УДК 303.425.3

# ПРОЦЕДУРЫ ГОЛОСОВАНИЯ В МАЛЫХ ГРУППАХ

В.И. Вольский

Предложена классификация процедур голосования в малых группах, основанная на использовании информации в виде упорядочений кандидатов в избирательных бюллетенях, полученных от избирателей. Описаны известные из литературы процедуры голосования.

**Ключевые слова:** процедура голосования, избиратель, упорядочение, ранжирование, попарное сравнение кандидатов.

## ВВЕДЕНИЕ

Можно различить два типа голосования, положив в основу этого различия число избирателей.

Первый тип — всеобщее (конституционное) голосование, в котором принимают участие сотни тысяч и миллионы человек. Голосование такого рода проводится в общенациональном или крупно-региональном масштабе. В таких голосованиях от избирателя требуется отметить в избирательном бюллетене лучшего по его мнению кандидата, и при подборе процедуры выявления коллективного решения встают проблемы уточнения понятия «большинство голосов»:

— «больше, чем другие» или «больше половины голосов»;

— от какого списка отсчитывать это большинство (от общего числа избирателей или от числа принявших участие в голосовании);

— как учитывать голоса воздержавшихся при голосовании (если такая графа есть в избирательном бюллетене).

Ко второму типу относится голосование в малых группах, когда в голосовании участвуют десятки избирателей. Примерами таких групп могут служить комитеты и комиссии парламента, советы директоров компаний, общие собрания акционеров небольших акционерных обществ и т. д. От участников голосования в этом случае можно получить более детальную информацию об их предпочтениях о кандидатах (или альтернативах), которые включены в избирательный бюллетень.

Далее рассматриваются процедуры голосования, которые требуют от избирателя строго упорядочить кандидатов в соответствии со своими предпочтениями. Такая более детальная информация избирателей относительно кандидатов позволяет использовать различные процедуры агрегирования индивидуальных мнений в коллективное решение.

Данная статья посвящена обзору существующих процедур голосования второго типа.

Эти процедуры голосования можно классифицировать следующим образом[1]:

1. Позиционные процедуры, использующие информацию о положении кандидатов в упорядочениях избирателей.

1.1. Процедура простого большинства.

1.2. Процедура относительного большинства (плюралитарная процедура).

1.3. Двухступенчатая плюралитарная процедура.

1.4. Процедура одобряющего голосования.

1.5. Практическая процедура Кондорсе.

1.6. Процедура передачи голосов.

1.7. Обратная процедура относительного большинства (обратная плюралитарная процедура).

1.8. Процедура Уэйра.

1.9. Процедура Кумбса.

1.10. Пороговая процедура.

2. Позиционные процедуры, использующие суммы рангов кандидатов в упорядочениях избирателей.

2.1. Процедура Борда.

2.2. Процедура Нансона.

2.3. Процедура Болдуина.

3. Процедуры, основанные на попарном сравнении кандидатов в упорядочениях избирателей.

---

[1] Классификация процедур голосования предложена совместно профессором Ф.Т. Алескеровым и автором.

3.1. Процедуры выбора непосредственно по мажоритарному графу.

3.1.1. Процедура выбора победителя Кондорсе.

3.1.2. Процедура Блэка.

3.1.3. Процедура последовательного исключения кандидатов.

3.1.4. Процедура выбора минимального доминирующего подмножества.

3.1.5. Процедура выбора минимальных недоминируемых подмножеств.

3.1.6. Процедура фон Неймана — Моргенштерна.

3.2. Процедуры, использующие мажоритарный граф и вспомогательную шкалу на нем.

3.2.1. Процедура Коупленда.

3.2.2. Процедура Доджсона.

3.2.3. Процедура Янга.

3.2.4. Процедуры, использующие понятие собственного вектора турнирной матрицы.

3.3. Процедуры, использующие мажоритарный граф и вспомогательное бинарное отношение на нем.

3.3.1. Процедура Фишберна.

3.3.2. Процедура выбора по отношению покрытия.

3.3.3. Процедура Ричелсона.

3.4. Паретовские процедуры голосования.

3.4.1. Процедура выбора множества Парето.

3.4.2. $q$-паретовская процедура.

4. Аппроксимационные процедуры.

4.1. Процедура Кемени

4.2. Процедура приближенной триангуляции турнирной матрицы.

5. Процедура Симпсона.

Рассмотрим каждую из этих процедур. Далее нумерация и заголовки разделов настоящей статьи совпадают с нумерацией и названиями процедур в приведенной классификации.

Принятые обозначения: $A = x, y, ..., z$ — множество кандидатовы; $|A| = n$ — число кандидатов; И1, И2, ..., И$N$ — избиратели 1, 2, ..., $N$; $p_i$, $i = \overline{1, N}$ — упорядочение избирателя $i$ кандидатов из множества $A$ (линейный порядок). Набор $\{p_i\}$, $i = \overline{1, N}$, называется профилем индивидуальных упорядочений избирателей относительно кандидатов из множества $A$.

## 1. ПОЗИЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ИНФОРМАЦИЮ О ПОЛОЖЕНИИ КАНДИДАТОВ В УПОРЯДОЧЕНИЯХ ИЗБИРАТЕЛЕЙ

### 1.1. Процедура простого большинства

Согласно этой процедуре строится вспомогательная шкала «Сумма первых мест в упорядочениях избирателей». Лучшим считается кандидат, сумма первых мест которого в упорядочениях избирателей превышает половину от числа избирателей. Пусть имеются 4 избирателя И1—И4. Их предпочтения относительно кандидатов $x$, $y$, $z$, $v$ представлены в табл. 1.

*Таблица 1*

| И1 | И2 | И3 | И4 |
|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $v$ |
| $z$ | $v$ | $z$ | $z$ |
| $v$ | $y$ | $v$ | $x$ |
| $y$ | $z$ | $x$ | $y$ |

Вспомогательная шкала «Сумма первых мест» представлена на рис. 1.

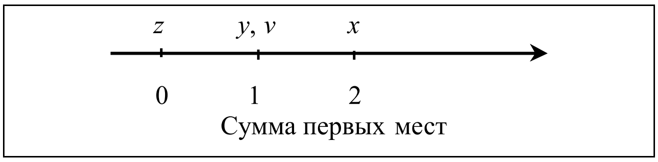



**Рис. 1**

Лучшим считается кандидат, сумма первых мест которого в упорядочениях избирателей превышает половину от числа избирателей. Как видно из табл. 1 и рис. 1, для этого случая победителя по процедуре простого большинства нет.

### 1.2. Процедура относительного большинства (плюралитарная процедура)

Здесь так же, как и в процедуре простого большинства строится вспомогательная шкала «Сумма первых мест». Лучшим считается кандидат (или кандидаты), имеющий наибольшую оценку по этой шкале.

Лучшим согласно этой процедуре для случая, представленного в табл. 1 и на рис. 1, считается кандидат $x$.

### 1.3. Двухступенчатая плюралитарная процедура [1]

Если по вспомогательной шкале «Сумма первых мест» имеется кандидат, превышающий половину от числа избирателей, то он объявляется избранным.

Если такого кандидата нет, то объявляется второй тур, в который проходят два кандидата, имеющие наибольшие числовые оценки по шкале «Сумма первых мест», и далее применяется плюралитарная процедура для этого двухэлементного множества.

Для примера, представленного в табл. 2, вспомогательная шкала «Сумма первых мест» имеет вид, показана на рис. 2.

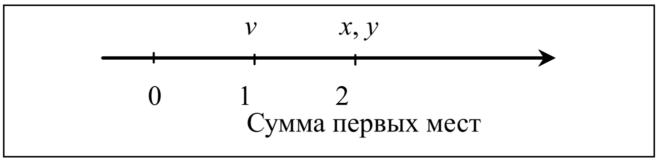



**Рис. 2**

*Таблица 2*

| И1 | И2 | И3 | И4 | И5 |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $v$ | $y$ | $x$ |
| $v$ | $x$ | $x$ | $z$ | $z$ |
| $y$ | $z$ | $y$ | $x$ | $v$ |
| $z$ | $v$ | $z$ | $v$ | $y$ |

Ни один из кандидатов не набрал более половины от числа избирателей, поэтому во второй тур выходят кандидаты $x$ и $y$.

Если предпочтения избирателей ко второму туру не изменятся, то будет иметь место табл. 3.

*Таблица 3*

| И1 | И2 | И3 | И4 | И5 |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ |
| $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |

Победителем согласно этой процедуре называется кандидат, превосходящий другого кандидата по числу первых мест, т. е. кандидат $x$.

### 1.4. Процедура одобряющего голосования (Approval Voting Procedure) [2—4]

Согласно этой процедуре строится вспомогательная шкала «Сумма $k$ первых мест в упорядочениях избирателей» ($k < n$). Для случая $k = 2$ в примере, представленном в табл. 1, эта шкала имеет вид (рис. 3).

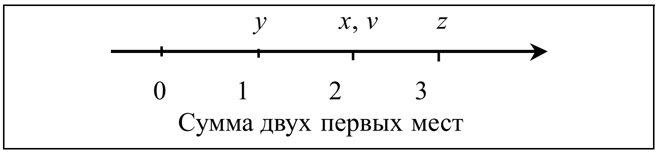



**Рис. 3**

Согласно этой процедуре будет избран кандидат $z$.

Существует другая разновидность процедуры одобряющего голосования. Каждый избиратель имеет право отметить в своем бюллетене любое количество лучших с его точки зрения кандидатов. Затем каждому кандидату приписывается число, равное количеству бюллетеней, в котором этот кандидат отмечен. Лучшим (или лучшими) считается кандидат, у которого этот показатель максимален.

### 1.5. Практическая процедура Кондорсе[2] [5].

В жирондистском проекте конституции Кондорсе предложил следующую процедуру голосования:

1) число кандидатов, указанных в бюллетене для голосования, должно втрое превышать число выборных мест;

2) бюллетень состоит из двух граф: графы решающих голосов и графы дополнительных голосов;

3) избиратель должен отметить в графе решающих голосов ровно столько кандидатов, сколько имеется выборных мест; кроме того, избиратель должен отметить в графе дополнительных голосов ровно столько кандидатов, сколько имеется выборных мест, но уже других кандидатов, отличных от тех, которых он отметил в графе решающих голосов (например, если необходимо избрать трех человек, то избирательный бюллетень должен содержать девять кандидатов; пример заполнения такого бюллетеня представлен в табл. 4);

*Таблица 4*

| Кандидаты | Графа решающих голосов | Графа дополнительных голосов |
|---|---|---|
| $x$ | | + |
| $y$ | | |
| $z$ | + | |
| $v$ | | + |
| $w$ | | |
| $p$ | + | |
| $q$ | | + |
| $s$ | + | |
| $r$ | | |

4) если более половины избирателей отметили в графе решающих голосов какого-либо кандидата, то этот кандидат считается избранным;

5) если число таких кандидатов, набравших более 50 % голосов в графе решающих голосов, больше числа выборных мест, то избираются кан-

[2] Мари Жан Антуан Николя де Карита, маркиз де Кондорсе (1743—1794) — французский философ, ученый-математик и политический деятель. Он является (наряду с Ж.-Ш. де Борда (1733—1799)) родоначальником науки, которая позднее была названа теорией голосования.

дидаты, имеющие наибольшее число решающих голосов;

6) если число кандидатов, набравших более 50 % голосов в графе решающих голосов, меньше числа выборных мест, то недостающее число кандидатов берется из графы дополнительных голосов. Для этого берется сумма голосов из графы решающих голосов и графы дополнительных голосов для каждого из оставшихся кандидатов, и недостающее число кандидатов избираются согласно значению полученной суммы.

В силу того, что проект жирондистской конституции был отвергнут, эта процедура голосования не применялась во Франции. Однако авторитет Кондорсе был так велик, что эта процедура голосования в течение ряда лет применялась при выборах в Верховную Ассамблею Женевы.

### 1.6. Процедура передачи голосов (Single Transferable Vote) [6]

Эта процедура была предложена английским математиком Т.Р. Хиллом в 1819 г. (Thomas Wright Hill (1763—1851)).

Она применяется, если из списка кандидатов необходимо избрать некоторое заранее фиксированное число лучших. Устанавливается квота, т. е. число голосов, которое должен получить кандидат для того, чтобы быть избранным.

На первом этапе учитываются только первые в упорядочениях избирателей кандидаты. Кандидат, получивший число первых мест в упорядочениях избирателей, равное или превышающее квоту, считается избранным. Если число голосов, поданное за этого кандидата, превышает квоту, то избыток голосов передается по жребию кандидатам, стоящим на втором месте в упорядочениях тех избирателей, которые были выбраны этим жребием. Если после этого появился кандидат, который получил число голосов, равное или превышающее квоту, то он считается избранным. Если при этом число голосов за него превысило квоту, то процесс продолжается до тех пор, пока не будет избрано заранее фиксированное число лучших кандидатов.

