только рыночный риск (изменение цены) от актива в короткой (проданной) позиции и процентный доход от вырученных средств, размещенных на расчетном (брокерском) счете (см. [Lintner (1965a)], с. 20). В действительности же короткие продажи при меньшем уровне маржи позволяют инвестору также получить рыночный риск от другого актива, в котором он занимает длинную позицию на средства короткой. Кроме того, автор предлагает аналитическое решение для задачи оптимизации в предположении нормальности. Сложность в непосредственном использовании данного решения состоит в том, что сама задача не имеет глобального максимума. Автор постулирует, что любую доходность можно достичь при некоторой комбинации длинных и коротких позиций в активах и денежных средствах, одновременно стремясь минимизировать дисперсию. Задача, которая будет решена в данном исследовании, отличается тем, что здесь будет задано ограничение не просто на минимум дисперсии, а на численное значение величины риска, измеренного через меру границы потерь.

Следующим этапом развития теории портфельной оптимизации стали работы (см. например [Lintner (1965b)], [Mossin (1966)]), анализирующие равновесие на фондовом рынке в предположении, что все участники решают задачу, сформулированную Марковитцем. Так, Моссин (см. [Mossin (1966)], с. 775) показывает, что вложения в разные активы будут прямо пропорциональны их ожидаемым доходностям и обратно пропорциональны их стандартным отклонениям.

После рассмотрения вопроса о рыночном равновесии исследователи (см. например [Merton (1969)], [Merton (1971)], [Merton (1973)], [Mossin (1968)], [Samuelson (1969)]) заинтересовались решением задачи портфельной оптимизации в течение нескольких периодов времени. Особенно интересно отметить работу Самуэльсона [Samuelson (1969)], в которой доказывается эквивалентность решения однопериодной и многопериодной задач.

Своего рода этапной стала нобелевская лекция Марковитца [Markowitz (1990)], в которой представлен обзор развития теории портфельной оптимизации. Также в ней предложена

мера риска, названная *полудисперсией* (*semi-variance*), которая равна дисперсии только отрицательных отклонений доходности ниже некоторого заданного уровня. Хотя сам Марковитц отмечает, что ему не известны работы, показывающие такие функции полезности, для которых метод оптимизации на основе среднего-дисперсии не работает, но работает для метода среднего — полудисперсии.

Новым направлением в развитии портфельной теории является приложение копул к моделированию многомерных распределений в задачах портфельной оптимизации. Здесь стоит отметить такие работы, как [Hennessy, Lapan (2002)], [Natale (2006)], [Алексеев и др. (2006)]. В частности, Хеннеси и Лапан [Hennessy, Lapan (2002)] рассматривают архимедовы копулы для моделирования многомерного распределения, лежащего в основе задачи оптимизации портфеля при максимизации функции ожидаемой полезности. Исследователи отмечают, что некоторые выводы микроэкономического анализа в части поведения оптимизирующего портфель субъекта можно перенести как условие на функцию-генератор архимедовой копулы. В частности, они утверждают, что для агента с возрастающей и вогнутой функцией полезности и выпуклой первой производной от нее оптимальный вклад в актив (если он положителен) возрастает при любом смещении частного распределения доходностей этого актива в терминах второго стохастического доминирования тогда и только тогда, когда отношение второй производной функции-генератора копулы к первой производной убывает по аргументу этой функции (см. [Hennessy, Lapan (2002)], с. 151).

Если работа Хеннеси и Лапана носила теоретический характер, то исследование Натале [Natale (2006)] является эмпирическим и построено на основе одиннадцатимерного распределения месячных доходностей акций. Автор использует аппарат копул для моделирования связки совместного распределения и теорию экстремальных значений для восстановления частных распределений. Существенным упущением работы является отсутствие обоснования выбора копулы. Натале использует копулу Клэйтона, характеризующуюся наличием зависимости нижних (левых) хвостов распределений, т.е. для данной копулы характерна концентрация точек в области низких вероятностей (в гауссовской копуле такая зависимость отсутствует). Данное предположение логично, если учесть первое исследование совместного распределения доходностей акций Лонгина и Солника [Longin, Solnik (1998)], в котором отмечается, что акции более склонны к одновременному падению в цене, чем к росту.

Несмотря на выбор Натале в пользу копулы Клэйтона, в другом исследовании [Алексеев и др. (2006)] коллеги отказались от нее в пользу копулы Али-Микаэля-Хака при оптимизации портфеля акций на основе данных о ежедневных котировках. Авторы отвергают копулу Клэйтона из-за того, что она, по их мнению, характеризуется зависимостью верхних «хвостов». В действительности они использовали «копулу дожития» Клэйтона, которая, как и вероятность дожития в страховании, равна единице за вычетом значения обычной копулы Клэйтона с зависимостью нижних хвостов. Несмотря на использование аппарата копул, исследователи не проводят сопоставления полученных результатов с иными методами восстановления многомерного распределения или иными способами решения оптимизационной задачи. Единственное что проводится, — это сравнение ежедневно оптимизируемого портфеля с портфелем с неизменными долями, на основании чего показано предпочтение первого подхода, так как он дает доходность 6,74% против 4,51% во втором случае (см. Алексеев и др. (2006)], с. 282).

Стоит отметить работу, в которой анализируется влияние выбора разных мер риска на оптимальную структуру инвестиционного портфеля и где отмечается, что многомерное рас-

пределение доходностей не соответствует гауссовской копуле (см. [Adam, Houkari, Laurent (2007)], с. 11–12).

Обобщая представленный обзор литературы, целесообразно отметить место данного исследования, а именно указать и обосновать, какие шаги будут в нем предприняты.

Во-первых, данное исследование не опирается на функцию полезности инвестора, выбирающего размер открытой валютной позиции. Поэтому целевой функцией будет ожидаемая доходность, а не ожидаемая полезность.

Во-вторых, результат оптимизации сопоставим с альтернативными решениями. Поскольку основные работы Марковитца, Линтнера и других исследователей предполагали многомерный гауссовский закон распределения, решение на основе восстановленного с помощью копулы распределения будет сопоставлено с аналитическим решением, полученным в предположении многомерной нормальности распределения логарифмических доходностей.

В-третьих, для обоснования выбора всегда будет использован ретроспективный прогноз, основанный на данных, не входивших в обучающую выборку. Так, выбор копулы обоснуем визуальным анализом данных и результатами статистической верификации моделей, полученными на данных 2008 г. Сравнение эффективности подходов к оптимизации в предположении многомерной нормальности и при ее отсутствии выявим на данных за 2009 г.

3. Постановка оптимизационной задачи

Вначале введем обозначения, которые потребуются при постановке оптимизационной задачи.

FX_j — случайная величина, равная обменному курсу j -ой валюты к рублю;

$FX_j(t)$ — реализация случайной величины FX_j в момент времени t ;

η_j — случайная величина, определяемая величиной логарифмической⁴ доходности обменного курса j -ой валюты к рублю;

$\eta_j(t) = \ln(FX_j(t)/FX_j(t-1))$ — реализация данной случайной величины за период $[t-1; t]$;

$x^{(j)}$ — размер ОВП в j -ой валюте ($j = 1, \dots, m$), выраженный в единицах j -ой валюты;

$x^{(j)} \cdot FX_j$ — размер ОВП в j -ой валюте ($j = 1, \dots, m$), выраженный в рублях;

$X = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})^T$ — многомерный вектор ОВП по всем валютам. Одной из валют будет рубль, хотя по факту ОВП в рублях не содержит валютного риска для банка;

$R^{(j)} = \eta_j \cdot x^{(j)}$ — случайная величина, равная произведению величины ОВП в j -ой валюте и логарифмической доходности обменного курса данной валюты к рублю;

$R^{(j)}(t) = \eta_j(t) \cdot x^{(j)}$ — реализация случайной величины в момент t ;

$f_{R^{(j)}}(y^{(j)})$ — плотность распределения случайной величины $R^{(j)}$ в точке $y^{(j)}$;

$F_{R^{(j)}}(y^{(j)})$ — функция распределения случайной величины $R^{(j)}$ в точке $y^{(j)}$;

⁴ Изначально в исследованиях, построенных на основе финансовых данных, использовалось логарифмическое преобразование данных для удобства работы в предположениях нормальности с учетом того, что при небольших значениях аргумента справедливо следующее приближенное соотношение доходности обменного курса.

