УДК 551.466.3

ДВУХСОЛИТОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В РАМКАХ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА—ДЕ ВРИЗА

Е. Н. Пелиновский[1,2], *Е. Г. Шургалина*[1,2] *

[1] Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород;
[2] Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород, Россия

Изучается взаимодействие двух солитонов разной полярности в рамках модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза. Рассмотрено три типа взаимодействия солитонов: обменный и обгонный (для положительных солитонов) и поглощательно-излучательный (для разнополярных солитонов). Подробно исследованы особенности взаимодействия солитонов. Поскольку взаимодействие солитонов является элементарным актом солитонной турбулентности, нами изучены обычно рассматриваемые в теории турбулентности моменты волнового поля с первого по четвёртый включительно. Показано, что при взаимодействии солитонов с одинаковой полярностью третий и четвёртый моменты волнового поля, определяющие коэффициенты асимметрии и эксцесса в теории турбулентности, уменьшаются, в то время как для солитонов разной полярности эти моменты увеличиваются. Полученные результаты сопоставлены с оценками двухсолитонного взаимодействия в рамках уравнения Кортевега—де Вриза.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кортевега—де Вриза (КдВ) является в настоящее время эталонным уравнением нелинейной теории волн, описывающим слабонелинейные и слабодисперсионные волны в воде, атмосфере, плазме и астрофизических системах [1]. Его солитонные и многосолитонные решения на бесконечном интервале, также как их взаимодействия между собой и с внешними полями, очень хорошо изучены. В то же время описание статистической динамики ансамбля солитонов представляет собой ещё не решённую задачу, хотя и здесь получено уже довольно много численных результатов [2–8].

Модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза применяется для описания волн в изотропных средах (размерно-квантованные плёнки, акустические волны в плазме, внутренние волны в симметрично стратифицированной жидкости, см. [1, 9–12]). С математической точки зрения оно так же хорошо изучено, как и уравнение Кортевега—де Вриза, и является полностью интегрируемым [13]. Между тем даже простое взаимодействие двух солитонов до самого последнего времени практически не было исследовано [14, 15], не говоря уже о статистическом описании солитонов в рамках данного уравнения. Новым здесь, по сравнению с уравнением Кортевега—де Вриза, является существование солитонов обеих полярностей, взаимодействие которых имеет свои особенности.

Как известно, в теории турбулентности статистические свойства поля характеризуются первыми четырьмя моментами (среднее, дисперсия, асимметрия, эксцесс), которые легко находятся с помощью измерений [16–19]. Особенно важен четвёртый момент, который определяет роль больших выбросов и с точки зрения волновой турбулентности свидетельствует о вероятности появления волн-убийц [20]. В классической турбулентности вклад в моменты волнового поля дают взаимодействия двух, трёх, четырёх (и более) частиц. В теории волновой турбулентности зачастую ограничиваются волновыми взаимодействиями трёх и четырёх частиц [16, 21]. Специфика

* eshurgalina@mail.ru

солитонной турбулентности в рамках уравнения Кортевега—де Вриза, как это было показано Захаровым в 1971 году [22], а затем подтверждено в работах [23–25], заключается в том, что солитоны взаимодействуют попарно. В работах [26, 27] в рамках уравнения Кортевега—де Вриза исследовано взаимодействие двух солитонов как элементарного акта солитонной турбулентности. Подобные взаимодействия ведут к уменьшению третьего и четвёртого моментов волнового поля, в то время как первый и второй моменты, являющиеся инвариантами уравнения Кортевега—де Вриза, остаются постоянными. Это ведёт к уменьшению асимметрии и эксцесса мультисолитонного поля.

Очевидно, что парные взаимодействия также вносят основной вклад и в динамику мультисолитонных полей в рамках модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза в силу его полной интегрируемости. Именно поэтому в данной работе мы сосредоточились на изучении вклада двухсолитонного взаимодействия в моменты волнового поля.