Поясним эту процедуру на примере. Пусть имеются 6 избирателей и 3 кандидата ($x$, $y$ и $z$), из которых надо избрать двух лучших. Организатор голосования установил значение квоты, равное 3. Предпочтения избирателей представлены в табл. 5.

*Таблица 5*

| И1 | И2 | И3 | И4 | И5 | И6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| $y$ | $z$ | $x$ | $z$ | $y$ | $y$ |
| $z$ | $y$ | $z$ | $y$ | $z$ | $z$ |

На первом этапе избирается кандидат $x$, получивший 5 голосов. Избыток голосов равен 2 (5 − 3 = 2).

По жребию определяются 2 из 5 избирателей, поставивших кандидата $x$ на первое место в своих упорядочениях. Пусть жребий выпал на избирателей И1 и И5. Тогда имеет место ситуация, представленная в табл. 6, т. е. голоса этих избирателей передаются кандидатам, стоящим на втором месте в их упорядочениях.

*Таблица 6*

| И1 | И2 | И3 | И4 | И5 | И6 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $y$ | $x$ | | $x$ |
| $y$ | $z$ | $x$ | $z$ | $y$ | $y$ |
| $z$ | $y$ | $z$ | $y$ | $z$ | $z$ |

Избирается кандидат $y$, набравший 3 голоса, т. е. число голосов, равное квоте.

Итак, согласно процедуре, предложенной Хиллом, избираются кандидаты $x$ и $y$.

С 1855 г. по предложению датского математика и политика К. Андре (Carl Christofer Georg Andrae (1812—1893)) процедура передачи голосов начала применяться в Ригсдаге (датском парламенте).

В 1857 г. английский юрист Т. Хар (Thomas Hare (1806—1891)) независимо от своих предшественников предложил такую же процедуру для выборов в парламент и муниципальные органы власти [7]. В качестве квоты Хар предложил использовать числовое значение

$$\text{Hare quota} = \frac{\text{number of electors}}{\text{number of candidates to be chosen}},$$

Так же, как Хилл, Хар предлагал избыток голосов, превышающий квоту, распределять по жребию. Процедура передачи голосов, основанная на квоте Хара, применялась на выборах в Палате ассамблей Тасмании в 1897 г.

В 1868 г. английский математик Г. Друп (Henry Richmond Droop (1832—1884)) предложил другое выражение для вычисления квоты [8]:

$$\text{Droop quota} = \left[\frac{\text{number of electors}}{\text{number of candidates to be chosen} + 1}\right] + 1,$$

где [·] означает целую часть числа.

Смысл введения этой квоты состоит в том, чтобы исключить ситуации, когда число кандидатов, преодолевших квоту, было бы больше числа кандидатов, которые должны быть избраны.

Процедура передачи голосов, использующая квоту Друпа, широко применялась (и применяется до настоящего времени) во многих странах, включая Ирландскую республику, Мальту, Австралию, Новую Зеландию и др.

В 1880 г. Дж. Б. Грегори (John Burslem Gregory (1844—1920)) предложил распределить избыток голосов при использовании процедуры передачи голосов не случайным образом (по жребию), как это делалось ранее, а с помощью так называемого передаваемого значения [9].

Поясним метод Грегори на примере. Имеются 20 избирателей и 5 кандидатов — $x$, $y$, $z$, $v$, $w$. (Заметим, что избиратели не обязаны упорядочивать всех кандидатов в соответствии со своими предпочтениями). Необходимо избрать трех лучших кандидатов, используя квоту Друпа. Предпочтения избирателей представлены в табл. 7.

*Таблица 7*

| Число избирателей | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 8 | 4 | 4 | 1 |
| $x$ | $y$ | $z$ | $z$ | $v$ | $w$ |
| $y$ | $x$ | $v$ | $w$ | $w$ | |
| $z$ | $z$ | $w$ | | | |
| $w$ | | | | | |

$$\text{Droop quota} = \left[\frac{20}{3+1}\right] + 1 = 6.$$

*Первый этап.* Подсчет числа голосов.

Для каждого кандидата подсчитывается число голосов избирателей, поставивших этого кандидата на первое место в своих предпочтениях:

$x$: 1 голос;
$y$: 2 голоса;
$z$: 12 голосов;
$v$: 4 голоса;
$w$: 1 голос.

Кандидат $z$, набравший число голосов, превышающее квоту, избран.

Избыток голосов = 12 − 6 = 6.

*Второй этап.* Подсчет передаваемого значения.

Передаваемое значение подсчитывается как частное от деления избытка голосов, полученного избранным кандидатом, на общее число голосов, полученное этим кандидатом, т. е. передаваемое значение = 6/12 = 0,5.

*Третий этап.* Распределение голосов.

Для бюллетеней, в которых избранный на первом этапе кандидат $z$ указан на первом месте, 0,5 голосов передаются кандидатам, которые стоят на втором месте. Из тех, кто поставил на первое место в своих упорядочениях кандидата $z$, 8 избирателей поставили на второе место кандидата $v$ и 4 избирателя — кандидата $w$.

Таким образом, кандидату $v$ переходят $8 \cdot 0,5 = 4$ голоса; кандидату $w$ переходят $4 \cdot 0,5 = 2$ голоса.

В итоге после первого распределения голосов имеем:

$x$: 1 голос;
$y$: 2 голоса;
$z$: 12 − 6 = 6 голосов;
$v$: 4 + 4 = 8 голосов;
$w$: 1 + 2 = 3 голоса.

Кандидат $v$, набравший число голосов, превышающее квоту, избран.

Избыток голосов = 8 − 6 = 2.

*Четвертый этап.* Подсчет передаваемого значения.

Передаваемое значение = 2/8 = 0,25.

*Пятый этап.* Распределение избытка голосов.

Для бюллетеней, в которых имеется кандидат, стоящий после кандидата $v$, 0,25 голоса передается этому кандидату.

В восьми упорядочениях после кандидата $v$ стоит кандидат $w$ и еще в четырех упорядочениях после кандидата $v$ стоит кандидат $w$.

Таким образом, кандидату $w$ на этом этапе переходят $8 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,25 = 2 + 1 = 3$ голоса.

В итоге после второго распределения голосов имеем:

$x$: 1 голос;
$y$: 2 голоса;
$z$: 12 − 6 = 6 голосов;
$v$: 8 − 2 = 6 голосов;
$w$: 3 + 3 = 6 голосов.

Кандидат $w$, набравший число голосов, равное квоте, избран.

Таким образом, избраны кандидаты $z$, $v$ и $w$.

В XX в. были предложены различные модификации метода Грегори: включающий метод Грегори, взвешенный включающий метод Грегори [10]. Осознание недостатков всех модификаций метода Грегори привело в конце XX в. к появлению еще одной процедуры передачи голосов — метод Мика [11]. Этот метод настолько сложен, что его прямое описание затруднительно. Программа, реализующая этот метод, занимает на языке Pascal значительный объем.

Обзор различных процедур передачи голосов приведен в работе [9]. Аксиоматическое описание одной из версий процедуры передачи голосов дано в статье [12].

### 1.7. Обратная процедура относительного большинства (обратная плюралитарная процедура) [2, 3]

Строится вспомогательная шкала «Сумма последних мест в упорядочениях избирателей», избранным считается кандидат (или кандидаты), имеющие наименьшее числовое значение по этой шкале.

Для примера, представленного в табл. 1, вспомогательная шкала «Сумма последних мест» изображена на рис. 4.


**Рис. 4**

Лучшим согласно этой процедуре считается кандидат *v*.

### 1.8. Процедура Уэйра (Instant-Runoff Voting) [6, 13]

Эта процедура была предложена в 1871 г. американским архитектором В.Р. Уэйром (W.R. Ware).

Фактически она представляет собой модификацию процедуры передачи голосов в случае, когда используется квота Друпа и необходимо избрать одного лучшего кандидата.

В этом случае

$$\text{Droop quota} = \left[\frac{\text{number of electors}}{1+1}\right] + 1,$$

т. е. требуется, чтобы победитель голосования получил более 50 % голосов избирателей.

Согласно этой процедуре избирается кандидат, получивший более 50 % первых мест в упорядочениях избирателей. Если такой кандидат существует, то процедура заканчивается. В противном случае из списка кандидатов исключается кандидат, который имеет наименьшее число первых мест в упорядочениях избирателей. Процедура повторяется для уменьшенного таким образом списка кандидатов, и так далее до тех пор, пока не появится кандидат, получивший более 50 % первых мест в сокращенном списке кандидатов.

Поясним действие этой процедуры на примере. Пусть мнения восьми избирателей относительно кандидатов *x*, *y*, *z*, *v* представлены в табл. 8.

*Таблица 8*

| И1 | И2 | И3 | И4 | И5 | И6 | И7 | И8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | *x* | *x* | *y* | *y* | *z* | *z* | *v* |
| *y* | *y* | *y* | *v* | *v* | *x* | *x* | *y* |
| *z* | *z* | *v* | *x* | *z* | *v* | *v* | *x* |
| *v* | *v* | *z* | *z* | *x* | *y* | *y* | *z* |

Ни один из кандидатов не набрал более 50 % первых мест в упорядочениях избирателей (т. е. 5 или больше). Поэтому исключается кандидат, имеющий наименьшее число первых мест в упорядочениях избирателей, т. е. кандидат *v*.

Таким образом, имеет место ситуация, представленная в табл. 9.

*Таблица 9*

| И1 | И2 | И3 | И4 | И5 | И6 | И7 | И8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | *x* | *x* | *y* | *y* | *z* | *z* | *y* |
| *y* | *y* | *y* | *x* | *z* | *x* | *x* | *x* |
| *z* | *z* | *z* | *z* | *x* | *y* | *y* | *z* |

Как мы видим, при исключении из рассмотрения кандидата *v* не появился кандидат, имеющий более 50 % первых мест в упорядочениях избирателей. Поэтому снова исключаем кандидата, имеющего наименьшее число первых мест, т. е. кандидата *z*. Получаем следующую ситуацию (табл. 10).

*Таблица 10*

| И1 | И2 | И3 | И4 | И5 | И6 | И7 | И8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | *x* | *x* | *y* | *y* | *x* | *x* | *y* |
| *y* | *y* | *y* | *x* | *x* | *y* | *y* | *x* |

Согласно процедуре Уэйра избирается кандидат *x*, набравший 5 первых мест (т. е. более 50 % первых мест в упорядочениях избирателей).

### 1.9. Процедура Кумбса [6, 14]

Эта процедура была предложена американским психологом Клайдом Кумбсом (Clyde Hamilton Coombs (1912—1988)).

Лучшим считается кандидат, получивший более 50 % первых мест в упорядочениях избирателей. Если такой кандидат существует, то он считается избранным, и процедура заканчивается. В противном случае из списка кандидатов удаляется кандидат, которого считают худшим наибольшее число избирателей. Процедура повторяется для уменьшенного таким образом списка кандидатов до тех пор, пока появится кандидат, имеющий более 50 % первых мест в сокращенном списке кандидатов.

В примере, представленном в табл. 8, ни один из кандидатов не набрал более 50 % первых мест. Поэтому исключается кандидат, имеющий наибольшее число последних мест в упорядочениях избирателей, т. е. кандидат *z*.

Тогда имеет место ситуация, представленная в табл. 11.

*Таблица 11*

| И1 | И2 | И3 | И4 | И5 | И6 | И7 | И8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | *x* | *x* | *y* | *y* | *x* | *x* | *v* |
| *y* | *y* | *y* | *v* | *v* | *v* | *v* | *y* |
| *v* | *v* | *v* | *x* | *x* | *y* | *y* | *x* |

Как видим, при исключении кандидата *z* появился кандидат, имеющий более 50 % первых мест в упорядочениях избирателей — кандидат *x*. Он и признается победителем.

### 1.10. Пороговая процедура [15]

Эта процедура голосования применима в случае, когда отрицательное мнение одного из избирателей относительно какого-то кандидата не может быть скомпенсировано положительным мнением относительно этого кандидата другими избирателями. При таком подходе лучшим в коллективном упорядочении будет назван кандидат, имеющий наименьшее число последних мест в упорядочениях избирателей. При равенстве последних мест у нескольких кандидатов лучшим из них признается кандидат, у которого меньше всего предпоследних мест в упорядочениях избирателей, и т. д.

Поясним этот принцип на примере с тремя кандидатами *x*, *y*, *z* (табл. 12).