$\bar{R} = \sum_j R^{(j)}$ — целевая (максимизируемая) логарифмическая доходность, равная сумме логарифмических доходностей, взвешенных по размерам ОВП во всех валютах;

$f_{\bar{R}}(y)$ — плотность распределения целевой доходности \bar{R} в точке y ;

$F_{\bar{R}}(y)$ — функция распределения целевой доходности \bar{R} в точке y ;

$\Gamma\Gamma(\alpha) = -F_{\bar{R}}^{-1}(\alpha)$ — величина валютного риска банка (граница потерь уровня α), определяемая как квантиль функции распределения целевой доходности \bar{R} . Поскольку в силу введенных выше обозначений величина $F_{\bar{R}}^{-1}(\alpha)$ отрицательна, то $-F_{\bar{R}}^{-1}(\alpha)$ — положительна.

Следуя Марковитцу (см. [Markowitz (1952)], с. 78), предположим, что доходность (η_j) в j -ой валюте не зависит от размера ОВП ($x^{(j)}$). В рамках валютного рынка данное предположение является обоснованным в силу значимых объемов операций, в разы превышающих операции на фондовом рынке Российской Федерации, где в случае отдельно взятых неликвидных ценных бумаг требуется дополнительная проверка гипотезы о такой независимости.

Тем не менее, в отличие от Марковитца, при решении задачи не будет вводиться ограничение на положительные значения параметров управления задачи (на размеры ОВП). Таким образом, при решении задачи допускается отрицательная валютная позиция, которая трактуется как превышение пассивов банка над его активами в данной валюте.

Тогда оптимизационная задача по управлению валютным риском может быть сформулирована в следующей форме:

$$\begin{cases} E(\bar{R} | X) \rightarrow \max_x \\ \Gamma\Gamma(\alpha) \leq K \\ \sum_j x^{(j)} \cdot FX_j = 0 \end{cases}, \quad (5)$$

где K — капитал банка.

4. Постановка задачи в предположении многомерного нормального закона

Использование многомерного нормального закона распределения имеет то преимущество, что постановку задачи (5) можно записать в терминах математического ожидания и дисперсии. Употребляя введенные выше обозначения, приведем постановку задачи из статьи Марковитца (см. [Markowitz (1952)], с. 81):

$$\begin{cases} E(\bar{R} | X) \rightarrow \max_x \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} \cdot (x^{(i)} \cdot \eta_i) \cdot (x^{(j)} \cdot \eta_j) \rightarrow \min_x \\ \sum_j x^{(j)} \cdot FX_j = 0 \\ \forall j: x^{(j)} \geq 0 \end{cases}, \quad (6)$$

где σ_{ij} — коэффициент ковариации логарифмических доходностей обменных курсов i -ой и j -ой валют.

Отметим, что расчет дисперсии многомерного распределения (вторая строка системы (6)) является известным результатом в многомерном статистическом анализе (см., например, [Андерсон (1963)]). В частности, известно, что если многомерная случайная величина $\eta = (\eta_1; \dots; \eta_m)^T$ подчиняется закону совместного нормального распределения с вектором средних значений a и ковариационной матрицей Σ , т.е. $\eta \sim N_m(a; \Sigma)$, то новая случайная величина $\xi = B \cdot \eta$, являющаяся линейной комбинацией компонент вектора η с весами $B = (b_1; \dots; b_m)$, будет подчинена нормальному закону распределения с параметрами среднего $E(\xi) = B \cdot a$ и дисперсии $\sigma_\xi^2 = B \Sigma B^T$, т.е.:

$$\xi \sim N_1(Ba; B \Sigma B^T). \tag{7}$$

Необходимо прокомментировать, почему в данном исследовании не была использована первоначальная постановка задачи Марковитца (6). Она более жесткая, чем (5), что дает заведомо меньшую доходность, чем постановка (5). Это объясняется мультипликативным характером случайной величины, для которой ограничение дисперсии к минимуму ведет и к занижению доходности.

Предлагаемая в работе оптимизационная постановка задачи (5) в предположении совместной нормальности вектора логарифмических доходностей $\eta = (\eta_1; \dots; \eta_m)^T$ с учетом (7) без ограничения на неотрицательность может быть записана ОВП в форме:

$$\begin{cases} E(\bar{R} | X) \rightarrow \max_x \\ u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{X^T \cdot \Sigma \cdot X} \leq K, \\ \sum_j x^{(j)} \cdot FX_j = 0 \end{cases} \tag{8}$$

где Σ — ковариационная матрица вектора логарифмических доходностей η ; $u_{1-\alpha}$ — квантиль стандартного нормального закона распределения уровня $1-\alpha$ (или процентная точка этого распределения уровня α).

4. Методология исследования

Для решения оптимизационной задачи используем следующий алгоритм анализа данных.

Вначале все данные⁵ о недельных котировках за период с 1 января 2000 г. по 1 января 2010 г. делятся на три части:

- А — с 1 января 2000 г. по 31 декабря 2007 г., 401 точка;
- В — с 1 января 2008 г. по 31 декабря 2008 г., 51 точка;
- С — с 1 января 2009 г. по 31 декабря 2009 г., 51 точка.

⁵ Исходные данные и программный код доступны на сайте журнала «Прикладная эконометрика» <http://www.marketds.ru/?sect=journal&id=econometrics>

Целью данного разбиения является формирование обучающих и экзаменуемых выборок, необходимых для проведения следующих этапов исследования.

- На первом этапе **часть А** используется как обучающая выборка для предварительной оценки параметров каждого из рассматриваемых типов копул и многомерного нормального распределения.

- На втором этапе **часть В** является экзаменуемой выборкой, позволяющей выбрать тип (семейство) копулы.

- На третьем этапе формируется обучающая выборка из **частей А+В**, которая позволяет провести окончательную оценку параметра выбранного типа копулы и многомерного нормального закона распределения вероятностей.

- На завершающем четвертом этапе **часть С** используется для сравнения эффективности решения рассматриваемой оптимизационной задачи в рамках двух подходов: 1) основанного на применении копул; 2) в предположении многомерной нормальности.

Кратко напомним понятие **копулы**⁶ совместного распределения и ее основные семейства, используя обозначения, введенные в данной работе. Теорема Шкляра [Sklar (1959)] постулирует возможность записи (см. [Чес (2006)], р. 12) функции распределения $F_R(y^{(1)}; \dots; y^{(m)})$ многомерной случайной величины как функции C от частных функций распределения ее компонент $F_{R^{(j)}}(y^{(j)})$ ($j = 1, 2, \dots, m$) в виде:

$$F_R(y) = C[F_{R^{(1)}}(y^{(1)}); \dots; F_{R^{(m)}}(y^{(m)})], \tag{9}$$

где $y = (y^{(1)}; \dots; y^{(m)})^T$.

Тогда функция связи частных распределений C и будет называться **копулой**, она определяется по формуле (13).

$$F_R(y) = C[F_{R^{(1)}}(y^{(1)}); \dots; F_{R^{(m)}}(y^{(m)})], \tag{10}$$

где $u = (u^{(1)}; \dots; u^{(m)})$ и $u^{(j)} = F_{R^{(j)}}(y^{(j)})$ — значение частной кумулятивной функции распределения.

Итак, подобрав подходящим образом вид функции $C(u^{(1)}; u^{(2)}; \dots; u^{(m)})$ (которая по своей природе должна удовлетворять требованиям, накладываемым на *функцию распределения*), по частным распределениям $F_{R^{(j)}}(y^{(j)})$ ($j = 1, 2, \dots, m$) можно восстановить многомерную функцию распределения $F_R(y^{(1)}; \dots; y^{(m)})$.

Выделяют несколько основных семейств копул: эллипсообразные, архимедовы, экстремальные. **Эллипсообразные копулы** происходят из аналитических форм записи многомерного гауссовского распределения и распределения Стьюдента. Они позволяют восстанавливать симметричные совместные распределения.