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ

Мы будем использовать каноническую форму модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^3} = 0. \tag{1}$$

Его точным решением является солитон

$$u(x,t) = sA\,\mathrm{sech}[A\,(x - ct - x_0)], \qquad c = A^2, \tag{2}$$

A — амплитуда солитона, индекс $s = \pm 1$ определяет полярность солитона, c — скорость солитона и x_0 — фаза (начальное положение) солитона.

Двухсолитонное решение имеет более сложную структуру [15]

$$u(x,t) = \\ = 2\gamma\,\frac{s_1 A_1\,\mathrm{ch}[A_2\,(x - A_2 t)] + s_2 A_2\,\mathrm{ch}[A_1\,(x - A_1 t)]}{s_1 s_2\,(\gamma^2 - 1) + \gamma^2\,\mathrm{ch}[A_1\,(x - A_1 t) - A_2\,(x - A_2 t)] + \mathrm{ch}[A_1\,(x - A_1 t) + A_2\,(x - A_2 t)]}\,, \tag{3}$$

где

$$\gamma = \frac{A_1 + A_2}{A_1 - A_2} > 1.$$

При удалении солитонов друг от друга решение (3) представляется суммой двух невзаимодействующих солитонов:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{4}$$

где u_1 и u_2 есть односолитонные решения (2) с амплитудами A_1 и A_2.

Наиболее сильное взаимодействие солитонов происходит в момент их максимального сближения, чему соответствует время $t = 0$. Форма результирующего импульса легко находится из (3):

$$u(x,0) = 2\gamma\,\frac{A_1\,\mathrm{ch}(A_2 x) + s_2 A_2\,\mathrm{ch}(A_1 x)}{s_2\,(\gamma^2 - 1) + \gamma^2\,\mathrm{ch}[(A_1 - A_2)\,x] + \mathrm{ch}[(A_1 + A_2)\,x]}\,. \tag{5}$$

Определим форму импульса в момент взаимодействия солитонов. Как известно, при взаимодействии солитонов уравнения Кортевега—де Вриза результирующий импульс будет одногорбым, если амплитуды солитонов сильно отличаются друг от друга, и двугорбым, если они близки [27, 28]. Аналогичные результаты можно получить и для солитонов модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза, анализируя вторую производную функции $u(x,0)$ в точке $x = 0$:

$$u_{xx}(x,0)\Big|_{x=0} = (A_1 - A_2)\,[A_1 A_2 - (A_1 - s_2 A_2)^2]. \tag{6}$$

Сразу видно, что при взаимодействии солитонов разной полярности ($s_1 = 1$, $s_2 = -1$) эта величина всегда отрицательна и, по крайней мере, центральная часть результирующего импульса одногорбая.

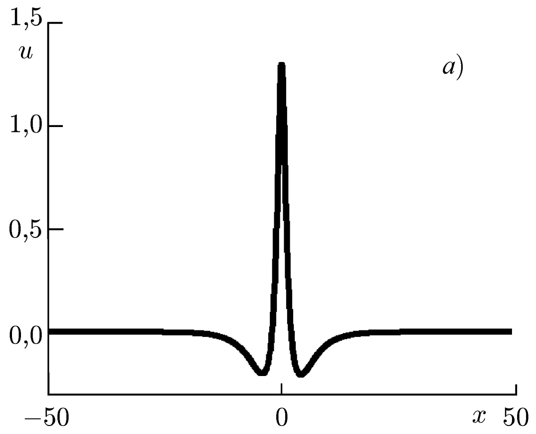
В случае солитонов одной полярности знак второй производной (6) меняется при отношении амплитуд

$$\frac{A_2}{A_1} = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}382, \tag{7}$$

так что при меньшей амплитуде второго солитона результирующий импульс является одногорбым (обгонное взаимодействие), а при большей — двугорбым (обменное взаимодействие).

Итак, в модифицированном уравнении Кортевега—де Вриза существуют три типа взаимодействия солитонов. Взаимодействие разнополярных солитонов заключается в том, что быстрый солитон поглощает медленный, а затем, после прохождения через него, принимает свою первичную форму. Этот тип взаимодействия назван в [15] как «поглощение—испускание» («absorb—emit»). Для положительных солитонов реализуются два типа взаимодействий: обгонный ($A_2 < 0{,}38 A_1$) и обменный ($A_2 > 0{,}38 A_1$).