*Таблица 12*

| И1 | И2 | И3 | И4 |
|---|---|---|---|
| *y* | *y* | *y* | *z* |
| *x* | *x* | *x* | *x* |
| *z* | *z* | *z* | *y* |

Лучшим согласно этой процедуре будет кандидат *x*, которого никто из избирателей не поставил на последнее место в своем упорядочении, вторым в коллективном упорядочении будет стоять кандидат *y*, имеющий меньше последних мест в упорядочениях избирателей, чем кандидат *z*. Таким образом формируется коллективное упорядочение, которое в общем случае является слабым порядком.

Эта процедура обобщена для случая *n* кандидатов [16, 17].

## 2. ПОЗИЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ СУММЫ РАНГОВ КАНДИДАТОВ В УПОРЯДОЧЕНИЯХ ИЗБИРАТЕЛЕЙ

### 2.1. Процедура Борда [1—3, 6, 14, 18]

Процедура предложена французским ученым Ж.-Ш. де Борда (Jean Charles de Borda (1733—1799)).

16 июня 1770 г. на заседании Королевской академии он выступил с докладом, в котором представил разработанную им процедуру голосования[3]. Статья с ее описанием была напечатана в «Истории Королевской академии наук за 1781 год» [18].

Согласно этой процедуре каждому кандидату в упорядочениях избирателя приписывается ранг. Если в избирательном бюллетене имеется *n* кандидатов, то первому в упорядочениях кандидату приписывается ранг *n*, второму — ранг $(n - 1)$, и т. д. Последнему в упорядочении кандидату приписывается ранг 1. Далее каждому кандидату приписывается сумма рангов во всех упорядочениях избирателей. Кандидат, у которого сумма рангов максимальна, считается избранным.

Поясним действия процедуры Борда на примере. Пусть имеется 3 избирателя и 4 кандидата. Упорядочения избирателей относительно кандидатов представлены в табл. 13.

*Таблица 13*

| И1 | И2 | И3 | Ранг |
|---|---|---|---|
| *x* | *z* | *v* | 4 |
| *y* | *y* | *y* | 3 |
| *z* | *x* | *z* | 2 |
| *v* | *v* | *x* | 1 |

Суммы рангов кандидатов:
$x$: $4 + 2 + 1 = 7$;
$y$: $3 + 3 + 3 = 9$;
$z$: $2 + 4 + 2 = 8$;
$v$: $1 + 1 + 4 = 6$.

Победителем по процедуре Борда стал кандидат *y*. Заметим, что ни один из избирателей не поставил кандидата *y* первым в своем упорядочении.

Важно отметить также, что даже если в данном профиле предпочтений избирателей существует кандидат, который побеждает каждого другого кандидата при попарном сравнении (так называемый победитель Кондорсе, о котором см. далее п. 3.1.1), процедура Борда нередко называет лучшим другого кандидата.

### 2.2. Процедура Нансона [6, 14, 22]

Английский математик Э. Дж. Нансон (Edward John Nanson (1850—1936)) предложил процедуру, которая является модификацией процедуры Борда.

Согласно процедуре Нансона на первом этапе для каждого кандидата подсчитывается сумма рангов в упорядочениях избирателей. Далее подсчитывается среднее арифметическое сумм рангов всех кандидатов. Исключаются из рассмотрения все кандидаты, сумма рангов которых меньше или равна среднему арифметическому. Для оставшихся кандидатов подсчитывается сумма рангов. Подсчитывается среднее арифметическое. Исключаются из рассмотрения кандидаты, сумма рангов которых меньше или равна среднему ариф-

[3] Процедура голосования, основанная на суммировании рангов и совпадающая с описанием процедуры Борда, была предложена немецким философом и ученым Николаем Кузанским (Nicolaus Cusanus (1401—1464)) [19—21]). Борда, безусловно, не знал о работе Николая Кузанского.

метическому. Процесс повторяется до получения единственного победившего кандидата.

Поясним эту процедуру на примере. Имеются 3 избирателя, предпочтения которых относительно кандидатов $x$, $y$, $z$, $v$ представлены в табл. 14.

*Таблица 14*

| И1 | И2 | И3 | Ранг |
|---|---|---|---|
| $x$ | $v$ | $v$ | 4 |
| $y$ | $x$ | $x$ | 3 |
| $z$ | $y$ | $z$ | 2 |
| $v$ | $z$ | $y$ | 1 |

Согласно процедуре Нансона на первом этапе подсчитываются суммы рангов всех кандидатов:

$x$: $4 + 3 + 3 = 10$;
$y$: $3 + 2 + 1 = 6$;
$z$: $2 + 1 + 2 = 5$;
$v$: $1 + 4 + 4 = 9$.

Среднее арифметическое = $(10 + 6 + 5 + 9)/4 = 7{,}5$.

Исключаются из рассмотрения кандидаты, имеющие суммы рангов, меньшие или равные среднему арифметическому, т. е. кандидаты $y$ и $z$, таким образом имеет место ситуация, представленная в табл. 15.

*Таблица 15*

| И1 | И2 | И3 | Ранг |
|---|---|---|---|
| $x$ | $v$ | $v$ | 2 |
| $v$ | $x$ | $x$ | 1 |

Сумма рангов:

$x$: $2 + 1 + 1 = 4$;
$v$: $1 + 2 + 2 = 5$,

т. е. избирается кандидат $v$.

Процедура Нансона характерна тем, что несмотря на то, что для определения победителя используется суммирование рангов (как и в процедуре Борда), коллективный выбор обязательно совладает с победителем Кондорсе (если он существует в данном профиле индивидуальных упорядочений избирателей). Если победителя Кондорсе нет, то выбор по процедуре Нансона может отличаться от выбора по процедуре Борда.

### 2.3. Процедура Болдуина [6, 23]

Эта процедура была предложена австралийским астрономом Дж. М. Болдуином (Joseph Mason Baldwin (1878—1945)). Она так же, как и процедура Борда и Нансона, основана на подсчете сумм рангов кандидатов в упорядочениях избирателей.

Согласно процедуре Болдуина на каждом этапе исключается из рассмотрения кандидат, имеющий наименьшую сумму рангов в упорядочениях избирателей.

Поясним действия этой процедуры для случая, представленного в табл. 14.

Сумма рангов всех кандидатов:

$x$: $4 + 3 + 3 = 10$;
$y$: $3 + 2 + 1 = 6$;
$z$: $2 + 1 + 2 = 5$;
$v$: $1 + 4 + 4 = 9$.

Исключается из рассмотрения кандидат $z$ с наименьшей суммой рангов (табл. 16).

*Таблица 16*

| И1 | И2 | И3 | Ранг |
|---|---|---|---|
| $x$ | $v$ | $v$ | 3 |
| $y$ | $x$ | $x$ | 2 |
| $v$ | $z$ | $y$ | 1 |

Суммы рангов:

$x$: $3 + 2 + 2 = 7$;
$y$: $2 + 1 + 1 = 4$;
$v$: $1 + 3 + 3 = 7$.

Исключается кандидат $y$ (табл. 17).

*Таблица 17*

| И1 | И2 | И3 | Ранг |
|---|---|---|---|
| $x$ | $v$ | $v$ | 2 |
| $v$ | $x$ | $x$ | 1 |

Таким образом, согласно процедуре Болдуина избирается кандидат $v$.

Процедура Болдуина (как и процедура Нансона) всегда в качестве лучшего называет победителя Кондорсе (если он существует).

## 3. ПРОЦЕДУРЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПОПАРНОМ СРАВНЕНИИ КАНДИДАТОВ В УПОРЯДОЧЕНИЯХ ИЗБИРАТЕЛЕЙ

В качестве структуры, описывающей попарное сравнение кандидатов, используется мажоритарный граф.

Мажоритарным графом $M$ профиля индивидуальных упорядочений избирателей $\{p_i\}$, $i = \overline{1, N}$, называется ориентированный граф, вершинами которого являются кандидаты $x \in A$, а ориентированная дуга из вершины $x \in A$ в вершину $y \in A$ проводится в том и только том случае, если число избирателей в профиле $\{p_i\}$, $i = \overline{1, N}$, предпочитающих кандидата $x$ кандидату $y$, превосходит половину общего числа избирателей $N$.

Мажоритарный граф содержит в себе качественную информацию обо всех попарных сравнениях кандидатов между собой, полученную на основании профиля индивидуальных упорядочений избирателей $\{p_i\}$, $i = \overline{1, N}$. Непосредственно из определения следует, что мажоритарный граф $M$ является антирефлексивным ($\forall x \in A$: $x\overline{M}x$) и асимметричным ($\forall x, y \in A$: $xMy \Rightarrow y\overline{M}x$). В случае, когда число избирателей $N$ нечетно, мажоритарный граф $M$ является связным ($\forall x, y \in A$: $xMy \vee yMx$).

В литературе по теории графов связанные асимметричные графы называются турнирами. В случае, когда $N$ четно, мажоритарный граф является асимметричным, но, вообще говоря, не является связным, т. е. может и не быть турниром.

Далее в этом разделе последовательно рассматриваются как процедуры, осуществляющие коллективный выбор непосредственно по мажоритарному графу, так и процедуры, в которых по мажоритарному графу строится та или иная дополнительная вспомогательная структура, по которой затем осуществляется коллективный выбор, а также специальные процедуры, применяемые только в том случае, когда мажоритарный граф является турниром.

### 3.1. Процедуры выбора непосредственно по мажоритарному графу

#### 3.1.1. Процедура выбора победителя Кондорсе [1—3, 6, 24, 25]

При использовании в качестве вспомогательной структуры мажоритарного графа представление о лучшем кандидате естественно связать с кандидатом, «лучшим в попарных сравнениях», т. е. с таким кандидатом, который при сравнении с любым другим является более предпочтительным более чем для половины избирателей. Такой подход был предложен маркизом де Кондорсе в опубликованном 1785 г. труде «Рассуждения о применении анализа к оценке выборов большинством голосов[4]» [24].

Кандидат, побеждающий всех других кандидатов при попарном сравнении, называется победителем Кондорсе. На мажоритарном графе ему соответствует вершина, от которой отходят дуги ко всем остальным вершинам мажоритарного графа. Часто мажоритарный граф таких вершин не содержит, и победителя Кондорсе не существует.

Для профиля предпочтений (табл. 18) мажоритарный граф имеет вид, представленный на рис. 5. Здесь кандидат $x$ является победителем Кондорсе.

*Таблица 18*

| И1 | И2 | И3 |
|---|---|---|
| $x$ | $z$ | $y$ |
| $y$ | $x$ | $z$ |
| $z$ | $y$ | $x$ |

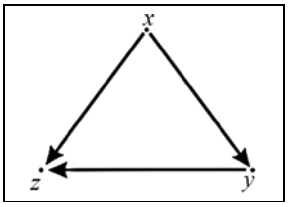



**Рис. 5**

Для случая, представленного в табл. 19, мажоритарный граф имеет вид, показанный на рис. 6. Здесь победителя Кондорсе нет, т. е. имеет место так называемый парадокс Кондорсе (линейные упорядочения предпочтений избирателей приводят к циклическому коллективному предпочтению).

*Таблица 19*

| И1 | И2 | И3 |
|---|---|---|
| $y$ | $x$ | $z$ |
| $x$ | $y$ | $x$ |
| $z$ | $z$ | $y$ |

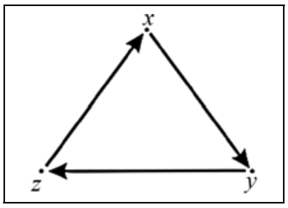



**Рис. 6**

В случае четного числа избирателей возможно три случая:

— победитель Кондорсе на мажоритарном графе существует;

— победителя Кондорсе не существует;

— имеются несколько недоминируемых вершин на мажоритарном графе.

Например, для случая, представленного в табл. 20, мажоритарный граф имеет вид, показанный на рис. 7.

*Таблица 20*

| И1 | И2 | И3 | И4 |
|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $y$ |
| $y$ | $y$ | $x$ | $x$ |
| $z$ | $v$ | $z$ | $z$ |
| $v$ | $z$ | $v$ | $v$ |

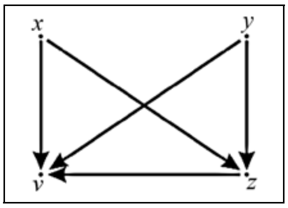



**Рис. 7**

В этом случае вершины $x$ и $y$ можно интерпретировать как слабые победители Кондорсе.

#### 3.1.2. Процедура Блэка [30]

Как было отмечено ранее, для многих профилей предпочтений избирателей выбор победителя Кондорсе (если он существует) и выбор по процедуре Борда отличаются. В своей книге Дункан

[4] Впервые процедуры голосования, основанные на попарном сравнении кандидатов, были предложены в XIII в. каталанским ученым, философом и богословом Раймундом Луллием (1235—1315) [6, 26—29].