Архимедовы копулы можно представить в следующем виде.

$$C(u^{(1)}; u^{(2)}; \dots; u^{(m)}) = \varphi^{-1} \cdot [\varphi(u^{(1)}) + \varphi(u^{(2)}) + \dots + \varphi(u^{(m)})], \tag{11}$$

⁶ Подробнее о понятии копулы см. [Joe (1997)], [Cherubini et al. (2004)], [Nelsen (2006)].

где $u^{(i)}$ — обратная функция распределения j -ой случайной величины; $\varphi(\cdot)$ — функция-генератор копулы.

Свое название архимедовы копулы получили из-за аналогии с архимедовой аксиомой, которая постулирует, что для любых двух целых положительных чисел a и b всегда найдется такое число n , что будет верно соотношение $n \cdot a > b$. Для копулы введем следующие обозначения $u_c^1 = u$ и $u_c^{n+1} = C(u; u_c^n)$. Тогда $\forall u, v \in (0; 1) \exists n: u_c^n > v$, что аналогично аксиоме Архимеда (доказательство см. в [Nelsen (2006)], с. 122).

Экстремальные копулы созданы на основе одномерных законов распределения экстремумов. Для них должно выполняться следующее соотношение (см. [Bouye (2002)], с. 5):

$$C\left(\left[u^{(1)}\right]^t; \left[u^{(2)}\right]^t; \dots; \left[u^{(m)}\right]^t\right) = C^t\left(u^{(1)}; u^{(2)}; \dots; u^{(m)}\right), \quad \forall t > 0. \quad (12)$$

Также отметим понятие **независимой копулы**, или копулы произведения. Данная копула соответствует случаю независимости случайных величин и определяется следующим образом:

$$C\left(u^{(1)}; u^{(2)}; \dots; u^{(m)}\right) = u^{(1)} \cdot u^{(2)} \cdot \dots \cdot u^{(m)}. \quad (13)$$

Для цели восстановления совместного распределения были рассмотрены основные семейства копул: эллипсообразные (гауссовская, Стьюдента с 3 и 7 степенями свободы⁷), архимедовы (Клэйтона, Франка), экстремальные (Гумбеля-Хугарда⁸, Коши). Их функциональные формы представлены в табл. 1.

Для восстановления многомерного распределения применяется полупараметрический метод, когда копула оценивается параметрически⁹, а в качестве частных распределений используются их эмпирические функции распределения. В работах Кима [Kim et al. (2007)] и Фантаццини [Fantazzini (2008)] отмечается, что при неизвестных частных распределениях ошибки в их оценке могут существенно снизить качество оценки копулы, приводя к ее неверной спецификации.

Перед оценкой копулы был проведен **тест на независимость**, предложенный в работе [Genest, Remillard (2004)] и проверяющий, не является ли исходная копула многомерного распределения независимой копулой. Сам тест предполагает выделение подмножеств из исходного распределения, согласно декомпозиции Мебиуса. В работе предлагались две

⁷ Следуя логике статьи Меуччи [Meucci (2008)], возможно использовать итеративный поиск оптимального количества степеней свободы и оценки корреляционной матрицы для копулы Стьюдента при использовании метода максимального правдоподобия. Данный подход не был реализован по двум причинам: во-первых, поиск оптимального количества степеней свободы необходим в случае, когда исследователь имеет априорное представление о том, что рассматриваемая копула отличается эллипсообразным характером с явно выраженными тяжелыми «хвостами» (визуальный анализ показывает, что однозначной симметрии не наблюдается; особенно в части зависимости котировок франка и фунта); во-вторых, поиск степеней свободы необходим для уточнения типа связи между крайними вариантами копулы Стьюдента (гауссовской с бесконечным числом степеней свободы и Коши с одной). Дальнейший анализ указывает на предпочтение копулы Гумбеля эллипсообразными копулами.

⁸ Копула Гумбеля-Хугарда также является архимедовой копулой.

⁹ Для оценки параметров копул был использован метод ранговой корреляции Кендалла (в программе R данный метод маркируется как TAU), поскольку метод максимального правдоподобия работал не во всех случаях останавливался при получении бесконечных значений функции правдоподобия.

Таблица 1

Различные семейства копул

Наименование копулы (для архимедовых копул приведена функция-генератора $\varphi(u^{(j)}), j = 1, 2, \dots, m$)

Формула копулы
 $C(u^{(1)}; u^{(2)}; \dots; u^{(m)})$
 α — параметр копулы;

Гауссовская¹⁰

$$\int_{-\infty}^{N_j^{-1}(u^{(j)})} \int_{-\infty}^{N_i^{-1}(u^{(i)})} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left\{\frac{2\cdot\alpha\cdot u^{(1)}\cdot u^{(2)} - (u^{(1)})^2 - (u^{(2)})^2}{2(1-\alpha^2)}\right\} du^{(1)} du^{(2)}, \quad (14)$$

где N_j — функция нормального закона распределения случайной величины $u^{(j)}$;

Стьюдента¹⁰

$$\int_{-\infty}^{t_{v,j}^{-1}(u^{(j)})} \int_{-\infty}^{t_{v,i}^{-1}(u^{(i)})} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left\{1 + \frac{(u^{(1)})^2 + (u^{(2)})^2 - 2\cdot\alpha\cdot u^{(1)}\cdot u^{(2)}}{v(1-\alpha^2)}\right\}^{-\frac{v+2}{2}} du^{(1)} du^{(2)}, \quad (15)$$

где $t_{v,j}$ — функция распределения Стьюдента случайной величины $u^{(j)}$;
 v — число степеней свободы копулы;

Франка

$$\varphi(u^{(j)}) = -\frac{1}{\alpha} \log\left[1 + e^{\alpha u^{(j)}} (e^{-\alpha} - 1)\right] \quad -\frac{1}{\alpha} \log\left[1 + \frac{\prod_{j=1}^m (e^{-\alpha u^{(j)}} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{m-1}}\right]; \quad (16)$$

Клэйтона

$$\varphi(u^{(j)}) = (u^{(j)} + 1)^{-1/\alpha} \quad \left\{ \left[\sum_{j=1}^m (u^{(j)})^{-\alpha} \right] - m + 1 \right\}^{-1/\alpha}; \quad (17)$$

Гумбеля-Хугарда

$$\varphi(u^{(j)}) = \exp\left(-[u^{(j)}]^{1/\alpha}\right) \quad \exp\left\{-\left[\sum_{j=1}^m (-\log u^{(j)})^\alpha\right]^{1/\alpha}\right\}. \quad (18)$$

модификации теста. Использован вариант, основанный на проверке на независимость всевозможных комбинаций случайных величин. В частности, для каждой комбинации рассчитывается статистика и сравнивается с критическим значением (графическим представлением результатов данного теста является «диаграмма зависимости», или от англ. *dependogram*; название графика *депендограммы* аналогично *коррелограмме*, как и принцип

¹⁰ Приводится формула для двумерной копулы. Источник: [Cherubini et al. (2004), p. 63], [Cech (2006), p. 21]. В таблице эта формула представлена, поскольку место параметра в ней будет наглядным для читателя. В исследовании же используется оценка трехмерной копулы, которая реализована при помощи заложенного в программе R-алгоритма.

его анализа — если статистика превышает критический порог, гипотеза независимости отвергается).

Для решения оптимизационной задачи при наличии полностью восстановленного многомерного распределения был использован метод поиска на сетке. Суть алгоритма заключается в последовательном переборе всех значений изменяемых параметров с определенным шагом из заданного множества перебора с записью в память только таких комбинаций всех трех параметров, которые дают большую, чем рассчитанную на предыдущем шаге, доходность, не превышающую «порога» в размере капитала оценки границы потерь.

Для решения той же задачи в предположении нормальности использован метод Ньютона-Рамстона, который требует меньше времени и вычислительных ресурсов и пригоден для работы с гауссовским многомерным распределением.