Формы импульсов в момент взаимодействия солитонов для всех трёх случаев представлены на рис. 1.



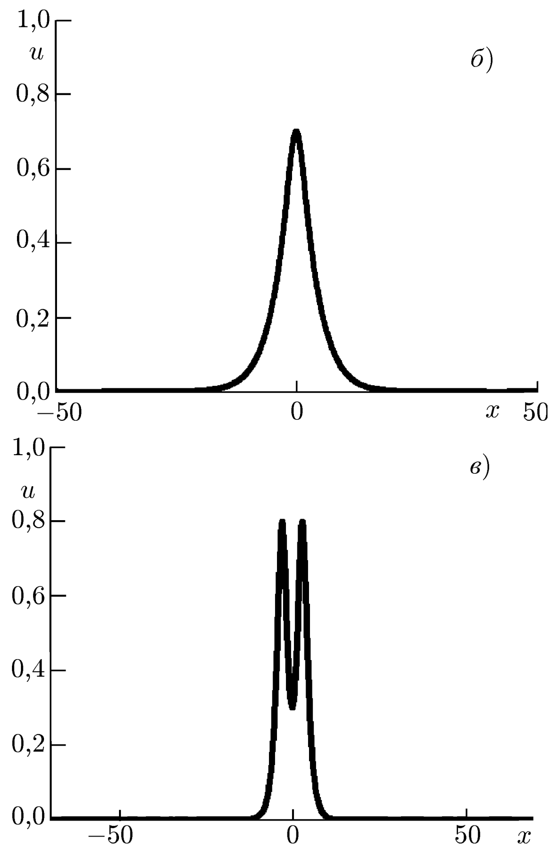


Рис. 1. Форма импульсов в момент взаимодействия солитонов: *а* — $s_1 A_1 = 1$, $s_2 A_2 = -0{,}3$; *б* — $s_1 A_1 = 1$, $s_2 A_2 = 0{,}3$; *в* — $s_1 A_1 = 1$, $s_2 A_2 = 0{,}7$