Блэк (Duncan Black) предложил следующую процедуру голосования: если существует победитель Кондорсе на мажоритарном графе, то он объявляется коллективно избранным. Если такого кандидата нет, то коллективный выбор осуществляется с помощью процедуры Борда.

### 3.1.3. Процедура последовательного исключения кандидатов [6, 29, 31]

Кандидаты располагаются в строго фиксированном порядке. Избиратели сравнивают (согласно своим предпочтениям) первого и второго кандидатов в этом фиксированном порядке. Далее избиратели сравнивают победителя этого сравнения с третьим кандидатом, и т. д. Победитель последнего сравнения объявляется коллективно избранным.

Подобная процедура используется в законодательных органах США[5]. Так, в Конгрессе США при рассмотрении вопроса о внесении поправок в какой-либо документ принята следующая процедура. Допустим, имеется несколько альтернативных вариантов поправок к документу. Тогда на голосование выносится исходный документ (status quo) и стоящий первым по порядку вариант поправки. Победитель в этом попарном сравнении ставится на голосование со вторым вариантом поправки, и т. д. На последнем этапе на голосование выносятся вариант, победивший на предпоследнем этапе, и исходный документ (status quo).

### 3.1.4. Процедура выбора минимального доминирующего подмножества [2, 3, 32—35]

Непустое множество вариантов $Q$ называется доминирующим подмножеством множества $A$ на мажоритарном графе $M$, если для всех $x \in Q$ и всех $y \in A \backslash Q$ выполняется $xMy$. Другими словами, доминирующим подмножеством в $A$ называется множество $Q$, от каждого элемента которого идет дуга ко всем вершинам в множестве $A \backslash Q$.

Множество вариантов $Q$ называется минимальным доминирующим подмножеством в $A$, если $Q$ является доминирующим подмножеством в $A$ и не существует подмножества в $Q$, являющего доминирующим подмножеством в $A$.

Мажоритарный граф имеет единственное минимальное доминирующее подмножество [34].

В коллективный выбор согласно данной процедуре включаются все кандидаты из минимального доминирующего подмножества, которое находится по мажоритарному графу $M$.

[5] Впервые процедура последовательного исключения кандидатов была предложена в XIV в. Р. Луллием [28].

В качестве примера рассмотрим мажоритарный граф $M$, построенный по некоторому профилю индивидуальных упорядочений избирателей (рис. 8) на множестве кандидатов $\{x, y, z, v\}$. По процедуре выбора на этом графе победителя Кондорсе не существует, так как нет вершины, к которой бы не шли стрелки от других вершин. В то же время вершины $x$, $y$ и $z$, входящие в цикл, составляют минимальное доминирующее подмножество, которое доминирует над кандидатом $v$.

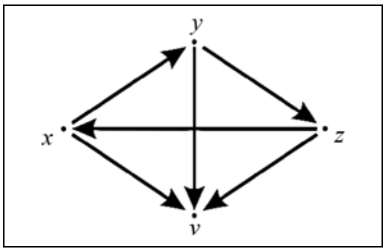



**Рис. 8**

Применение правила выбора минимального доминирующего подмножества часто приводит к выбору слишком большого числа вариантов. Например, для графа $M$, представленного на рис. 9, минимальное доминирующее подмножество составляет все подмножество $\{x, y, z, v, w, q\}$, хотя интуитивно ощущается, что цикл $\{x, y, z\}$ «лучше», чем цикл $\{v, w, q\}$. Приведенное ниже правило выбора минимальных недоминируемых подмножеств позволяет осуществить в этом примере именно выбор вариантов из цикла $\{x, y, z\}$.

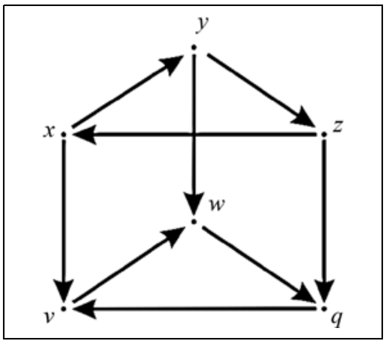



**Рис. 9**

### 3.1.5. Процедура выбора минимальных недоминирумых подмножеств [2, 3, 32—35]

Непустое подмножество вершин $Q$ называется недоминируемым подмножеством множества $A$ в мажоритарном графе $M$, если никакая вершина в $A \backslash Q$ не доминирует ни над какой вершиной из $Q$.

Другими словами, недоминируемым подмножеством называется подмножество $Q \subseteq A$, к элементам которого не идут стрелки из множества $A \backslash Q$. На рис. 10 таким подмножеством является подмножество $\{x, y, z\}$.

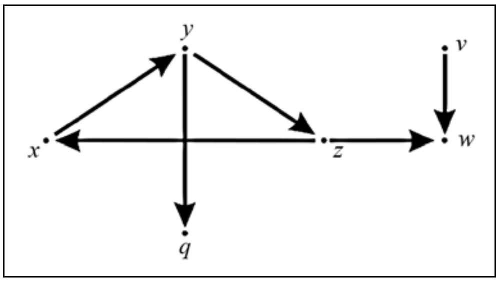



**Рис. 10**

Множество $A$ может содержать несколько минимальных недоминируемых подмножеств. Например, на рис. 10 множества $\{x, y, z\}$ и $\{v\}$ являются минимальными недоминируемыми подмножествами множества $\{x, y, z, v, w, q\}$.

Согласно описываемой процедуре в коллективный выбор включается объединение всех минимальных недоминируемых подмножеств, т. е. коллективный выбор состоит из кандидатов $\{x, y, z, v\}$.

В случае, когда число избирателей нечетно, коллективный выбор по процедурам выбора минимального доминирующего подмножества и минимальных недоминируемых подмножеств совпадают, так как в этом случае совпадают минимальное доминирующее и минимальное недоминируемое подмножества: эти подмножества состоят или из одной вершины, которая доминирует над всеми другими вершинами (победитель Кондорсе), или из «выигрывающего» цикла, т. е. такого цикла, каждая вершина которого доминирует над всеми вершинами вне этого цикла.

#### 3.1.6. Процедура фон Неймана—Моргенштерна [2, 3, 36]

Идея этой процедуры возникла в теории игр как решение кооперативной игры $N$ лиц. В коллективный выбор по правилу фон Неймана-Моргенштерна включается множество вершин $\Omega$ мажоритарного графа $M$ такое, что:

1) если $x$ и $y$ — вершины, входящие в $\Omega$, то ни одна из них не доминирует над другой в мажоритарном графе $M$;

2) если $z$ — вершина, не входящая в $\Omega$, то имеется по крайней мере одна вершина $x$, входящая в $\Omega$, которая доминирует над $z$ в графе $M$.

Такое множество вершин называется ядром мажоритарного графа. Заметим, что для некоторых графов существует несколько решений фон Неймана—Моргенштерна. Например, для графа, изображенного на рис. 11 имеется два возможных множества фон Неймана—Моргенштерна: множество $\{x, z\}$ и множество $\{y, v\}$. В таких случаях для выделения коллективно выбранных вариантов процедура как-либо доопределяется. (Например, в коллективный выбор включаются все существующие множества фон Неймана—Моргенштерна, т.е. их объединение).

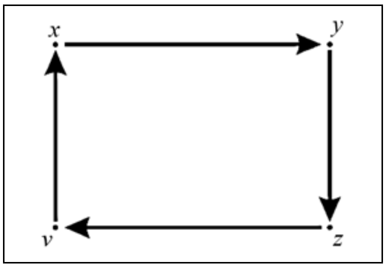



**Рис. 11**

Множество фон Неймана—Моргенштерна может и не существовать. Например, это имеет место, если граф представляет собой цикл нечетной длины без хорд. Нетрудно убедиться, что если мажоритарный граф $M$ ацикличен и транзитивен, то множество фон Неймана—Моргенштерна совпадает с парно-доминантным выбором на этом графе. В случае, когда мажоритарный граф ацикличен, парно-доминантный выбор вложен (вообще говоря, нестрого) во множество фон Неймана—Моргенштерна.

* * *

Рассмотренные в п. 3.1 процедуры осуществляют коллективный выбор непосредственно по мажоритарному графу. Наряду с этим существует группа процедур, когда по мажоритарному графу строится та или иная дополнительная вспомогательная структура, по которой и осуществляется коллективный выбор. Такой дополнительной структурой может быть шкала или бинарное отношение (ориентированный граф, уже не мажоритарный).

### 3.2. Процедуры, использующие мажоритарный граф и вспомогательную шкалу на нем

#### 3.2.1. Процедура Коупленда [2, 3, 37, 38]

Согласно этой процедуре, используя мажоритарный граф $M$, каждой вершине $x \in A$ приписывается определенное число. Существуют три модификации процедуры Коупленда.

*Первая процедура Коупленда.* Каждой вершине приписывается значение, равное разности числа исходящих из этой вершины дуг и входящих в нее дуг на мажоритарном графе $M$ (т. е. разности мощностей нижнего и верхнего срезов в данной вершине). Коллективно выбранным считается кандидат (или кандидаты), у которого это значение максимально.

*Вторая процедура Коупленда.* Лучшим признается кандидат (вершина на мажоритарном графе), у которого максимально число исходящих из этой вершины дуг (т. е. максимальна мощность нижнего среза).

*Третья процедура Коупленда.* Избранным считается кандидат, у которого минимально число входящих в эту вершину дуг на мажоритарном графе (т. е. минимальна мощность верхнего среза).

Пример, приведенный в табл. 21, иллюстрирует применение процедур Коупленда.

*Таблица 21*

| И1 | И2 | И3 | И 4 |
|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| $z$ | $x$ | $z$ | $x$ |
| $y$ | $z$ | $y$ | $z$ |

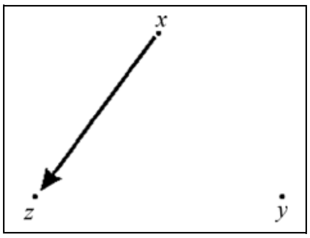



**Рис. 12**

Для профиля предпочтений избирателей (см. табл. 21) построен мажоритарный граф $M$ (рис. 12). Значения мощностей нижнего и верхнего срезов для вершин графа, а также разность между мощностями нижнего и верхнего срезов приведены в табл. 22.

*Таблица 22*

| Параметр | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| Нижний срез | $\{z\}$ | $\{\varnothing\}$ | $\{\varnothing\}$ |
| Мощность нижнего среза | 1 | 0 | 0 |
| Верхний срез | $\{\varnothing\}$ | $\{\varnothing\}$ | $\{x\}$ |
| Мощность верхнего среза | 0 | 0 | 1 |
| Разность между мощностями нижнего и верхнего срезов | 1 | 0 | −1 |

Согласно первой процедуре Коупленда коллективный выбор состоит из кандидата $x$, согласно второй процедуре — из кандидата $x$, согласно третьей процедуре — из кандидатов $x$ и $y$.

Нетрудно заметить, что в случае нечетного числа избирателей мажоритарный граф $M$ является турниром (т. е. антирефлексивным, асимметричным и связным графом). В этом случае все три процедуры Коупленда дают один и тот же коллективный выбор.

Для наглядности процедура Коупленда допускает матричное представление. По мажоритарному графу $M$ строится квадратная матрица смежности $T$ по правилу: если от вершины $x$ к вершине $y$ идет стрелка, то в клетке на пересечении строки $x$ и столбца $y$ матрицы $T$ ставится 1, а на пересечении строки $y$ и столбца $x$ ставится 0.

Поясним построение матрицы смежности на примере (табл. 23, рис. 13). По первой процедуре Коупленда (а если число избирателей нечетно, то и по остальным двум процедурам) подсчитывается сумма очков в строке матрицы смежности, и победителем объявляется кандидат (или кандидаты), у которого эта сумма максимальна. В данном примере это кандидаты $x$, $y$ и $z$. Такой способ определения победителей широко используется в спортивных турнирах, где за победу дается 1 очко, а за проигрыш — 0.