5. Визуальный анализ данных

Для решения оптимизационной задачи (5) были использованы недельные котировки¹¹ трех валют (на конец каждой рабочей недели, т.е. на пятницу): швейцарского франка (CHF; $j = 1$); фунта Соединенного Королевства Великобритании (GBP; $j = 2$) и японской йены (JPY; $j = 3$). Эти валюты были выбраны, поскольку реже рассматривались в исследованиях. Как следствие, их совместная динамика мало изучена. Хотя основную долю валютных активов и пассивов банки имеют в долларах США и евро, эти две валюты представляют меньший интерес, так как являются объектами валютного таргетирования Центрального банка РФ. Основным стилизованным фактом поведения их обменных курсов по отношению к рублю является сильная обратная зависимость.

Для решения оптимизационных задач целесообразно использовать данные, соответствующие горизонту планирования инвестора. Так, Марковитц в своей нобелевской лекции рассматривает годовые и месячные приросты котировок ценных бумаг (см. [Markowitz (1990)], с. 283). Натале [Natale (2006)] тоже представлены месячные данные. Алексеев и другие [Алексеев и др. (2006)] брали дневные данные. Использование месячных данных по валютным курсам существенно снижает исходный набор данных, учитывая, что курсы до 1999 г. соответствуют иной экономической политике. Дневной горизонт не является реалистичным с точки зрения управления валютной позицией банка, на существенное изменение которой требуется в среднем неделя. Именно поэтому предпочтение было отдано в пользу недельных данных, которые соответствуют реальному горизонту управления валютной позицией и по количеству достаточны для дальнейшего анализа.

Ниже приведена динамика выбранных курсов за весь период с 1 января 2000 г. по 1 января 2010 г. (рис. 1) Подробные описательные статистики данных представлены в приложении 1.

Прежде чем приступить к оценке копулы, необходимо подробно проанализировать доступную статистику о поведении выбранных обменных курсов. Ниже приводятся диаграммы как в логарифмах прироста валютных курсов (рис. 2), так и в кумулятивных вероятностях, соответствующих частным функциям распределений, построенных методом накопленных эмпирических частот (рис. 3).

¹¹ Источником первичных данных выступил сайт Банка России http://cbr.ru/currency_base/dynamics.aspx

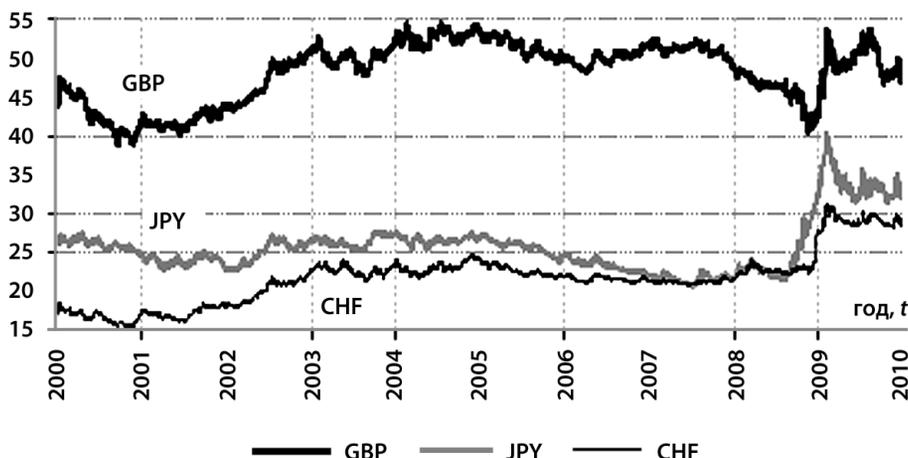


Рис. 1. Динамика обменных курсов в период с января 2000 г. по январь 2010 г.

Необходимо заметить, что использование копул обосновано тем, что гипотеза о многомерной нормальности логарифмированных доходностей отвергается из-за негауссовского характера частных распределений (см. в Приложении 1 значения коэффициентов асимметрии, эксцесса и статистики Харки—Бера, используемой для проверки гипотезы о нормальности распределения случайной величины на основе значений коэффициентов асимметрии и эксцесса, которые в случае нормальности равны 0 и 3 соответственно).

Подробнее рассмотрим крайние точки, которые необходимо проверить, не являются ли они «выбросами». В таблице 2 справа представлены значения экстремумов, слева — соответствующие им даты, ближайшие предшествовавшие даты и значения курсов, установленные Банком России на них.

Таблица 2

Характеристики данных, соответствующих экстремальным реализациям логарифмических доходностей

Дата наблюдения	Значение обменного курса (руб. за 1 единицу ин. валюты)			Недельные логарифмические доходности валютных курсов		
	CHF	GBP	JPY	CHF	GBP	JPY
06.01.2000	17,4200	44,2000	26,0300	0	0	0
13.01.2000	18,5400	47,5600	27,2100	0,062	0,073	0,044
02.10.2008	22,9062	45,6591	24,0997	-0,006	-0,018	0,021
09.10.2008	23,0673	45,9578	26,0587	0,007	0,007	0,078
11.12.2008	23,1762	41,3715	30,0762	0,004	-0,002	0,002
18.12.2008	24,6815	42,9310	31,1065	0,063	0,037	0,034
25.12.2008	26,4827	42,1940	31,6801	0,070	-0,017	0,018
01.01.2009	27,8752	42,4914	32,5723	0,051	0,007	0,028
15.01.2009	28,3369	46,3577	35,1681	0,016	0,087	0,077
29.01.2009	29,2751	47,3852	37,2455	0,031	0,055	0,023
05.02.2009	31,4309	51,9099	40,4305	0,071	0,091	0,082