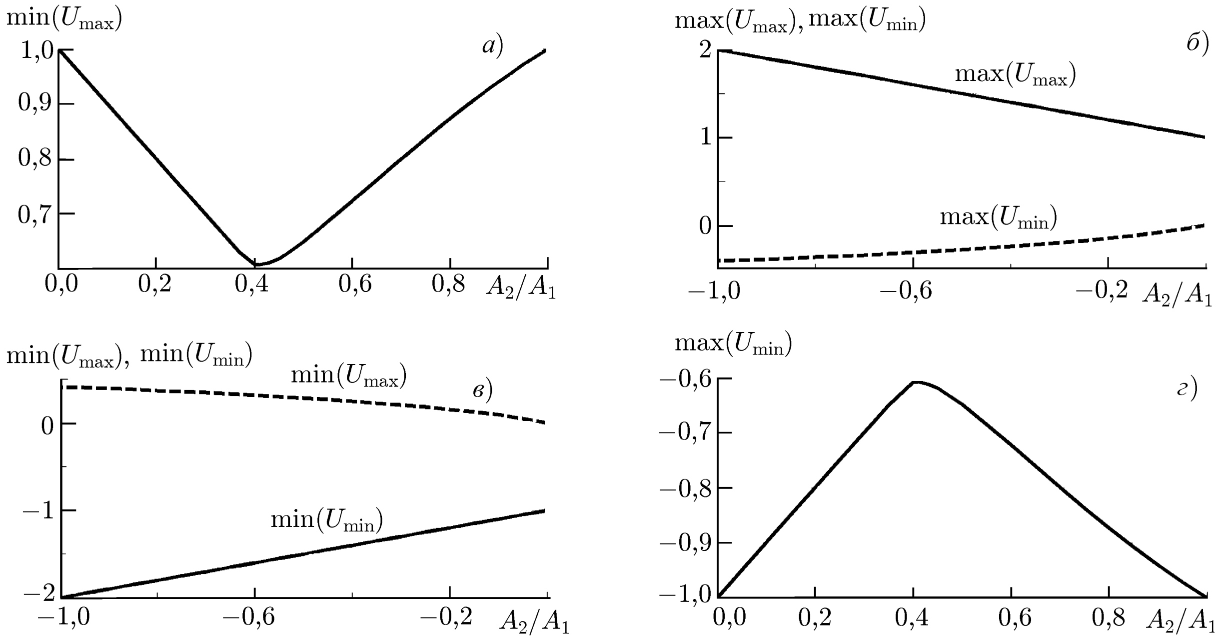


Рис. 2. Экстремумы волновых полей, описываемых модифицированным уравнением Кортевега—де Вриза: *а* — положительные солитоны, *б* — знакопеременные солитоны (больший солитон имеет положительную полярность), *в* — разнополярные солитоны (больший солитон имеет отрицательную полярность), *г* — отрицательные солитоны

Важно отметить, что амплитуда одногорбого результирующего импульса легко находится из (5) при $x = 0$:

$$U_* = A_1 - s_2 A_2. \tag{8}$$

Отсюда видно, что амплитуда растёт при взаимодействии солитонов разной полярности и убывает при взаимодействии солитонов одинаковой полярности.

В случае двугорбого результирующего импульса его максимальное значение находится не в его центральной точке и определяется из (5) в весьма громоздком виде.

На рис. 2 приведены зависимости максимального и минимального значений результирующего импульса от отношения амплитуд солитонов для четырёх видов взаимодействия (три вышеупомянутых, а четвёртый — для знакопеременных солитонов, когда наибольший из них имеет отрицательную полярность). Несложно заметить симметрию рис. 2*а* и *г*, а также 2*б* и *в*. Это объясняется одинаковыми амплитудами солитонов и противоположностью их знаков.

Таким образом, в случае рис. 2*а* (*г*) амплитуда результирующего импульса сначала (до значения $A_2/A_1 < 0{,}41$) монотонно убывает (возрастает), при этом принимая значение 0,607. В данном случае амплитуда второго солитона мала и результирующий импульс имеет одногорбую форму, амплитуда которого находится из формулы (8). Затем она опять монотонно возрастает (убывает) при бóльших амплитудах второго солитона, когда результирующий импульс двугорбый. Такое поведение объясняется сменой режимов взаимодействия с обгонного на обменный в интервале отношений амплитуд $0{,}38 < A_2/A_1 < 0{,}43$. Фактически здесь наблюдается полная аналогия с динамикой солитонов уравнения Кортевега—де Вриза, где также есть переходная зона между двумя режимами [27].

В случае разнополярных солитонов (рис. 2*б, в*) кривые изменения положительных и отрицательных амплитуд суммарного импульса монотонные, т. к. здесь имеет место только один режим взаимодействия солитонов. Максимум импульса в момент взаимодействия для рис. 2*б* (и, соответственно, минимум для рис. 2г) убывает (возрастает) с уменьшением модуля амплитуды второго солитона, которая равна $s_1A_1 - s_2A_2$ (по аналогии с (8)).

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Как известно, модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза является полностью интегрируемым, и оно имеет бесконечное количество сохраняющихся инвариантов [13]. Первые три из них соответствуют законам сохранения массы, момента и энергии:

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u \, \mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \, \mathrm{d}x, \tag{9}$$

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u^4 - u_x^2) \, \mathrm{d}x, \qquad I_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u^6 - 5u^2u_x^2 + u_{xx}^2/2) \, \mathrm{d}x. \tag{10}$$

Эти интегралы сохраняются в процессе эволюции волнового поля, и их легко вычислить аналитически для случая, когда солитоны разделились в пространстве:

$$I_1 = \pi \, (s_1 + s_2), \qquad I_2 = 2 \, (A_1 + A_2), \tag{11}$$

$$I_3 = 2 \, (A_1^3 + A_2^3)/3, \qquad I_4 = (A_1^5 + A_2^5)/5. \tag{12}$$

Первый инвариант играет важную роль в эволюции начального возмущения, поскольку определяет число возникающих солитонов и бризеров. Он может быть как положительным, так и равным нулю [29]. Остальные инварианты оказываются положительно определёнными и растут с увеличением амплитуд взаимодействующих солитонов независимо от их полярности. Знание этих интегралов важно, в первую очередь, для контроля численных решений модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза.