*Таблица 23*

| И1 | И2 | И3 |
|---|---|---|
| $x$ | $z$ | $y$ |
| $y$ | $x$ | $z$ |
| $v$ | $y$ | $x$ |
| $z$ | $v$ | $v$ |

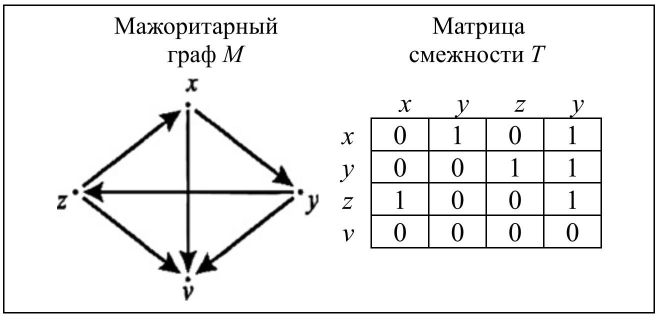



**Рис. 13**

### 3.2.2. Процедура Доджсона [6, 39—42]

Чарльз Лютвидж Доджсон (Charles Lutwidge Dodgson (1832—1898), широко известный под литературным псевдонимом Люис Кэролл, написал три статьи, посвященные проблеме голосования. В одной из них [41] он ввел понятие степени превосходства одного кандидата над другим. На основе этого понятия построена процедура голосования Доджсона.

Поясним эту процедуру на примере. Профиль предпочтений 11-ти избирателей относительно кандидатов $x$, $y$, $z$, $v$ представлен в табл. 24.

*Таблица 24*

| И1 | И2 | И3 | И4 | И5 | И6 | И7 | И8 | И9 | И10 | И11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $y$ | $y$ | $y$ | $z$ | $z$ | $z$ | $v$ |
| $v$ | $v$ | $y$ | $y$ | $z$ | $z$ | $v$ | $y$ | $y$ | $y$ | $z$ |
| $z$ | $z$ | $v$ | $v$ | $x$ | $x$ | $z$ | $v$ | $v$ | $v$ | $y$ |
| $y$ | $y$ | $z$ | $z$ | $v$ | $v$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ |

Мажоритарный граф, построенный по этому профилю предпочтений избирателей, имеет вид, представленный на рис. 14. Если имеется победитель Кондорсе, то он объявляется коллективным выбором. Победителя Кондорсе на этом мажоритарном графе нет.

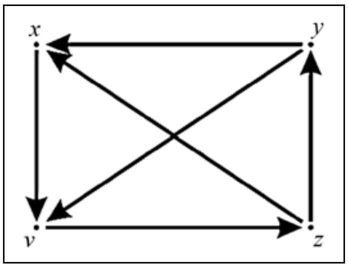



**Рис. 14**

На основании профиля предпочтений избирателей строится квадратная матрица размерности $n \times n$ по правилу: на пересечении строки $x$ и столбца $y$ стоит дробь, в числителе которой число избирателей, предпочитающих кандидата $x$ кандидату $y$, а в знаменателе — число избирателей, предпочитающих кандидата $y$ кандидату $x$. Главная диагональ матрицы не заполняется.

Для примера (см. табл. 24), такая матрица представлена рис. 15.

| | *x* | *y* | *z* | *v* |
|---|---|---|---|---|
| *x* | | 4/7 | 4/7 | 6/5 |
| *y* | 7/4 | | 5/6 | 8/3 |
| *z* | 7/4 | 6/5 | | 5/6 |
| *v* | 5/6 | 3/8 | 6/5 | |

**Рис. 15**

Проанализировав эту матрицу, заметим, что для того, чтобы кандидат $y$ стал победителем Кондорсе, в профиле предпочтений избирателей (см. табл. 24) достаточно одного перемещения вверх в столбце избирателя И11 (т. е. поменять местами кандидатов $y$ и $z$).

Обозначим через $t(\cdot)$ число перемещений вверх (инверсий), которые позволят кандидату стать победителем Кондорсе. Тогда $t(y) = 1$. Аналогично, для того, чтобы кандидат $z$ стал победителем Кондорсе, достаточно одного перемещения вверх (например, поменять местами $z$ и $v$ в столбце избирателя И1), т. е. $t(z) = 1$. С другой стороны, для того, чтобы кандидат $x$ стал победителем Кондорсе, необходимо произвести по два перемещения вверх в столбцах избирателей И5 и И6, т. е. в сумме 4 перемещения, и $t(x) = 4$. Еще больше перемещений вверх требуется для кандидата $v$, чтобы он стал победителем Кондорсе. Так формируются числовые оценки кандидатов по шкале «число инверсий».

Коллективно избранным согласно процедуре Доджсона признается кандидат (или кандидаты), который требует минимального перемещения вверх в упорядочениях избирателей для того, чтобы стать победителем Кондорсе (т. е. кандидат (или кандидаты) имеющий минимальное числовое значение по шкале «число инверсий») Для примера, (см. табл. 24) коллективно избираются кандидаты $y$ и $z$.

Поясним действие процедуры Доджсона на более простом примере. Предпочтения трех избирателей относительно кандидатов $x$, $y$, $z$, $v$ представлены в табл. 25, а соответствующий мажоритарный граф на рис. 16.

*Таблица 25*

| И1 | И2 | И3 |
|---|---|---|
| *x* | *z* | *y* |
| *v* | *x* | *z* |
| *y* | *v* | *v* |
| *z* | *y* | *x* |

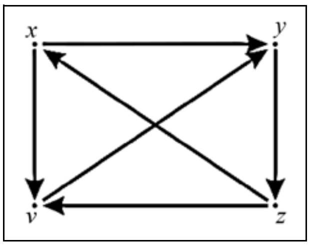



**Рис. 16**

В табл. 26 стрелками указано, сколько инверсий необходимо для каждого кандидата, чтобы он стал победителем Кондорсе.

Согласно процедуре Доджсона коллективно избранными будут кандидаты $x$ и $z$.

*Таблица 26*

| Для кандидата *x*: | | |
|---|---|---|
| И1 | И2 | И3 |
| *x* | ⇓ *z* ⇑ | *y* |
| *v* | *x* | *z* |
| *y* | *v* | *v* |
| *z* | *y* | *x* |

| Для кандидата *y*: | | |
|---|---|---|
| И1 | И2 | И3 |
| ⇓ *x* ⇑ | *z* | *y* |
| ⇓ *v* ⇑ | *x* | *z* |
| *y* | *v* | *v* |
| *z* | *y* | *x* |

| Для кандидата *z*: | | |
|---|---|---|
| И1 | И2 | И3 |
| *x* | *z* | ⇓ *y* ⇑ |
| *v* | *x* | *z* |
| *y* | *v* | *v* |
| *z* | *y* | *x* |

| Для кандидата *v*: | | |
|---|---|---|
| И1 | И2 | И3 |
| *x* | *z* | *y* |
| *v* | ⇓ *x* ⇑ | ⇓ *z* ⇑ |
| *y* | *v* | *v* |
| *z* | *y* | *x* |

3.2.3. Процедура Янга [3]

В этой процедуре также используется попарное сравнение кандидатов, но происходит это сравнение для различных подсписков избирателей из профиля предпочтений избирателей. Для ее реализации строится вспомогательная числовая шкала: каждому варианту $x \in A$ приписывается числовая оценка $\rho(x)$, равная числу избирателей в наибольшем подсписке избирателей, в котором этот вариант $x$ лучше любого другого варианта при попарном мажоритарном сравнении. Считается, что вариант $x$ лучше варианта $y$ при попарном мажоритарном сравнении в пределах некоторого подсписка избирателей, если более половины избирателей из этого подсписка предпочитают вариант $x$ варианту $y$ в своих индивидуальных упорядочениях (т. е. вариант $x$ является победителем Кондорсе в этом подсписке избирателей). Так возникает вспомогательная коллективная шкала $\rho$, которая используется для нахождения коллективного выбора (например, при помощи правила экстремизации, т. е. в коллективный выбор включаются варианты, имеющие максимальные оценки по вспомогательной шкале $\rho$).

Для каждого варианта $x$ число $\rho(x)$ находится специальным переборным алгоритмом. С ростом числа избирателей и кандидатов в бюллетене переборная задача усложняется, и тогда вспомогательная шкала в процедуре Янга может быть построена лишь с помощью компьютера.

Рассмотрим примеры применения процедуры Янга. Пусть профиль индивидуальных упорядочений трех избирателей имеет вид, представленный в табл. 27, *а*. Возможные подсписки избирателей (И1, И2, И3) представлены в табл. 27, *б—ж*. Подсчитаем значения $\rho$ для каждого из кандидатов $x$, $y$, $z$ и $v$, т. е. найдем максимальный размер подсписка, в котором данный кандидат является лучшим при попарном мажоритарном сравнении с каждым из других кандидатов.

Для кандидата $x$: если взять весь список (И1, И2, И3), то кандидат $x$ хуже кандидата $y$ в попарном мажоритарном сравнении (Избиратели И1 и И3 предпочитают кандидата $y$ кандидату $x$), т. е. $\rho(x) \neq 3$.

Возможны три подсписка, содержащих упорядочения двух избирателей: (И1, И2), (И1, И3) и (И2, И3) см. табл. 27 *б*, *в* и *г* соответственно. Ни в одном из этих подсписков кандидат $x$ не является победителем при попарном мажоритарном сравнении со всеми другими кандидатами. Например, в случае подсписка (И1, И3) (см. табл. 27, *в*) хотя кандидат $x$ лучше, чем кандидат $z$ и кандидат $v$ для обоих избирателей И1 и И3, но кандидат $x$ не лучше кандидата $y$ в попарном сравнении (избиратель И1 предпочитает кандидата $x$ кандидату $y$, но избиратель И3 предпочитает кандидата $y$ кандидату $x$).

Аналогично проверяются подсписки (И1, И2) и (И2, И3). Итак, не существует подсписка, содержащего упорядочения двух избирателей, в котором $x$ является лучшим в попарном мажоритарном сравнении с другими кандидатами.

Рассмотрим теперь подсписки, состоящие только из одного избирателя. В подсписке, состоящем из избирателя И1 (см. табл. 27, *д*) кандидат $x$ является лучшим в попарном мажоритарном сравнении с другими кандидатами. Следовательно, $\rho(x) = 1$.

Аналогичная проверка показывает, что $\rho(z) = 1$, $\rho(v) = 0$.

Для кандидата $y$ $\rho(y) = 3$. Действительно, если взять полный список (И1, И2, И3), то кандидат $y$ лучше, чем любой другой кандидат более чем для половины избирателей: кандидат $y$ лучше, чем кандидат $x$ для избирателей И2 и И3; кандидат $y$ лучше, чем кандидат $z$ для избирателей И1 и И3; кандидат $y$ лучше, чем кандидат $v$ для всех трех избирателей И1, И2, И3.

Итак, числовые оценки кандидатов по вспомогательной шкале $\rho$: $\rho(y) = 3$, $\rho(x) = \rho(z) = 1$, $\rho(v) = 0$.

*Таблица 27*

| И1 | И2 | И3 |
|---|---|---|
| $x$ | $z$ | $y$ |
| $y$ | $y$ | $x$ |
| $v$ | $v$ | $z$ |
| $z$ | $x$ | $v$ |

*а*

| И1 | И2 |
|---|---|
| $x$ | $z$ |
| $y$ | $y$ |
| $v$ | $v$ |
| $z$ | $x$ |

*б*

| И1 | И3 |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| $y$ | $x$ |
| $v$ | $z$ |
| $z$ | $v$ |

*в*

| И2 | И3 |
|---|---|
| $z$ | $y$ |
| $y$ | $x$ |
| $v$ | $z$ |
| $x$ | $v$ |

*г*

| И1 |
|---|
| $x$ |
| $y$ |
| $v$ |
| $z$ |

*д*

| И2 |
|---|
| $z$ |
| $y$ |
| $v$ |
| $x$ |

*е*

| И3 |
|---|
| $y$ |
| $x$ |
| $z$ |
| $v$ |

*ж*

Применяя правило максимизации к этой шкале, находим коллективный выбор. Согласно процедуре Янга он состоит из кандидата *y*.

#### 3.2.4. Процедуры, использующие понятие собственного вектора турнирной матрицы [3, 43—45, 46—49]

Эти процедуры применимы, если мажоритарный граф *M*, построенный по профилю предпочтений избирателей $\{p_i\}$, $i = \overline{1, N}$, является графом-турниром. По графу *M* строится турнирная матрица *T*.

Согласно теореме Фробениуса [50] турнирная матрица *T* всегда имеет положительное собственное значение $\alpha$, которое является простым корнем характеристического уравнения $T\rho = \alpha\rho$. Этому значению соответствует собственный вектор $\rho_\alpha$ с положительными координатами. Приведенные далее три процедуры осуществляют ранжирование вариантов из множества *A* на основе сравнения числовых значений координат собственного вектора турнирной матрицы *T*. Таким образом, возникает вспомогательное коллективное упорядочение, по которому затем осуществляется коллективный выбор.