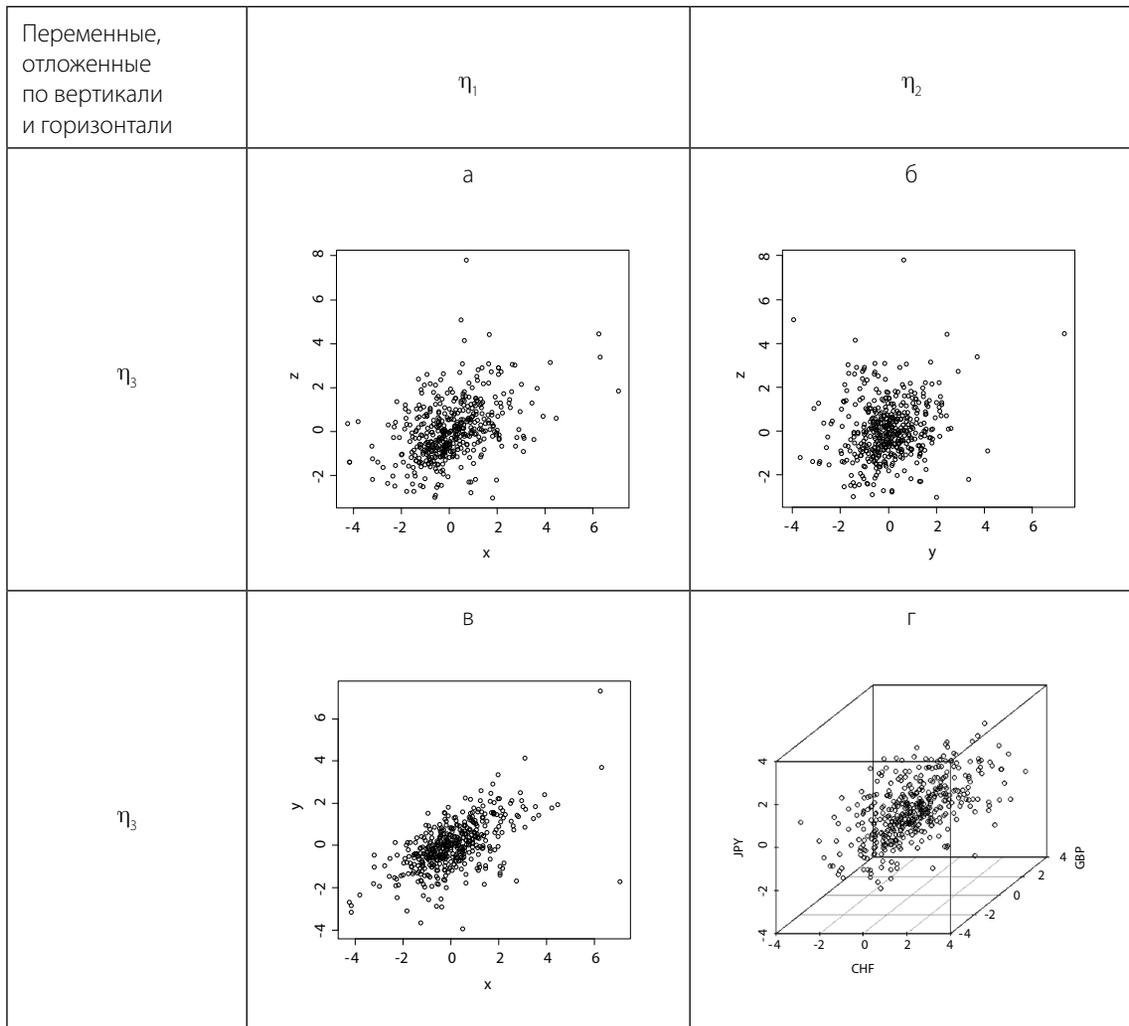


Рис. 2. Парные и трехмерные корреляционные поля логарифмических доходностей трех валют (данные 2000–2009 гг., 452 точки)

Примечание: из-за особенностей обработки данных в среде R 2.9.2 логарифмические доходности были домножены на 100. Соответствующие значения приведены на рисунках.

При работе с панельными данными крайние исходы, скорее всего, были бы исключены из рассмотрения. Приведенные выше данные показывают, что действительно такие курсы и, как следствие, доходности имели место. Поэтому такие наблюдения нельзя трактовать как «выбросы», их целесообразно сохранить для дальнейшего исследования.

Из анализа приведенных ниже (рис. 3) диаграмм распределения вероятностей (не приростов) можно заключить следующее. Наиболее сильный характер взаимосвязи наблюдается между кумулятивными вероятностями приростов швейцарского франка и английского фунта. Причем высока концентрация точек в области высоких значений (превышающих 90% вероятности).

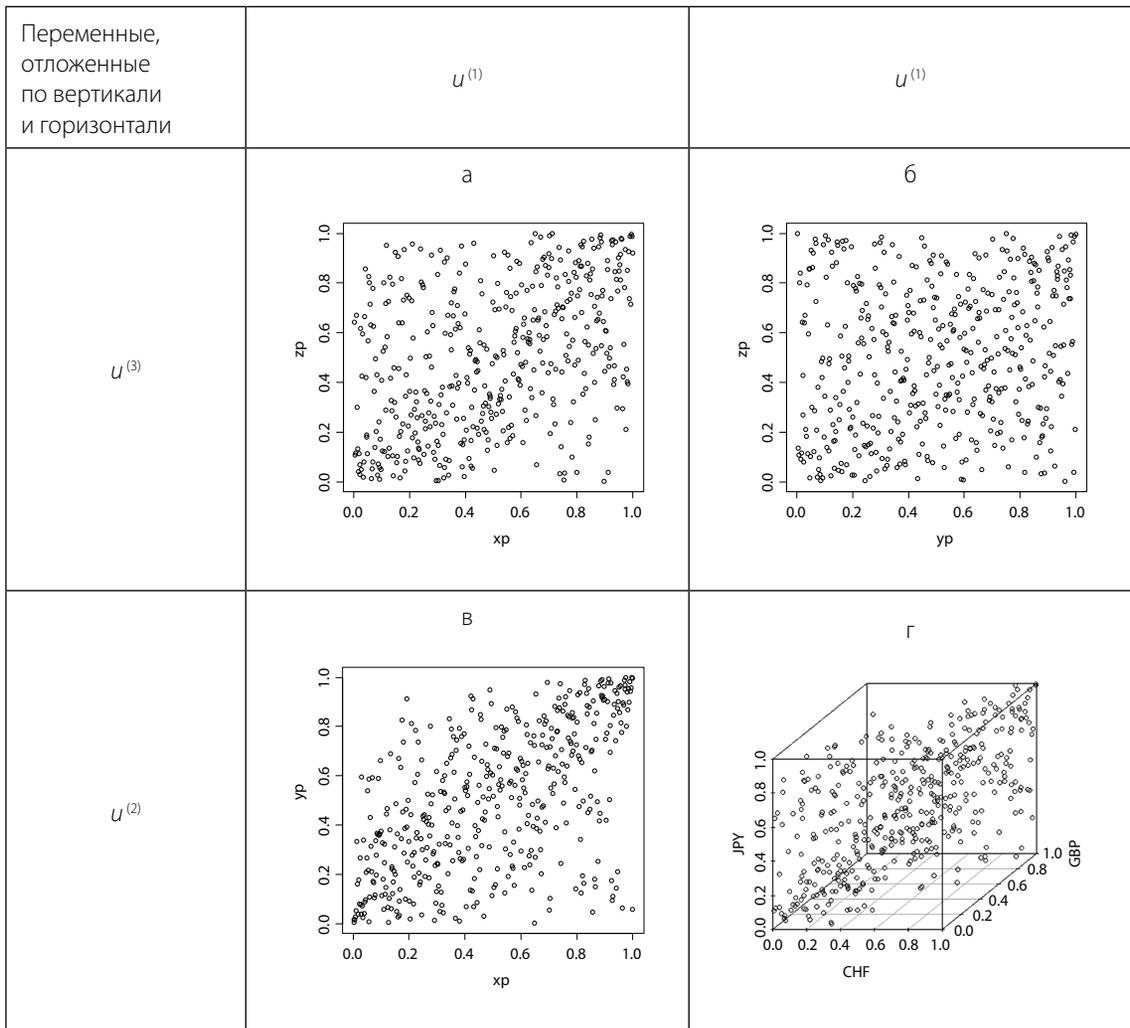


Рис. 3. Квантильные облака логарифмических приростов трех валют. Данные в кумулятивных вероятностях

Примечание: каждая точка рисунка имеет своими координатами значения кумулятивных вероятностей наблюдения логарифмических доходностей по каждой из валют. Для иллюстрации принципа построения рисунка приведем такой пример. Рассмотрим рис. 3 в), который соответствует кумулятивным вероятностям логарифмических доходностей обменных курсов франка (отложено по оси абсцисс) и фунта (отложено по оси ординат), т.е. $[u^{(1)}; u^{(2)}]$. Возьмем точку, соответствующую дате 3 февраля 2000 г., которая является пятым недельным наблюдением в исходной выборке. 3 февраля 2000 г. курсы франка и фунта были равны 17,3 и 46,2 руб. за 1 единицу соответственно. На предыдущую дату 27 января 2000 г. Их курсы были равны 17,75 и 46,88 руб. за 1 единицу соответственно. Таким образом, 3 февраля 2000 г. логарифмические недельные доходности, помноженные на 100, по франку и фунту составили $-2,567$ и $-1,461$ соответственно. Чтобы определить координаты точки от 3 февраля 2000 г., на рис. 3 в) необходимо извлечь эмпирические функции распределения логарифмических доходностей. Так, вероятность, что логарифмическая доходность по франку не превысит $-2,567$ составляет 2,217%; вероятность, что по фунту она не превысит $-1,461$ равна 8,203%. Таким образом, на рис. 3 в) наблюдению от 3 февраля 2000 г. будет соответствовать точка с координатами $[0,02217; 0,08203]$.

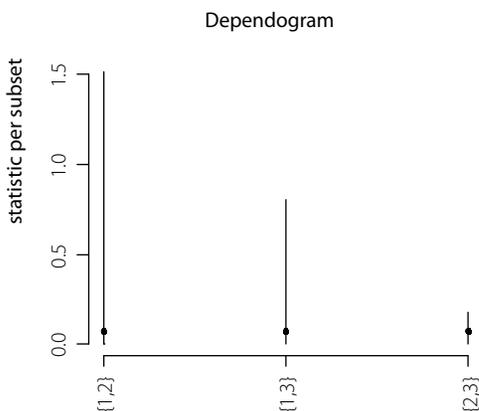
Зависимость между швейцарским франком и японской йеной менее сильно выражена, хотя имеет место концентрация точек в одновременно крайне низких и высоких значениях вероятностей.