Аналитически показано, что основной вклад в динамику мультисолитонных решений вносят парные взаимодействия солитонов [22, 30]. Поэтому для понимания этого вклада и влияния подобных взаимодействий на статистические моменты волнового поля мы исследовали следующие интегралы, соответствующие четырём статистическим моментам:

$$M_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^n(x,t) \, \mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, 3, 4. \tag{13}$$

Первые два интеграла будут сохраняться с течением времени в силу интегрируемости модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза. Однако третий и четвёртый моменты, соответствующие асимметрии и эксцессу в теории турбулентности, не являются инвариантами и изменяются во времени (рис. 3). В случае взаимодействия двух положительных солитонов третий и четвёртый моменты убывают, как и в аналогичной задаче для солитонов уравнения Кортевега—де Вриза [26, 27] (рис. 3*а*). Физически это можно объяснить эффектом уменьшения амплитуды результирующего импульса в момент взаимодействия. Для взаимодействия двух солитонов разных полярностей, описываемых формулой (3), когда больший солитон остаётся положительным, а меньший становится отрицательным — наоборот, амплитуда суммарного импульса значительно возрастает. Это даёт вклад в изменения третьего и четвёртого моментов, и оба они в момент взаимодействия увеличиваются (рис. 3*б*). В случае взаимодействия двух отрицательных солитонов