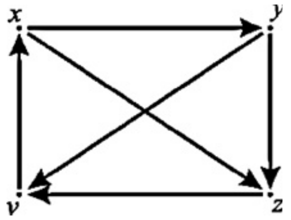
*Первая процедура*. На основании содержательных соображений предлагается построение вспомогательного упорядочения вариантов из множества *A* в соответствии с величиной компонент правого собственного вектора $\rho_\alpha$ турнирной матрицы *T*. Под правым собственным вектором понимается вектор $\rho_\alpha$, удовлетворяющий характеристическому уравнению $T\rho_\alpha = \alpha\rho_\alpha$. Правый собственный вектор $\rho_\alpha$ интерпретируют как вектор относительной «силы» вариантов из множества *A*. Варианты упорядочиваются в соответствии с числовыми значениями компонент собственного вектора. В коллективный выбор включаются варианты, соответствующие наибольшим компонентам вектора $\rho_\alpha$.

*Вторая процедура* [46]. Вспомогательное коллективное упорядочение вариантов производится в соответствии со значением левого собственного вектора, соответствующего наибольшему собственному значению. Под левым собственным вектором понимается вектор $\sigma_r$, удовлетворяющий характеристическому уравнению $\sigma T = r\sigma$. Левый собственный вектор интерпретируется как вектор относительной «слабости» вариантов. В выбор предлагается включать варианты, соответствующие наименьшей компоненте левого собственного вектора.

*Третья процедура* [46]. Варианты из *A* упорядочиваются в соответствии с числами, которые получаются делением компонент правого собственного вектора на соответствующие компоненты левого собственного вектора. В коллективный выбор включаются варианты, которые соответствуют максимальному отношению компонент.

Приведем пример осуществления коллективного выбора с помощью процедур, использующих понятие собственного вектора турнирной матрицы. На рис. 17 изображены мажоритарный граф-турнир *M* на множестве вариантов $A = \{x, y, z, v\}$ и соответствующая ему турнирная матрица *T*.

Мажоритарный граф *M*




Турнирная матрица *T*

| | *x* | *y* | *z* | *v* |
|---|---|---|---|---|
| *x* | 0 | 1 | 1 | 0 |
| *y* | 0 | 0 | 1 | 0 |
| *z* | 0 | 0 | 0 | 1 |
| *v* | 1 | 1 | 0 | 0 |

**Рис. 17**

Значения компонент собственных векторов для этой матрицы взяты из работы [47]:

$$\alpha = 1{,}3956; \quad \rho_\alpha = \{0{,}3213;\ 0{,}2833;\ 0{,}1651;\ 0{,}2303\}.$$

В коллективный выбор по первой процедуре включается вариант *x*, соответствующий наибольшей компоненте вектора $\rho_\alpha$.

Левый собственный вектор $\sigma_\alpha$, соответствующий наибольшему собственному значению, имеет вид

$$\sigma_\alpha = \{0{,}2303;\ 0{,}1660;\ 0{,}2833;\ 0{,}3213\}.$$

В коллективный выбор по второй процедуре включается вариант *y*, соответствующий наименьшей компоненте левого собственного вектора.

Отношение компонент правого и левого собственных векторов:

$$(1{,}3951;\ 1{,}7170;\ 0{,}5828;\ 0{,}7168).$$

В коллективный выбор по третьей процедуре включается вариант *y*.

В работе [48] предложен ранжирующий вектор в виде

$$(T + \mu T^2 + \quad + \mu^{k-1}T^k + \quad)e = T(I - \mu T)^{-1}e,$$

где $\mu$ — некоторая положительная компонента, при которой ряд сходится ($\mu \le r$, где *r* — наибольшее собственное значение матрицы *T*), *I* — единичная матрица, *e* — единичный вектор. Показано, что при $\mu = r$ такое ранжирование совпадает с ранжированием по компонентам правого собственного вектора, соответствующего наибольшему собственному значению.

В работе [49] предложен способ упорядочения в соответствии со значениями компонент собственного вектора для произвольных неотрицательных матриц (а не только матриц однокругового турнира). Дана также вероятностная постановка задачи.

### 3.3. Процедуры, использующие мажоритарный граф и вспомогательное бинарное отношение на нем

#### 3.3.1. Процедура Фишберна [2, 3, 14, 51]

Согласно этой процедуре по мажоритарному графу $M$ дополнительно строится вспомогательное бинарное отношение Ф (т. е. вспомогательный ориентированный граф Ф), по которому в дальнейшем осуществляется коллективный выбор. Вершина $x$ доминирует по этому бинарному отношению Ф над вершиной $y$ (т. е. проводится ориентированная дуга на графе Ф из вершины $x$ к вершине $y$), если все вершины, которые доминируют по отношению $M$ над $x$, доминируют также и над $y$, и при этом существует хотя бы одна вершина, которая доминирует по отношению $M$ над $y$, но не доминирует над $x$, т. е.

$$x\Phi y \Leftrightarrow F(x) \subset F(y),$$

где $F(x) = \{v \in A\text{: } vMx\}$ — множество вершин, которые доминируют по отношению $M$ над вариантом $x$.

Таким образом, вершина $x$ доминирует над вершиной $y$ по бинарному отношению Ф, если множество $F(x)$ вложено во множество $F(y)$.

Отношение Ф является транзитивным, асимметричным и антирефлексивным отношением, т. е. строгим частичным порядком.

В коллективный выбор по правилу Фишберна включаются вершины $x \in A$, недоминируемые по отношению к Ф, т. е. такие вершины, к которым не подходит ни одной дуги от других вершин. Этот выбор всегда непуст, так как непуст выбор по парно-доминантному правилу на строгих частичных порядках.

Содержательный смысл по правилу Фишберна заключается в том, что выбираются вершины, над которыми доминирует «мало» вершин из множества $A$ на мажоритарном графе $M$.

В качестве примера рассмотрим мажоритарный граф $M$ (рис. 18).

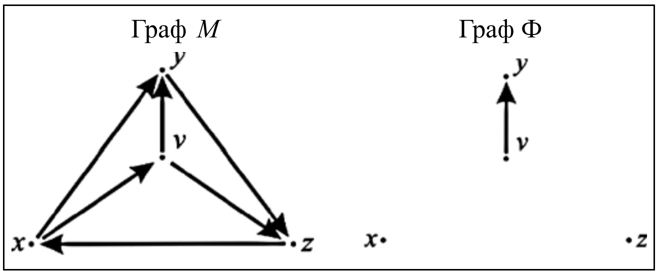



**Рис. 18**

По мажоритарному графу найдем множества $F(x)$ для всех вершин из множества $A$:

$$F(x) = \{z\}, \quad F(y) = \{x, v\}, \quad F(v) = \{x\}.$$

Построим граф Ф (см. рис. 18). Парно-доминантный выбор по бинарному отношению Ф содержит вершины $x$, $z$ и $v$. Эти вершины и включаются в выбор по правилу Фишберна, т. е. в коллективный выбор входят кандидаты $x$, $z$ и $v$.

#### 3.3.2. Процедура выбора по отношению покрытия [2, 3, 52, 53]

Рассмотрим еще одну процедуру, в которой для осуществления коллективного выбора по мажоритарному графу строится другая вспомогательная структура — отношение покрытия Г (граф Г).

Вершина $x$ доминирует по бинарному отношению покрытия Г над вершиной $y$, если все вершины, которые доминируются по отношению $M$ вершиной $y$, доминируются также вершиной $x$, и при этом существует хотя бы одна вершина, которая доминируется по отношению $M$ вершиной $x$, но не доминируется вершиной $y$, т. е.

$$x\Gamma y \Leftrightarrow D(x) \supset D(y),$$

где $D(v) = \{z \in A\text{: } vMz\}$.

Обратим внимание, что если в правиле Фишберна в отношении Ф для того, чтобы было $x\Phi y$, требуется вложенность множеств вершин, которые доминируют по отношению $M$ над вершинами $x$ и $y$, то в отношении Г для того, чтобы было $x\Gamma y$, требуется вложенность множеств вершин, над которыми доминируют вершины $x$ и $y$.

Отношение Г, как и отношение Ф, является отношением строгого частичного порядка.

В коллективный выбор по данной процедуре включаются вершины, недоминируемые по отношению Г. В связи с тем, что парно-доминантный выбор по отношению строгого частичного порядка непуст, непуст и выбор по отношению покрытия Г.

Содержательный смысл выбора по отношению покрытия заключается в том, что выбираются вершины, которые доминируют по бинарному отношению $M$ над «большим числом» вершин из предъявления $X$.

В качестве примера рассмотрим мажоритарный граф $M$ (рис. 19).

По этому мажоритарному графу найдем множества $D(x)$ для всех вершин:

$$D(x) = \{z\}, \quad D(y) = \{v\}, \quad D(z) = \{Ш\}, \quad D(v) = \{z\},$$

по которым затем построим бинарное отношение покрытия Г (см. рис. 19). Парно-доминантный выбор по бинарному отношению Г содержит вершины $x$, $y$ и $v$. Эти вершины и включаются в коллек-

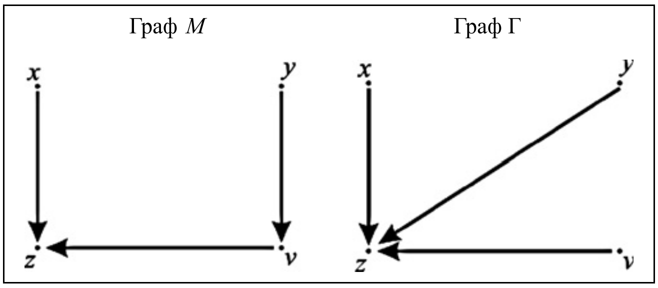



**Рис. 19**

тивный выбор по отношению покрытия, т. е. в коллективный выбор входят кандидаты $x$, $y$, $v$.

#### 3.3.3. Процедура Ричелсона [2, 54]

Эта процедура представляет собой как бы «синтез» процедуры Фишберна и процедуры выбора по отношению покрытия. В качестве дополнительной вспомогательной структуры, которая строится по мажоритарному графу $M$, в правиле Ричелсона используется бинарное отношение $\Lambda$:

$$x\Lambda y \Leftrightarrow [F(x) \subseteq F(y)] \wedge [D(x) \supseteq D(y)],$$

причем хотя бы одно включение $\subseteq$ или $\supseteq$ является строгим включением. Отношение $\Lambda$, также как и отношения Ф и Г, является отношением строгого частичного порядка. В коллективный выбор по правилу Ричелсона включаются вершины, недоминируемые по отношению $\Lambda$.

### 3.4. Паретовские процедуры голосования

#### 3.4.1. Процедура выбора множества Парето [2]

Каждое упорядочение кандидатов избирателем представляет собой линейный порядок. Если рассматривать упорядочение избирателя как критерий, то кандидатам можно приписать ранговые оценки по этому критерию. Тогда в качестве процедуры голосования можно рассматривать выделение множества Парето в многокритериальном пространстве избирателей. Проиллюстрируем действие этой процедуры на примере. Мнения трех избирателей относительно четырех кандидатов $x$, $y$, $z$, $v$ представлены в табл. 28, соответствующий граф Парето изображен на рис. 20. В коллективный выбор по этой процедуре попадут кандидаты $x$ и $y$.

*Таблица 28*

| И1 | И2 | И3 |
|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ |
| $y$ | $y$ | $z$ |
| $z$ | $v$ | $x$ |
| $v$ | $z$ | $v$ |

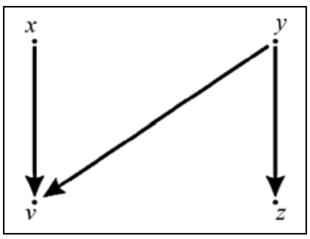



**Рис. 20**

#### 3.4.2. $q$-паретовская процедура голосования [2, 55]

Обозначим через $p_i$ линейный порядок, который задается упорядочением кандидатов $i$-м избирателем. Введем понятие $q$-доминируемого кандидата в линейном порядке $p_i$. Кандидата $x$ назовем $q$-доминируемым в линейном порядке $p_i$, если $|p_i x| \le q$, где $p_i x$ — верхний срез элемента $x$ в линейном порядке $p_i$.

Пусть линейный порядок $p_i$ имеет вид, представленный в табл. 29. Тогда $x$ — 0-доминируемый элемент, $x$ и $y$ — 1-доминируемые элементы, $x$, $y$ и $z$ — 2-доминируемые элементы, $x$, $y$, $z$ и $v$ — 3-доминируемые элементы.

*Таблица 29*

| $p_i$ |
|---|
| $x$ |
| $y$ |
| $z$ |
| $v$ |

Смысл этого определения состоит в том, что рассматриваются не только недоминируемые (т. е. 0-доминируемые) элементы в линейном порядке $p_i$, но и те элементы, которые имеют не более одного предпочтительного элемента ($x$ и $y$), не более двух предпочтительных элементов ($x$, $y$ и $z$) и т. д.