Соотношение вероятностей приростов английского фунта и японской йены более равномерное, чем в двух выше рассмотренных случаях. Основное наблюдение заключается в относительно небольшой концентрации точек в области высоких приростов фунта и малых приростов йены, хотя обратное (противоположный квадрант) имеет место.

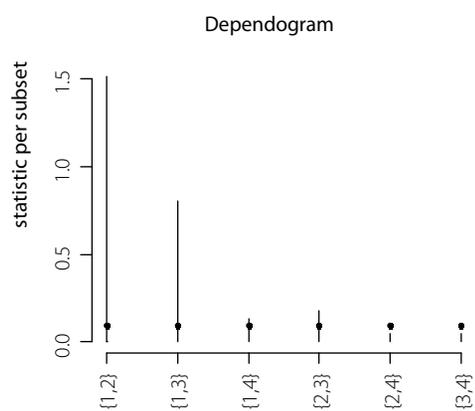
6. Результаты эконометрического исследования

Анализ депендограмм (рис. 4) не позволяет принять гипотезу о том, что копула для фунта, франка и йены является независимой. Интересно отметить, что рассмотрение четырехмерной копулы с включением обменного курса доллара США указывает на независимость между парами доллар—фунт и доллар—йена. В том числе и по этой причине при предварительном анализе данных доллар США не был включен в трехмерный массив исходных данных.

а) Трехмерный случай



б) Четырехмерный случай



Глобальная статистика Крамера-фон-Мизеса (в скобках приведен уровень p-value)

1,633 (0,0005)

0,494 (0,0005)

Рис. 4. Депендограммы теста на независимость. Данные 2000–2009 гг.
Обозначения рассматриваемых пар переменных: 1—CHF, 2—GBP, 3—JPY, 4—USD

Далее приводятся результаты оценки копулы на массивах А и В (табл. 3). Для проведения ретроспективного прогноза выбраны произвольные значения позиций в трех валютах. В частности, +100 единиц во франках; –200 в фунтах; +100 в йенах.

По результатам ретроспективного прогноза (см. столбец «число пробоев» табл. 3) можно заметить, что все модели удовлетворяют первому критерию годности, поскольку число фактических пробоев не превосходит заданного уровня значимости (1 пробой из 50 наблюдений соответствует 2%, что удовлетворяет заданному уровню в 5%).

Наибольшая значимость выявлена при оценке эллипсообразных копул (значимость оценки параметра *z-value* — 12,98), хотя наименьшая среднеквадратическая ошибка прогноза

Таблица 3

Результаты оценки параметров моделей (метод ITAU, 10 000 генераций)

Модель	Случай независимости ¹²	Характеристики полученной оценки модели на массиве А			Критерии качества модели на массиве В			
	Параметр α_{II}	Параметр $\hat{\alpha}$	Ошибка $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$	z-value $\frac{\hat{\alpha} - \alpha_{II}}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}}$	Знач. ф-ции МП	Число пробоев	RMSPE	Макс. откл. от VaR
Гумбеля	1	1,476	0,053	9,074	NaN	1	1648,083	-26,589
Клэйтона	0	0,952	0,105	9,074	57,97	1	1600,264	-37,883
Франка	0	3,057	0,278	10,985	93,08	1	1652,149	-23,203
Гауссовская	0	0,441	0,034	12,98	-Inf	1	1656,605	-24,487
Коши	0	0,441	0,034	12,98	-Inf	1	1647,866	-25,425
Стьюдента (3 ст. св.)	0	0,441	0,034	12,98	-Inf	1	1654,160	-26,331
Стьюдента (7 ст. св.)	0	0,441	0,034	12,98	-Inf	1	1656,148	-23,597

Примечание: необходимо отметить, что статистика z-value используется для проверки гипотезы о равенстве параметра копулы нулю, т.е. проверяется, является ли рассматриваемое совместное распределение независимых случайных величин. В столбце «Случай независимости» приводится значение параметра, при котором конкретная копула является копулой произведения, или независимой копулой, соответствующей независимым случайным величинам (поэтому используется индекс *II* от произведения). Под пробоем понимается превышение величины реализованного валютного риска над его оценкой посредством границы потерь заданного уровня значимости.

соответствует копуле Клэйтона (RMSPE = 1600,264). Одновременно значимость параметра копул Гумбеля и Клэйтона — наименьшая из рассмотренных копул (*z-value* = 9,07), хотя и превышает критический «порог» в две единицы. При этом наименьшее отклонение в случае пробоя дает применение копулы Франка.

Точка пробоя соответствует 25 сентября 2008 г. С этой датой ассоциируется начало банковского «кризиса ликвидности». Учитывая последовавшую осенью 2008 г. существенную девальвацию курса рубля, эту дату можно считать неформальным началом.

На рис. 5 дополнительно приводится динамика параметров рассмотренных моделей. Необходимо заметить, что изменение оценки параметра вызвано использованием расширяющегося окна наблюдений, когда предполагается, что новая доступная информация применяется для обновления базы, на основе которой строится прогноз копулы. На графике отдельно не выделяется динамика параметров гауссовской копулы, копул Коши и Стьюдента с разными степенями свободы, поскольку при использовании метода Тау Кендалла (ITAU) оценка параметра во всех случаях одинакова, так как все данные копулы являются частными случаями копулы Стьюдента и различаются только количеством степеней свободы (в гауссовском случае их число стремится к бесконечности).

¹² Значения параметров архимедовых копул, которые соответствуют случаю независимости случайных величин, взяты из [Nelsen (2006), p. 117]. Для эллипсообразных копул значение параметра, как и значение корреляции, в случае независимости случайных величин равно нулю.



Рис. 5. Динамика параметров моделей «копула» при построении ретроспективного прогноза с расширяющимся окном наблюдений

Как видно на рис. 5, наблюдается снижение степени взаимосвязи переменных, так как величина параметра по всем моделям убывает. Данный факт прослеживается и при рассмотрении корреляционных матриц за период 2000–2007 гг. и отдельно за 2008 г. Так, корреляция фунта и франка резко снижается с 69 до 25%, а фунта и йены — с 25 до 2%.

На рис. 6 приведена динамика расчетных значений границы потерь в сравнении с фактическим финансовым результатом, или реализовавшимся валютным риском от переоценки ОВП во всех трех иностранных валютах (PL факт). Можно заметить, что динамика границы потерь в основном незначительно различается по моделям. Исключением является копула Клэйтона, дающая ее наименьшую оценку. Этим объясняется как наименьшее значение среднеквадратической ошибки, так и максимальная величина пробоя границы потерь для данной модели.

Учитывая визуальный анализ данных (наличие высокой концентрации точек в области высоких вероятностей реализации приростов фунта и франка, что эквивалентно высокой положительной зависимости верхних (правых) «хвостов» распределения), а также факты меньшей среднеквадратической ошибки, чем в случае копулы Франка, и меньшего размера пробоя, чем в случае копулы Клэйтона, выбор модели для решения оптимизационной задачи был отдан в пользу копулы Гумбеля.

Перед решением оптимизационной задачи необходимо смоделировать многомерное распределение, которое будет экзогенным к переменным параметрам оптимизации (к величине открытой валютной позиции). Для этого вначале оценим копулу на всей выборке данных с 1 января 2000 г. по 31 декабря 2008 г., затем полупараметрическим способом восстановим совместное распределение на основе 10000 генераций копулы и доступных эмпирических частных распределений доходностей обменных курсов.

Оценка копулы Гумбеля на всей выборке за 9 лет дает параметр, равный 1,425 230 при значимости 9,025, что соответствует уровню зависимости верхних «хвостов» распределения, равному 0,373 6462.

На рис. 7 приводятся сгенерированные копула и итоговое совместное распределение.

Сгенерированная трехмерная копула.
По осям отложены кумулятивные вероятности (значения обратной функции распределения) логарифмических доходностей $u^{(j)}$

Трехмерное совместное распределение логарифмических доходностей обменных курсов, умноженных на 100, которое построено на основе сгенерированной копулы из а).