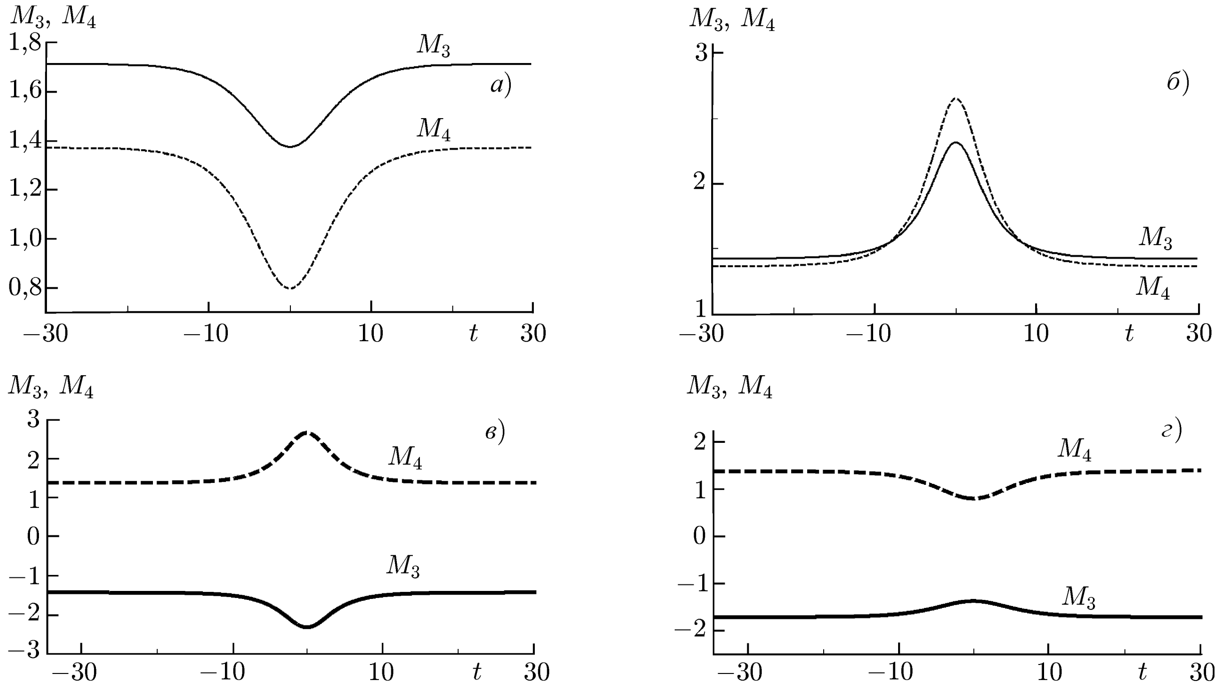


Рис. 3. Зависимость моментов M_3 и M_4 от времени при взаимодействии солитонов модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза: *а* — $A_1 = 1$, $A_2 = 0{,}3$; *б* — $A_1 = 1$, $A_2 = -0{,}3$; *в* — $A_1 = -1$, $A_2 = 0{,}3$; *г* — $A_1 = -1$, $A_2 = -0{,}3$

третий момент отрицателен и увеличивается в момент взаимодействия, а четвёртый уменьшается (рис. 3*г*). В случае же, если больший солитон, находящийся слева, имеет отрицательную амплитуду, а меньший солитон — положительную, третий момент по-прежнему отрицателен и уменьшается в момент взаимодействия, а четвёртый увеличивается (рис. 3*в*).

Для невзаимодействующих солитонов эти интегралы можно вычислить аналитически:

$$M_1 = \pi\,(s_1 + s_2), \qquad M_2 = 2\,(A_1 + A_2),$$
$$M_3 = \pi\,(s_1 A_1^2 + s_2 A_2^2)/2, \qquad M_4 = 4\,(A_1^3 + A_2^3)/3. \tag{14}$$

Формулы (14) определяют начальные и конечные значения моментов, когда солитоны разделены. Таким образом, знак первого и третьего моментов зависит от полярностей солитонов. Второй момент, как и четвёртый, всегда положителен.

Чтобы оценить изменение моментов при взаимодействии солитонов, рассмотрим изменение третьего и четвёртого моментов M_3^* и M_4^* в зависимости от отношения амплитуд солитонов. Здесь $M_i^* = (M_{i\,\max} - M_{i\,\min})/M_{i\,0}$. На рис. 4*а*, *г* и 4*б*, *в* зависимости третьих моментов симметричны, а четвёртые моменты одинаковы для соответствующих графиков.

Для однополярных солитонов (рис. 4*а, г*) зависимость моментов от отношения амплитуд немонотонная и, как и ранее, наблюдается смена режимов взаимодействия солитонов. Изменение моментов максимально как раз для солитонов с отношением A_2/A_1, соответствующим переходной зоне, и в этом случае третий и четвёртый моменты могут изменяться на 20 % и 40 % соответственно.

Также на рис. 4*а* для сравнения представлены соответствующие кривые для солитонов уравнения Кортевега—де Вриза, которые лежат немного ниже кривых для солитонов модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза.