Можно распространить это понятие на профиль предпочтений избирателей, состоящий из $N$ линейных упорядочений. Будем говорить, что кандидат $x$ является $q$-доминируемым в профиле $\{p_i\}$, $i = \overline{1, N}$, если

$$\left| \bigcap_{i \in N} p_i x \right| \le q.$$

Тогда включение в коллективный выбор 0-доминируемых кандидатов совпадает с выбором множества Парето.

Поясним функционирование $q$-паретовской процедуры на примере профиля предпочтений избирателей, представленного в табл. 28.

Значения верхних срезов и их мощностей представлены в табл. 30. Видно, что в коллективный выбор 0-доминируемых кандидатов (т. е. в множество Парето) входят кандидаты $x$ и $y$, в выбор

*Таблица 30*

| $A$ | И1 | И2 | И3 | Пересечение верхних срезов | Мощность пересечения |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $p_1x = \{\varnothing\}$ | $p_2x = \{\varnothing\}$ | $p_3x = \{y, z\}$ | $\bigcap\limits_{i \in N} p_i(x) = \{\varnothing\}$ | $\left\|\bigcap\limits_{i \in N} p_i x\right\| = 0$ |
| $y$ | $p_1y = \{x\}$ | $p_{2y} = \{x\}$ | $p_3y = \{\varnothing\}$ | $\bigcap\limits_{i \in N} p_i(y) = \{\varnothing\}$ | $\left\|\bigcap\limits_{i \in N} p_i y\right\| = 0$ |
| $z$ | $p_1z = \{x, y\}$ | $p_{2z} = \{x, y, v\}$ | $p_3z = \{y\}$ | $\bigcap\limits_{i \in N} p_i(z) = \{\varnothing\}$ | $\left\|\bigcap\limits_{i \in N} p_i z\right\| = 1$ |
| $v$ | $p_1v = \{x, y, z\}$ | $p_2v = \{x, y\}$ | $p_3v = \{x, y, z\}$ | $\bigcap\limits_{i \in N} p_i(z) = \{\varnothing\}$ | $\left\|\bigcap\limits_{i \in N} p_i v\right\| = 2$ |

1-доминируемых кандидатов — кандидаты $x$, $y$ и $z$, в выбор 2-доминируемых кандидатов — кандидаты $x$, $y$, $z$ и $v$.

## 4. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ

### 4.1. Процедура Кемени [3, 56]

По индивидуальным упорядочениям избирателей строится вспомогательное коллективное строгое упорядочение, ближайшее в некотором смысле ко всем индивидуальным упорядочениям. Лучший кандидат в этом вспомогательном упорядочении и является коллективным выбором.

Коллективное упорядочение производится следующим образом. Рассматривается множество $L$, содержащее все возможные упорядочения кандидатов из множества $A$. Каждому упорядочению $l \in L$ приписывается числовая оценка $\xi(l)$, характеризующая степень близости этого упорядочения $l$ к профилю индивидуальных упорядочений избирателей $\{p_i\}$, $i = \overline{1, N}$, т. е. строится вспомогательная шкала, но уже не на кандидатах (как в некоторых ранее рассмотренных процедурах), а на всех возможных упорядочениях кандидатов:

$$\xi(l) = \sum_{\substack{x, y \in A \\ x \neq y}} \beta(x, y)\lambda_l(x, y), \qquad (1)$$

где $\beta(x, y)$ — число избирателей, предпочитающих кандидата $x$ кандидату $y$ в профиле индивидуальных предпочтений $\{p_i\}$, $i = \overline{1, N}$,

$$\lambda_l(x, y) = \begin{cases} 1, \text{если в упорядочении } l \\ \text{кандидат } x \text{ лучше, чем кандидат } y, \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поясним, почему такая оценка $\xi(l)$ является условной мерой близости упорядочения $l$ к профилю индивидуальных упорядочений избирателей $\{p_i\}$, $i = \overline{1, N}$. Для каждой пары кандидатов $x$, $y$ соответствующее слагаемое в этой оценке тем больше, чем большее число избирателей взаимно располагают кандидата $x$ и $y$ так же, как они расположены в упорядочении $l$. В связи с тем, что такие слагаемые суммируются по всем возможным парам кандидатов, значения $\xi(l)$, подсчитанное по формуле (1), характеризует близость упорядочения $l$ и профиля индивидуальных упорядочений $\{p_i\}$, $i = \overline{1, N}$.

Так возникает вспомогательная коллективная шкала на множестве $L$ всех возможных упорядочений кандидатов. В качестве вспомогательного коллективного упорядочения выбирается упорядочение $l^*$, имеющее максимальную оценку $\xi(l^*)$, т. е.

$$\xi(l^*) = \max_{l \in L} \xi(l).$$

Это упорядочение может не совпадать ни с одним из индивидуальных упорядочений избирателей. По этому вспомогательному упорядочению $l^*$ и осуществляется коллективный выбор путем правила максимизации. Реализация этой процедуры требует решения громоздких переборных задач и практически невозможна без помощи компьютера.

Приведем пример нахождения числовой оценки $\xi(l)$, приписываемой упорядочению $l \in L$, для простого случая, когда число избирателей $N = 3$ и число кандидатов $n = 3$. Рассмотрим профиль индивидуальных упорядочений избирателей, изображенный в табл. 31. Множество всевозможных упорядочений $L$ состоит из шести элементов, приведенных в табл. 32: $l_1$, ..., $l_6$.

*Таблица 31*

| И1 | И2 | И3 |
|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ |
| $y$ | $z$ | $z$ |
| $z$ | $y$ | $x$ |

*Таблица 32*

| $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $l_4$ | $l_5$ | $l_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $y$ | $z$ | $z$ |
| $y$ | $z$ | $x$ | $z$ | $x$ | $y$ |
| $z$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $x$ |

Подсчитаем по формуле (1) значения $\xi(l_i)$ для всех возможных упорядочений: $\xi(l_1) = 6$; $\xi(l_2) = 5$; $\xi(l_3) = 5$; $\xi(l_4) = 4$; $\xi(l_5) = 4$; $\xi(l_6) = 3$. Таким образом, в качестве вспомогательного коллективного упорядочения $l^*$ принимается упорядочение $l_1$, имеющее максимальную оценку по шкале $\xi$. В коллективный выбор включается кандидат, лучший в упорядочении $l_1$, т. е. кандидат $x$.

### 4.2. Процедура приближенной триангуляции мажоритарной турнирной матрицы [3, 57—60]

Эта процедура применима к мажоритарным графам специального вида — турнирам, т. е. связным, асимметричным, антирефлексивным графам. Напомним, что если число избирателей $N$ нечетно, то мажоритарный граф $M$, построенный по профилю предпочтений избирателей, является турниром, а матрица смежности, построенная по этому графу $M$, является турнирной матрицей.

Турнирной матрицей называется квадратная матрица $T = \|t_{xy}\|$, $x, y \in A$, размерности $n \times n$, которая строится по мажоритарному графу $M$ следующим образом:

$$t_{xy} = \begin{cases} 1, \text{если } xMy, \\ 0, \text{если } yMx, \ t_{xx} = 0. \end{cases}$$

На рис. 21 изображен пример мажоритарного графа-турнира $M$ и соответствующей ему турнирной матрицы $T$.

| | $x$ | $y$ | $z$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $z$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $v$ | 1 | 1 | 0 | 0 |

**Рис. 21**

В случае, когда мажоритарный граф $M$ является строгим порядком, ему соответствует турнирная матрица, называемая транзитивной. Пример транзитивной матрицы приведен на рис. 22. В такой матрице все элементы над главной диагональю равны 1, а под главной диагональю — равны 0.

| | $x$ | $y$ | $z$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $v$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Рис. 22**

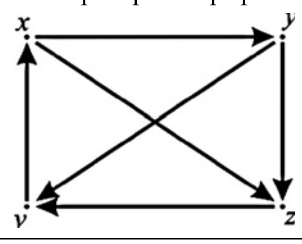
Пусть по профилю индивидуальных упорядочений $\{p_i\}$, $i = \overline{1, N}$ построен мажоритарный граф $M$, а по нему — турнирная матрица $T$. Наряду с ней рассмотрим все мыслимые транзитивные турнирные матрицы, построенные на этом множестве вершин $A$. Такие матрицы отличаются только тем, в каком порядке приписаны вершины $x \in A$ строкам (и соответственно столбцам) матрицы.

Рассмотрим какую-нибудь конкретную транзитивную матрицу $T_T$ из этого множества. Обратившись к исходной турнирной матрице $T$, переставим в ней строки и столбцы так, чтобы их порядок оказался точно таким, как в матрице[6] $T_T$. Подсчитаем сумму элементов, расположенных в такой преобразованной матрице под главной диагональю. Обозначим эту сумму $\tau(T_T)$ и рассмотрим это число как условное расстояние исходной матрицы $T$, построенной по мажоритарному графу $M$, от данной транзитивной матрицы $T_T$. Подсчитав такие числа $\tau(T_T)$ для всех возможных транзитивных турнирных матриц $T_T$, получаем шкалу, построенную на множестве транзитивных турнирных матриц.

По этой шкале выбирается транзитивная матрица $T_T^*$, у которой шкальная оценка $\tau(T_T^*)$ имеет наименьшее значение по построенной шкале. Такая матрица $T_T^*$ в смысле введенного расстояния наиболее близка к исходной турнирной матрице $T$. В коллективный выбор включается вариант, у которого сумма очков по этой транзитивной турнирной матрице $T_T^*$ максимальна.

Приведем пример построения коллективного выбора при помощи процедуры, использующей приближенную триангуляцию турнирной матрицы. Мажоритарный граф $M$ и соответствующая ему турнирная матрица $T$ приведены на рис. 23.

Мажоритарный граф $M$




Турнирная матрица $T$

| | $x$ | $y$ | $z$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $z$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $v$ | 1 | 1 | 0 | 0 |

**Рис. 23**

[6] Перестановка строк и столбцов, в результате которой из некоторой матрицы получается верхнетреугольная матрица, называется триангуляцией матрицы. При описанной в тексте процедуре перестановки строк и столбцов под главной диагональю матрицы могут остаться элементы, отличные от нуля. Такая триангуляция называется приближенной, и с этим связано название данной процедуры.

Транзитивная матрица

| | z | y | v | x |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 |
| v | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | x | y | z | v |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 0 | 0 | 1 |
| v | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | x | v | z | y |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 1 | 1 |
| v | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 0 | 0 | 1 |
| y | 0 | 0 | 0 | 0 |

Приближенно триангулированная матрица

| | z | y | v | x |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | 0 | 1 | 0 |
| y | 1 | 0 | 1 | 0 |
| v | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x | 1 | 1 | 0 | 0 |

*а*

| | x | y | z | v |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 1 | 0 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 0 | 0 | 1 |
| v | 1 | 0 | 0 | 0 |

*б*

| | x | v | z | y |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 1 | 1 |
| v | 1 | 0 | 0 | 0 |
| z | 0 | 1 | 0 | 0 |
| y | 0 | 1 | 1 | 0 |

*в*

**Рис. 24**

На четырех вариантах возможно построение 24-х различных транзитивных турнирных матриц. Подсчитываются значения τ-оценки отличия каждой из этих транзитивных матриц от исследуемой. На рис. 24 приведены три примера таких транзитивных матриц, а под ними приведена исходная матрица (та же, что и на рис. 23), но после соответствующей перестановки строк и столбцов. Значения для этих трех транзитивных матриц соответственно равны: $T_а = 3$, $T_б = 3$, $T_в = 3$. Для остальных транзитивных турнирных матриц оценки подсчитываются аналогично.

Матрица, изображенная на рис. 24, *б*, имеет наименьшую оценку τ среди всех 24-х транзитивных турнирных матриц. Этой транзитивной матрице соответствует строгое упорядочение вариантов, по которому лучшим вариантом является *x*, т. е. согласно данному правилу коллективно избирается кандидат *x*.

## 5. ПРОЦЕДУРА СИМПСОНА [2, 14]

По профилю предпочтений избирателей строится турнирная матрица специального вида размерности $n \times n$, где $n$ — число кандидатов (не путать с турнирной матрицей, которая строилась в процедуре приближенной триангуляции и процедурах, использующих понятие собственного вектора турнирной матрицы). На пересечении строки *x* и столбца *y* стоит число избирателей, которые в своем упорядочении кандидатов поставили кандидата *x* выше кандидата *y*. Обозначим это число через $V(x, y)$. Элементам главной диагонали приписывается значение ∞. Для профиля предпочтений избирателей, представленного в табл. 33 турнирная матрица имеет вид, изображенный на рис. 25.