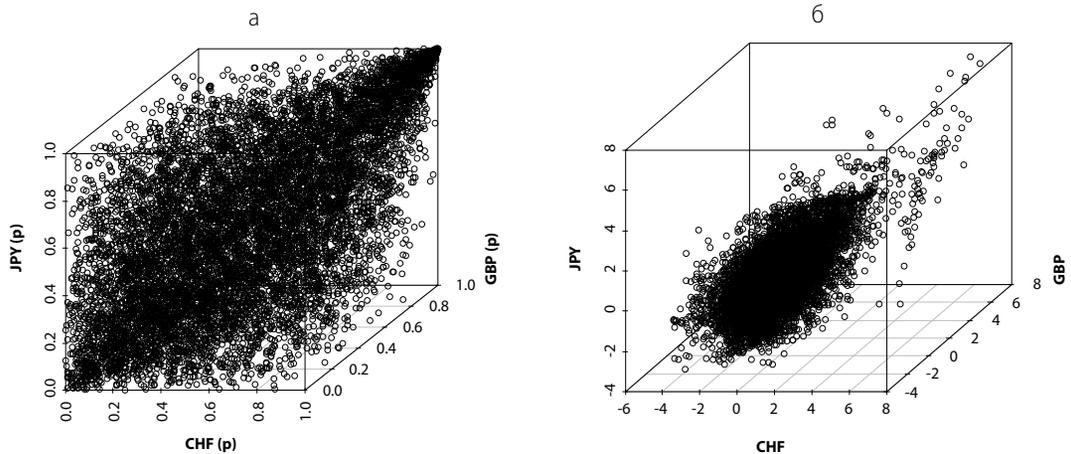


Рис. 7. Смоделированные распределения на основе копулы Гумбеля

В Приложении 2 приводятся решения задачи оптимизации, полученные на основе сгенерированного с помощью копулы распределения и в предположении многомерного нормального закона распределения доходностей. Для построения ретроспективного прогноза были взяты приросты величины обменных курсов к дате принятия инвестиционного решения (31 декабря 2008 г.). Фактическая доходность измерена как прирост доходности между первой и последней датами рассматриваемого периода. Данное предположение обосновано тем, что инвестора интересует конечная доходность. Соответственно если в одну из рассматриваемых недель стоимость открытых валютных позиций снизилась на меньшую сумму, чем возросла в предыдущую, то итоговое значение дохода будет положительным, а не отрицательным.

Отметим, что при низких уровнях значимости (более 7%) решение на основе метода копул давало ненулевую позицию в фунтах, которая никогда не могла быть получена при аналитическом решении в предположении многомерной нормальности. Математическое ожидание ряда доходностей обменного курса фунта к рублю за 9 лет с 2000 по 2008 гг. отрицательное. Корреляция с другими обменными курсами положительная. Одновременно вспомним, что риск позиции не зависит от ее знака в предположении дельта-нормального метода оценки границы потерь. Тогда при оптимизации оптимальный размер ОВП в фунтах нулевой, поскольку рост положительного размера ОВП в фунтах будет увеличивать риски, снижая доходность; рост отрицательного ОВП в фунтах будет — увеличивать риски с рос-

том доходности, но в меньшей степени, чем в других валютах (франк, йена), в которых математическое ожидание существенно выше, чем у фунта.

По итогам анализа все модели продемонстрировали устойчивость в терминах количества пробоев границы потерь (пробоев не было зарегистрировано). При этом, как можно видеть из представленной в Приложении 2 таблицы, для каждого из двадцати выбранных уровней значимости доходность по модели «копула» оказалась систематически выше, чем в предположении многомерной нормальности. Это закономерное следствие того, что в рамках предпосылки многомерной нормальности решения (величины открытых валютных позиций) оказывались существенно ниже, чем при применении копулы. Также заметим, что хотя фактическая доходность по всем моделям оказалась ниже, чем ожидаемая доходность; но по моделям «копула» она оказалась на 22,6% ниже в среднем, а по гауссовским моделям — на 53,8%. Данный факт указывает на то, что модели «копула» позволяют более качественно учитывать многомерный характер распределения доходностей валютных курсов, чем предположение многомерного гауссовского закона их распределения.

7. Заключение

В работе были сопоставлены два подхода к решению оптимизационной задачи на поиск таких открытых валютных позиций, которые не принесут банку потерь от валютного риска в величине, большей капитала банка с заданной вероятностью. Первый подход предполагал многомерную нормальность совместного распределения ставок доходностей обменных курсов, второй — восстанавливал совместное распределение на основе копулы и эмпирических частных распределений.

Во-первых, в ходе исследования было показано, что совместное распределение недельных приростов валютных курсов (франка, фунта и йены к рублю) за 9 лет с 2000 по 2008 гг. не является независимым, гауссовским, а наилучшим образом описывается архимедовой копулой Гумбеля, которая характеризуется наличием зависимости верхних (правых) «хвостов» распределения, т.е. высокой вероятностью одновременного роста обменных курсов, или тенденцией к девальвации рубля.

Во-вторых, оба подхода дали решения, удовлетворяющие ограничению на размер валютного риска. Граница потерь на периоде ретроспективного прогноза не была превышена ни в одном из подходов и ни при одном из двадцати рассмотренных уровней значимости.

В итоге, метод копул показал свою эффективность по сравнению с методом, основанном на предположении многомерного гауссовского закона распределения логарифмированных доходностей, поскольку при выполнении ограничения на риск первый метод приносит фактическую доходность всегда выше (в среднем в 1,7 раза), чем второй метод. Также фактическая доходность первого метода ближе к ожидаемой, чем для второго (на 22,6 и 53,8% ниже ожидаемой соответственно). Дополнительную гибкость первого метода подчеркивает факт выбора ненулевой позиции в фунтах при уровнях значимости более 7%, который никогда не был бы достигнут во втором подходе из-за отрицательного математического ожидания доходности фунтов.

Необходимо подчеркнуть, что в обоих сравниваемых подходах реализованная доходность оказывается неизменно ниже ожидаемой, т.е. модельной. Это, по-видимому, откры-

вает потенциальную область улучшения модели, что тем не менее составляет предмет отдельного исследования.

Список литературы

- Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.
- Алексеев В. В., Шоколов В. В., Соложенцев Е. Д. Логико-вероятностное моделирование портфеля ценных бумаг с использованием копул // Управление финансовыми рисками. 2006. № 3. С. 272–283.
- Adam A., Houkari M., Laurent J.-P. Spectral risk measures and portfolio selection. 2007. July, 19. Режим доступа: <http://laurent.jeanpaul.free.fr>
- Basel Committee on Banking Supervision. Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks, 1996. [Дополнение к Базель I].
- Basel Committee on Banking Supervision. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. Comprehensive version. 2006. [Базель II].
- Bouye E. Multivariate Extremes at Work for Portfolio Risk Management, 2002.
- Cech C. Copula-Based Top-Down Approaches in Financial Risk Aggregation, 2006. Режим доступа: <http://ssrn.com/abstract=953888>
- Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. Copula Methods in Finance. John Wiley & Sons Ltd., 2004.
- Fantazzini D. The effects of misspecified marginals and copulas on computing the value at risk: A Monte Carlo study. Computational Statistics and Data Analysis (2008), doi: 10.1016/j.csda. 2008.02.002.
- Hennessy D., Lapan H. The Use of Archimedean Copulas to Model Portfolio Allocations // *Mathematical Finance*. 2002. № 12. P. 143–154.
- Genest Ch., Remillard B. Tests of Independence and Randomness Based on the Empirical Copula Process // *Test*. 2004. № 2. P. 335–369.
- Joe H. Multivariate Models and Dependence Concepts, Monographs on Statistics and Applied Probability 73. Chapman and Hall. London, 1997.
- Kim G., Silvapulle M., Silvapulle P. Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas // *Computational Statistics & Data Analysis*. 2007. № 51. P. 2836–2850.
- Lintner J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets // *The Review of Economics and Statistics*. 1965a. № 47. P. 13–37.
- Lintner J. Securities Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification // *The Journal of Finance*. 1965b. № 40. P. 587–615.
- Longin F., Solnik B. Correlation Structure of International Equity Markets During Extremely Volatile Periods. Mimeo, Group HEC. 1998.
- Markowitz H. Portfolio selection // *Journal of Finance*. 1952. № 7. P. 77–91.
- Markowitz H. Foundations of Portfolio Theory. Nobel Lecture. December 7. 1990.
- Merton R. Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case // *Review of Economics and Statistics*. 1969. № 51. P. 247–257.
- Merton R. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model // *Econometrica*. 1973. № 41. P. 867–887.
- Merton R. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model // *Journal of Economic Theory*. 1971. № 3. P. 373–413.
- Meucci A. Estimation of Structured t-Copulas, 2008. Режим доступа: www.symmys.com