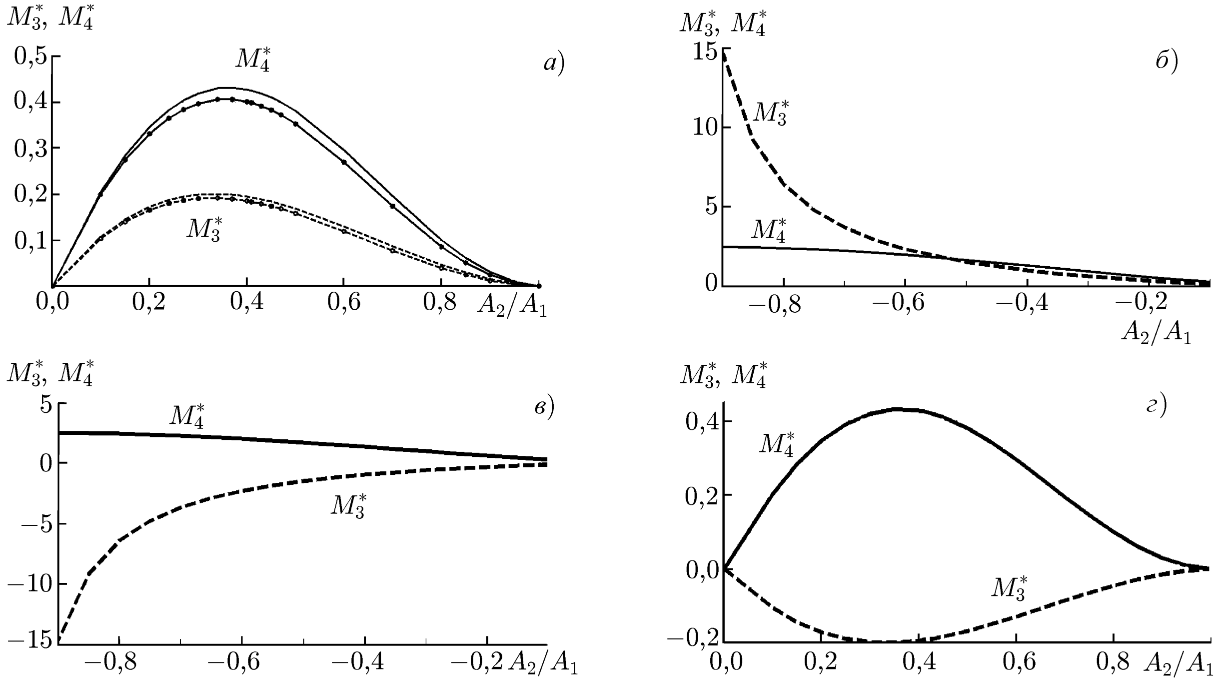


Рис. 4. Зависимость третьего и четвёртого моментов M_3^* и M_4^* от отношения амплитуд солитонов: *а* — положительные солитоны модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза (кривые без точек) и уравнения Кортевега—де Вриза (кривые с точками) с соответствующими амплитудами, *б* — знакопеременные солитоны модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза (больший солитон имеет положительную полярность), *в* — разнополярные солитоны модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза (больший солитон имеет отрицательную полярность), *г* — отрицательные солитоны модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза

В случае взаимодействия разнополярных солитонов характер кривых значительно меняется (рис. 4*б*, *в*). Кривые монотонны, т. к. в данном случае существует только один режим взаимодействия. Важно отметить, что моменты для разнополярных солитонов изменяются весьма существенно, особенно когда амплитуды солитонов близки по модулю.

Таким образом, взаимодействие двух солитонов сильно влияет на моменты волнового поля. Поэтому этот эффект может оказаться важным для понимания природы солитонной турбулентности.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучена динамика двухсолитонного поля в рамках модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза. Детально исследован процесс соударения двух солитонов. Обсуждены возможные режимы взаимодействия солитонов. Вычислены первые четыре момента волнового поля, играющие важную роль в теории турбулентности. Первые два из них являются интегралами движениями для модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза. Показано, что взаимодействие солитонов одинаковой полярности ведёт к уменьшению третьего и четвертого моментов, характеризующих асимметрию и эксцесс волнового процесса (как и в случае уравнения Кортевега—де Вриза). Однако взаимодействие солитонов разной полярности ведёт к увеличению этих моментов солитонного поля. В случае взаимодействия положительных солитонов наибольший вклад в динамику моментов вносят солитоны с отношением амплитуд, лежащим в интервале $0{,}34 < A_2/A_1 < 0{,}43$ (переходный режим между обменным и обгонным взаимодействием), а для знакопеременных солитонов — солитоны с отношением амплитуд, стремящимся по модулю к единице. Отсюда ясно, что двухсолитонные взаимодействия должны сильно влиять на моменты волнового поля. Это обстоятельство является важным фактором для понимания солитонной турбулентности.