*Таблица 33*

| И1 | И2 | И3 |
|---|---|---|
| x | y | z |
| z | x | v |
| y | z | x |
| v | v | y |

| | x | y | z | v |
|---|---|---|---|---|
| x | ∞ | 2 | 2 | 2 |
| y | 1 | ∞ | 1 | 2 |
| z | 1 | 2 | ∞ | 3 |
| v | 1 | 1 | 0 | ∞ |

**Рис. 25**

Согласно этой процедуре каждому кандидату приписывается минимальное значение в строке турнирной матрицы. Коллективно избранным считается кандидат (или кандидаты), у которых это значение максимально. В примере, изображенном на рис. 25, коллективно избран кандидат *x*.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в этом обзоре процедуры голосования основаны на разных принципах и часто приводят к разным коллективным выборам. Применение той или иной процедуры зависит от конкретного содержания задачи.

Обилие накопившихся процедур голосования и трудности, связанные с выделением среди них «лучшей» процедуры, привели к постановке задачи синтеза «разумных» процедур. В начале 1950-х гг. Кеннет Эрроу (Kenneth Arrow (род. в 1921 г.)) впервые четко и по-новому сформулировал задачу синтеза процедур голосования [61]. Он впервые развил аксиоматический подход к синтезу процедур голосования. Эрроу сформулировал набор условий, который вошел как канонический во все последующие исследования и, доказав их несовместимость, определил центральное направление в развитии задач синтеза процедур голосования.

В обширной литературе, последовавшей после классической работы Эрроу, исследовалась задача в постановке, когда как индивидуальные мнения, так и коллективное решение моделировались бинарными отношениями. В работах [62, 63] впервые была поставлена задача о синтезе операторов коллективного выбора, в которой как индивидуальные мнения, так и коллективное решение описывались функциями выбора. Полностью решена задача аксиоматического синтеза локальных соответствий группового выбора [64].

Во второй половине 1970-х гг. направление синтеза переросло в сравнительный анализ различных процедур голосования, т. е. выяснение того, в какой мере те или иные процедуры удовлетворяют некоторому набору условий и критериев, и разные авторы используют для сравнительного анализа процедур различные их наборы. Ни одна из известных процедур голосования не удовлетворяет всем вводимым критериям, и при выборе процедуры голосования возникает та же проблема, с которой сталкивается исследователь в многокритериальной ситуации.

В работах [65, 66] показано, что все детерминированные процедуры голосования манипулируемы со стороны избирателей. Различные процедуры голосования были исследованы на предмет определения степени их манипулируемости [67, 68].

Так постепенно наука накапливает набор нужных для голосования «технических средств» — процедур голосования и знаний об их свойствах, преимуществах и недостатках.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Алескеров Ф.Т., Ордешук П.* Выборы. Голосование. Партии. — М.: Academia, 1995. — 208 с.
2. *Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. — М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005. — 279 с.
3. *Вольский В.И., Лезина З.М.* Голосование в малых группах. Процедуры и методы сравнительного анализа. — М.: Наука, 1991. — 192 с.
4. *Brams S., Fishburn P.* Approval voting // American Political Science Review. — 1978. — Vol. 72, N 3. — P. 831—847.
5. *L'Huilier S.* Examen de mode d'election propose a la convention nationale de France en fevrier 1793 et adopte a Geneve. — Geneve: Bonnant, 1794.
6. *Вольский В.И.* Процедуры голосования в малых группах с древнейших времен до начала XX века. Препринт WP7/2014/02. — М.: Изд. дом ВШЭ, 2014. — 76 с.
7. *Hare T.* The election of representatives, parliamentary and municipal. — London: Longmans, Green, Reader and Dyer, 1873.
8. *Droop Y.R.* On methods on electing representatives // Journal of the Statistical Society of London. — 1881. — Vol. 44, N 2. — P. 141—202.
9. *Вольский В.И., Карпов А.В.* Применение различных вариантов правил передачи голосов // Полития. — 2011. — № 2. — С. 162—174.
10. *Gilmour J.* Detailed description of the STV count in accordance with the rules in the Scottish local government elections order 2007 // Representation. — Vol. 43, N 3. — P. 217—229.
11. *Meek B.L.* The problem of nontransferable votes // Voting Matters. — 1994. — N 1. — P. 7—11.
12. *Aleskerov F.T., Karpov A.V.* A new single transferable vote method and its axiomatic justification // Social Choice and Welfare. — 2013. — Vol. 40, N 3. — P. 771—786.
13. *Reilly B.* Democracy in divided societies: electoral engineering for conflict management. — Cambridge University Press, 2001. — 217 p.
14. *Петровский А.Б.* Теория принятия решений. — М.: Академия, 2009. — 400 с.
15. *Aleskerov F.T., Yakuba V.I., Yuzbashev D.A.* A «threshold aggregation» of three-graded rankings // Mathematical Social Sciences. — 2007. — Vol. 53. — P. 106—110.
16. *Aleskerov F.T., Chistyakov V.V., Kalyagin V.* The threshold aggregation // Economic Letters. — 2010. — Vol. 107. — P. 261—262.
17. *Aleskerov F.T., Chistyakov V.V.* The threshold decision making effectuated by the enumerating preference function // International Journal of Information Technology and Decision Making. — 2013. — Vol. 12, N. 6. — P. 1201—1222.
18. *Borda J.C.* Memoire sur les elections au scrutiny // Histoire de l'Academie Royale des Sciences pour 1781. — Paris, 1784.
19. *Nicolas* of Cusa: Catholic concordance. — Cambridge, 1996.
20. *Nicolaus* Cusanus. De concordantia catholica. — S.L., 1431.
21. *Вольский В.И.* Николай Кузанский и его система голосования // Полития. — 2011. — № 3. — С. 173—175.
22. *Nanson E.J.* British government blue book. — London, 1907. — 137 p.
23. *Baldwin J.M.* The technique of the Nanson preferential majority system of election // Proceedings of the Royal Society of Victoria. — 1926. — N 39. — P. 42—52.
24. *Condorcet* (M.J.A.N. Caritat, marquis de Condorcet). Essai sur l'application de l'analyse a la probabilite decisions rendues a la pluralite des voix. — Paris, 1785.
25. *Вольский В.И.*Ж.-Ш. де Борда и маркиз де Кондорсе — родоначальники теории голосования // Полития. — 2013. — № 3. — С. 147—159.
26. *Llull R.* Artifitium electionis personarum / Biblioteca Apostolica Vaticana, Cod. Vat. Lat. 9332, f. 11 r —12 v. — 1283.
27. *Llull R.* Blanquerna, chapter 24 (En qual manera Natana fo eleta a abadessa). Bayerische Staatsbibliothek, Cod. Hisp. 67, f. 32 v — 34 r. — 1283.
28. *Llull R.* De arte eleccionis. — Sankt Nicolaus — Hospital / Cusanusstift, Cod. Cus. 83, f. 47 v — 48 r. — 1299.
29. *Вольский В.И.* О вкладе Раймунда Луллия в теорию голосования // Полития. — 2011. — № 1. — С. 188—196.
30. *Black D.* The theory of committees and elections. — Cambridge University Press, 1958. — 242 p.
31. *Banks J.S.* Sophisticated voting outcomes and agenda control // Social Science and Welfare. — 1985. — Vol. 1. — P. 295—306.
32. *Good J.J.* A note on Condorcet set // Public Choice. — 1971. — Vol. 10. — P. 97—101.
33. *Ferejohn J.A., Grether D.* On a class of rational social decision procedures // Journal of Economic Theory. — 1974. — Vol. 8. — P. 471—482.
34. *Schwartz T.* The logic of collective choice. — New York: Columbia University Press, 1986. — 315 p.
35. *Schwartz T.* Collective choice, separation of issues and vote trading // American Political Science Review. — 1977. — Vol. 71, N 3. — P. 999—1010.
36. *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 983 с.

37. *Copeland A.N.* A reasonable social welfare function. Ann Arbor: University of Michigan. Seminar of Application of Mathematics to the Social sciences, 1951.
38. *Nurmi H.* Voting procedures - a summary analysis // British Journal of Political Science. — 1983. — Vol. 13. — P. 181—208.
39. *Dodgson C.L.* A discussion on the various methods of procedure in conducting elections. — Oxford, 1873.
40. *Dodgson C.L.* Suggestion as the best method of taking votes where more than two issues are to be voted on. — Oxford, 1874.
41. *Dodgson C.L.* A method of taking votes on more than two issues. — Oxford, 1876.
42. *Вольский В.И.* Работы Чарльза Лютвиджа Доджсона в области теории голосования // Полития. — 2012. — № 3. — С. 168—179.
43. *Казанская Т.А., Шмерлинг Д.С.* Парные сравнения, турниры и методы упорядочения в принятии решений и обработке данных (обзор). — М.: ЦЭМИ АН СССР, 1980. — 58 с.
44. *Kendall M.G.* Further contributions to the theory of paired comparisons // Biometrics. — 1955. — Vol. 11, N 1. — P. 43—62.
45. *Wey T.H.* The algebraic foundations of ranking theory. — Cambridge University. PhD thesis, 1952.
46. *Ramanujacharyulu C.* Analysis of preferential experiments // Psychometrika. — 1964. — Vol. 29, N 3. — P. 257—261.
47. *David H.A.* Ranking the players in a round robin tournament // Review of International Statistic Institute. — 1971. — Vol. 39. — P. 137—147.
48. *Thompson G.L.* Lectures on game theory, Markov chains, and related topics. — Monograph SCR-11, Sandia Corporation, Albugnerque, N.M., 1958.
49. *Брук Б.Н., Бурков В.Н.* Методы экспертных оценок в задачах упорядочения объектов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1972. — № 3. — С. 29—39.
50. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
51. *Fishburn P.* Condorcet social choice functions // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 1977. — Vol. 33, N 3. — P. 469—489.
52. *Miller N.* A new solution set for tournaments and majority voting: further graph-theoretical approaches to the theory of voting // American Journal of Political Science. — 1980. — Vol. 24, N 1. — P. 68—96.
53. *Shepsle K., Weingst B.* Uncovered sets and sophisticated voting outcomes with implications for agenda institutions. — Mimeo. Center for Study of American Business, 1982.
54. *Richelson J.T.* Majority rule and collective choice. — California Institute of Technology (Mimeo), 1980.
55. *Aleskerov F.T.* Categories of Arrowian voting schemes // Handbook of Social Choice and Welfare. — 2002. — Vol. 1. — P. 95—129.
56. *Kemeny J.* Mathematics without numbers // Daedalus. — 1959. — Vol. 88. — P. 577—591.
57. *Белкин А.Р.* Приближенная триангуляция матриц в задачах ранжирования и обработки межотраслевого баланса // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1981. — № 1. — С. 26—31.
58. *Slater P.* Inconsistencies in a schedule of paired comparisons // Biometrika. — 1961. — Vol. 48, N 3—4. — P. 303—312.
59. *Remage R. Jr., Thompson W.A.* Maximim-likelyhood paired comparison rankings // Biometrika. — 1966. — Vol. 53, N 1—2. — P. 252—272.
60. *Levenglick A.* Fair and reasonable election systems // Behavioral Science. — 1975. — Vol. 20. — P. 34—46.
61. *Arrow K.* Social choice and individual values. — New Haven: Yale University Press, 1963. — 144 p.
62. *Айзерман М.А.* Некоторые новые задачи общей теории выбора (обзор одного направления исследований) // Автоматика и телемеханика. — 1984. — № 9. — С. 5—43.
63. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов (основы теории). — М.: Наука, 1990. — 240 с.
64. *Aleskerov F.T.* Arrowian aggregation models. — Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1999. — 243 p.
65. *Gibbard A.* Manipulation of voting schemes: a general result // Econometrica. — 1973. — Vol. 41. — P. 587—602.
66. *Satterthwaite M.A.* Strategy-proofness and Arrow's conditions existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions // Journal of Economic Theory. — 1975. — Vol. 10. — P. 187—217.
67. *Алескеров Ф.Т., Карабекян Д.С., Санвер Р., Якуба В.И.* Оценка степени манипулируемости известных схем агрегирования в условиях множественного выбора // Журнал новой экономической ассоциации. — 2009. — № 1—2. — С. 37—61.
68. *Алескеров Ф.Т., Курбанов Э.* О степени манипулируемости правил коллективного выбора // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 10. — С. 134—146.


*Статья представлена к публикации членом редколлегии чл. корр. РАН Д.А. Новиковым.*

**Вольский Владимир Иванович** канд. техн. наук,
ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
vlad.volskiy@gmail.com.