Mossin J. Equilibrium in a Capital Asset Market // *Econometrica*. 1966. № 34. P. 768–783.
 Mossin J. Optimal Multiperiod Portfolio Policies // *The Journal of Business*. 1968. № 41. P. 215–229.
 Natale F. Optimization With Tail-Dependence and Tail Risk: A Copula Based Approach For Strategic Asset Allocation, 2006. Режим доступа: <http://ssrn.com/abstract=942275>
 Nelsen R. An Introduction to Copulas. Second Edition. Springer. New York, 2006.
 Samuelson P. Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming // *Review of Economics and Statistics*. 1969. № 51. P. 239–246.
 Sklar A. Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges // Publications de l'Institut de Statistique de l'Universite de Paris. 1959. № 8. P. 229–231.
 Tobin J. Liquidity Preference as Behavior Toward Risk // *Review of Economic Studies*. 1958. Vol. 26. P. 65–86.

Приложение 1
 Описательные статистики данных

Таблица

	CHF	GBP	JPY
Данные первых 8 лет			
В уровнях (рублей)			
Среднее	21,9	48,3	25,8
Ст. отклон.	3,4	3,9	3,4
Минимум	15,5	39,1	20,9
25% квант.	21,1	45,7	23,4
Медиана	22,0	49,6	25,6
75% квант.	23,1	51,3	26,7
Максимум	31,4	54,4	40,4
В логарифмах прироста			
Среднее	0,0510	0,0255	-0,0462
Ст. отклон.	1,3720	1,1403	1,1665
Минимум	-4,2463	-3,6697	-3,0455
25% квант.	-0,7971	-0,6013	-0,8189
Медиана	-0,1196	-0,0247	-0,1017
75% квант.	0,8738	0,6548	0,6591
Максимум	6,2312	7,3267	4,4335
Асимметрия	0,3431154	0,6695139	0,2891796

Окончание табл. П 1

	CHF	GBP	JPY
Данные первых 8 лет			
Экссесс	1,4729400	4,1850567	0,3675231
Статистика Харки—Бера (<i>p-value</i> , в %)	45,1775 (1,548*10 ⁻¹⁰)	327,0723 (< 2,2*10 ⁻¹⁶)	8,08 (0,01760)
Корреляционная матрица логарифмических приростов			
CHF	1,0000	0,6926	0,3918
GBP	0,6926	1,0000	0,2505
JPY	0,3918	0,2505	1,0000
Данные первых 9 лет (для сравнения с норм. распр.)			
Среднее	0,0929	-0,0103	0,0436
Ст. отклонение	1,4115	1,1710	1,3340
Корреляционная матрица логарифмических приростов			
CHF	1,0000	0,6074	0,4129
GBP	0,6074	1,0000	0,1648
JPY	0,4129	0,1648	1,0000
Данные 2008 г. (в логарифмах прироста)			
Среднее	0,3748	-0,2635	0,7026
Ст. отклонение	1,6525	1,3683	2,1384
Корреляционная матрица логарифмических приростов			
CHF	1,0000	0,2533	0,4676
GBP	0,2533	1,0000	-0,0180
JPY	0,4676	-0,0180	1,0000
Данные 2009 г. (в логарифмах прироста)			
Среднее	0,0885	0,2456	0,0155
Ст. отклонение	1,7278	2,6296	2,8172
Корреляционная матрица логарифмических приростов			
CHF	1,0000	0,7056	0,7242
GBP	0,7056	1,0000	0,5542
JPY	0,7242	0,5542	1,0000

Приложение 2. Решение оптимизационной задачи

		Оптимальные размеры открытых валютных позиций при решении										Доходность			
		в предположении нормальности					с использ. копулы Гумбеля					в предположении с использ. копулы Гумбеля нормальности			
№ п/п	Уровень значимости (α), в %	CHF	GBP	JPY	RUB	Граница потерь VaR (α)	CHF	GBP	JPY	RUB	Граница потерь VaR (α)	Ожид.	Факт.	Ожид.	Факт.
		CHF	GBP	JPY	RUB	CHF	GBP	JPY	RUB	CHF	GBP	JPY	RUB	CHF	GBP
1	99,00	29,00	0,00	3,00	-32,00	-100,00	80,00	0,00	30,00	-110,00	-99,10	2,84	1,31	5,47	3,77
2	98,50	31,00	0,00	3,00	-35,00	-100,00	100,00	0,00	10,00	-110,00	-100,00	3,05	1,41	5,80	4,50
3	98,00	33,00	0,00	4,00	-37,00	-100,00	100,00	0,00	10,00	-110,00	-100,00	3,22	1,49	5,80	4,50
4	97,50	35,00	0,00	4,00	-38,00	-100,00	110,00	0,00	0,00	-110,00	-99,40	3,37	1,56	5,96	4,87
5	97,00	36,00	0,00	4,00	-40,00	-100,00	90,00	0,00	30,00	-120,00	-98,70	3,51	1,62	6,01	4,22
6	96,50	37,00	0,00	4,00	-41,00	-100,00	100,00	0,00	20,00	-120,00	-99,00	3,65	1,68	6,18	4,58
7	96,00	39,00	0,00	4,00	-43,00	-100,00	110,00	0,00	10,00	-120,00	-100,00	3,78	1,74	6,34	4,95
8	95,50	40,00	0,00	4,00	-44,00	-100,00	100,00	10,00	20,00	-130,00	-99,90	3,90	1,80	6,35	5,81
9	95,00	41,00	0,00	5,00	-46,00	-100,00	90,00	0,00	40,00	-130,00	-99,50	4,02	1,86	6,39	4,29
10	94,50	42,00	0,00	5,00	-47,00	-100,00	100,00	0,00	30,00	-130,00	-99,50	4,14	1,91	6,56	4,66
11	94,00	43,00	0,00	5,00	-48,00	-100,00	110,00	0,00	20,00	-130,00	-100,00	4,25	1,96	6,72	5,03
12	93,50	45,00	0,00	5,00	-50,00	-100,00	110,00	0,00	20,00	-130,00	-100,00	4,37	2,02	6,72	5,03
13	93,00	46,00	0,00	5,00	-51,00	-100,00	100,00	10,00	30,00	-140,00	-99,40	4,48	2,07	6,73	5,89
14	92,50	47,00	0,00	5,00	-52,00	-100,00	110,00	10,00	20,00	-140,00	-99,80	4,59	2,12	6,89	6,25
15	92,00	48,00	0,00	5,00	-53,00	-100,00	100,00	0,00	40,00	-140,00	-99,70	4,70	2,17	6,93	4,74
16	91,50	49,00	0,00	5,00	-55,00	-100,00	110,00	0,00	30,00	-140,00	-99,50	4,82	2,22	7,57	5,10
17	91,00	50,00	0,00	6,00	-56,00	-100,00	100,00	10,00	40,00	-150,00	-99,80	4,93	2,28	7,61	5,97
18	90,50	52,00	0,00	6,00	-57,00	-100,00	110,00	10,00	30,00	-150,00	-99,80	5,04	2,33	7,77	6,33
19	90,00	53,00	0,00	6,00	-59,00	-100,00	110,00	10,00	30,00	-150,00	-99,80	5,16	2,38	7,77	6,33
20	89,50	54,00	0,00	6,00	-60,00	-100,00	120,00	10,00	20,00	-150,00	-99,90	5,27	2,43	7,93	6,70

Примечание: все данные, кроме уровней значимости, приведены в процентах от капитала.