Представленные результаты получены в рамках реализации базовой части государственного задания № 2014/133 (Е. Н. Пелиновский). Работа Е. Г. Шургалиной поддержана РФФИ (гранты 14-05-00092, 13-05-90424, 14-05-31415-мол_а, 14-02-00983), а также фондом «Династия» и грантом для молодых кандидатов наук МК-5222.2013.5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
2. Dutykh D., Chhay M., Fedele F. // Comp. Math. and Math. Phys. 2013. V. 53. P. 221.
3. Salupere A., Peterson P., Engelbrecht J. // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. V. 14. P. 1 413.
4. Salupere A., Peterson P., Engelbrecht J. // Math. Comp. Simulation. 2003. V. 62. P. 137.
5. Salupere A., Maugin G. A., Engelbrecht J., Kalda J. // Wave Motion. 1996. V. 123. P. 49.
6. Brocchini M., Gentile R. // Continental Shelf Research. 2001. V. 21. P. 1 533.
7. Dutykh D., Pelinovsky E. // Phys. Lett. A. 2014. V. 378. P. 3 102.
8. Шургалина Е., Пелиновский Е. Динамика случайных ансамблей поверхностных гравитационных волн с приложениями к волнам-убийцам в океане. Saarbrucken: Lampert—Academic Publ., 2012. 119 с.
9. Tasnim I., Masud M. M., Asaduzzaman M., Mamun A. A. // Chaos. 2013. V. 23. Art. no. 013147.
10. Drazin P. G., Johnson R. S. Solitons: an introduction. Cambridge Univ. Press, 1993.
11. Пелиновский Е. Н., Соколов В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 4. С. 378.
12. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. // Nonlinear Processes in Geophysics. 1997. V. 4, No. 4. P. 237.
13. Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D. // J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 1 204.
14. Слюняев А. В. // Журн. экспер. теор. физ. 2001. Т. 19. С. 606.
15. Anco S. C., Ngatat N. T., Willoughby M. // Physica D. 2011. V. 240. P. 1 378.
16. Hasselmann K. // J. Fluid Mech. 1962. V. 12. P. 481.
17. Dyachenko S., Newell A. C., Pushkarev A., Zakharov V. E. // Physica D. 1992. V. 57, No. 1–2. P. 96.
18. Захаров В. Е., Львов В. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 10. С. 1 470.
19. Lvov V. S., Lvov Y. V., Newell A. C., Zakharov V. E. // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 390.
20. Куркин А. А., Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Нижний Новгород, 2004. 158 с
21. Choi Y., Lvov Y. V., Nazarenko S. // Recent Res. Devel. Fluid Dynamics. 2004. V. 5. P. 33.
22. Захаров В. Е. // Журн. экспер. теор. физ. 1971. Т. 60, № 3. С. 993.
23. El G. A., Kamchatnov A. M. // Phys. Rev. Let. 2005. V. 95. Art. no. 204101.
24. El G. A., Krylov A. L., Molchanov S. A., Venakides S. // Physica D. 2005. V. 152–153. P. 653.
25. El G. A., Kamchatnov A. M., Pavlov M. V., Zykov S. A. // J. Nonlin. Sci. 2011. V. 21. P. 151.
26. Пелиновский Е. Н., Шургалина Е. Г. // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6. С. 78.
27. Pelinovsky E. N., Shurgalina E. G., Sergeeva A. V., et al. // Phys. Lett. A. 2013. V. 377, No. 3–4. P. 272.

28. Lax P. D. // Commun. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 467.
29. Clarke S., Grimshaw R., Miller P., et al. // Chaos. 2000. V. 10. P. 383.
30. Zakharov V .E. // Stud. Appl. Math. 2009. V. 122. P. 219.

Поступила в редакцию 8 ноября 2013 г.; принята в печать 17 октября 2014 г.

TWO-SOLITON INTERACTION WITHIN THE FRAMEWORK OF THE MODIFIED KORTEWEG–DE VRIES EQUATION

E. N. Pelinovsky and E. G. Shurgalina

Interaction of two heteropolar solitons is studied within the framework of the modified Korteweg–de Vries equation. Three types of soliton interaction are considered, i.e., exchanging and overrunning (for positive solitons) and absorbing–radiating (for heteropolar solitons). The soliton-interaction peculiarities are studied in detail. Since the soliton interaction is an elementary soliton-turbulence act, the wave-field moments from the first to the fourth inclusively, which are usually considered in the turbulence theory, are studied. It is shown that during interaction of unipolar solitons, the third and the fourth wave-field moments, which determine the coefficients of asymmetry and excess in the turbulence theory decrease, whereas these moments for the heteropolar solitons increase. The obtained results are compared with the estimates of two-soliton interaction within the framework of the Korteweg–de Vries equation.