

Голубин Алексей Юрьевич,
кандидат физико-математических наук,
доцент, Высшая школа экономики

Golubin Alexey Y.,
Candidate of Physico-mathematical Sciences,
Docent, Higher School of Economics

Апарина (Петрова) Мария Николаевна,
аспирантка, Московский институт
электроники и математики НИУ
"Высшая школа экономики"

Aparina (Petrova) Maria N.,
Postgraduate Student,
Higher School of Economics

Оптимизация размера премии с учетом кривой спроса на страховые услуги*

Optimizing the size of insurance premium under a given demand function

В статье получено аналитическое решение задачи минимизации собственного капитала страховщика и задачи максимизации экспоненциальной полезности его финального капитала, при этом инструментом управления риском выступает выбор размера премии (страхового взноса) с учетом заданной кривой спроса на страховые услуги. Рассмотрена типичная для микроэкономического анализа степенная функция спроса. Полученные результаты проиллюстрированы численным примером для рынка автострахования каско, где кривая спроса построена на основе реальных данных.

Ключевые слова: страхование; коэффициент нагрузки; ожидаемая полезность; кривая спроса.

The article provides analytical solutions to the following problems: minimization of initial insurer's capital under a given ruin probability and maximization of expected utility of the final insurer's capital. In both cases the insurer can varies the premium size under a prescribed demand function, that is assumed to be either linear or hyperbolic type. The results are illustrated by an example for the case automobile insurance CASCO, based on real data.

Keywords: insurance; loading coefficient; expected utility; demand function.

Введение

Рассматривается модель страхового рынка, состоящего из страховщика и группы из n клиентов, или, другими словами, так называемая модель индивидуального риска (см., например, [1]). Потенциальные ущербы (риски) клиентов — независимые неотрицательные случайные величины $X_j, j = 1, \dots, n$, определенные на одном вероятностном пространстве (Ω, F, P) . В дальнейшем эта группа клиентов предполагается однородной: все X_j имеют одинаковое распределение

$F_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} P\{X_j \leq x\}$. Финальный капитал страховщика на конец страхового периода есть случайная величина $w + D - \sum_{j=1}^n X_j$, где w — начальный (детерминированный) капитал, $D = nd$ — суммарный взнос (премия) от клиентов и $X = \sum_{j=1}^n X_j$ — суммарный риск страховщика, функцию распределения которого будем обозначать через $F(x)$. Финансовое положение страховой компании в вероятностном смысле полностью описывается ее рискованной ситуацией [2], т.е. тройкой $(w, D, F(x))$. Пусть величина индивидуального взноса (премии)

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 15-07-01274 а.

определяется широко известным в литературе [1–3] принципом среднего значения, $d = (1 + \alpha)EX_1$, где $\alpha > 0$ – заданный коэффициент нагрузки.

Предположим также, что известна количественная зависимость числа клиентов n от цены полиса d – по существу, известная в микроэкономике кривая спроса на рыночный продукт, который в данном случае является предлагаемыми страховыми услугами. Понятия и методы моделирования ценообразования, применяющиеся в микроэкономическом анализе, распространяются и на рынок страхования, с учетом, конечно, вероятностной природы актуарных моделей. Некоторые вопросы построения и анализа кривых спроса на российских страховых рынках освещены в [4, 5].

Целью данной работы является решение задачи выбора страховщиком цены полиса (т.е. размера взноса d), которая в определенном смысле оптимизировала бы его рисковую ситуацию с учетом имеющейся кривой спроса $n(d)$. Будут рассмотрены два критерия оптимальности: 1) минимизируется собственный капитал страховщика, необходимый для обеспечения заданной вероятности неразорения, при этом отдельно исследуется случай нормальной модели суммарного риска страховщика; 2) исследуется задача максимизации экспоненциальной полезности финального капитала страховщика. В обоих случаях используется достаточно типичная для микроэкономического анализа степенная функция спроса. Полученные результаты проиллюстрированы численным примером для рынка автострахования каско, где кривая спроса построена на основе реальных данных ООО СК «Цюрих» с помощью программного комплекса, разработанного одним из авторов статьи.

Минимизация объема собственных средств выбором коэффициента нагрузки

Рассмотрим ситуацию, когда страховщик контролирует тарифы – т.е. цену страхового полиса d – посредством коэффициента нагрузки, который входит в формулу среднего значения $d = (1 + \alpha)M_1$, где $M_1 = EX_1$. Целью является решение задачи минимизации объема собственных средств выбором коэффициента нагрузки α при заданной надежности, или, иными словами, вероятности неразорения $\beta \in (0, 1)$. Напомним (см., например, [2, 3]), что вероятность неразорения есть $P\{w + d \geq \sum_{j=1}^{n(\alpha)} X_j\}$, а минимальный собственный капитал, обеспечивающий заданную надежность,

равен $w_*(\alpha) = \min w : P\{w + d \geq \sum_{j=1}^{n(\alpha)} X_j\} \geq \beta$.

Здесь предполагается известной зависимость числа клиентов $n = n(\alpha)$ от коэффициента нагрузки α который можно менять в заданном диапазоне¹ $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$. Требуется определить параметры страхования (w_*, α^*) , обеспечивающие заданный уровень надежности β при минимальном объеме собственных средств.

Решение. Если обозначить через $x_\beta(\alpha)$ β -квантиль распределения $F_\alpha(x)$ суммарного риска $X_\alpha = \sum_{i=1}^{n(\alpha)} X_i$ и через $M(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} EX_\alpha$, то легко видеть, что исходная задача сводится к одномерной задаче минимизации:

$$w_*(\alpha) \equiv x_\beta(\alpha) - (1 + \alpha)M(\alpha) \rightarrow \min, \quad \alpha \in [\alpha^-, \alpha^+].$$

Найденная точка минимума α^* вместе с $w_* = w_*(\alpha)$ дает искомые параметры страхования.

Отметим, что в силу закона спроса функция $n(\alpha)$ убывает по α , тогда легко видеть, что квантиль $x_\beta(\alpha)$ и среднее $M(\alpha)$ – невозрастающие функции и минимум разности в (1) может достигаться как в граничной, так и во внутренней точке допустимого интервала. Помимо определения вида функции $n(\alpha)$, основную трудность здесь представляет нахождение зависимости квантиля $x_\beta(\alpha)$ распределения X_α от α . Для достаточно больших значений $n(\alpha)$ возможно применение нормальной либо сложно-пуассоновской аппроксимации для ф.р. $F_\alpha(x)$ (см., например, [2 и 3]). В ситуациях, когда проверка условий их применимости затруднена, значения $x_\beta(\alpha)$ в фиксированных точках a_k могут быть вычислены с помощью метода Монте-Карло моделированием реализаций с.в. X_α . Ниже мы будем использовать степенную функцию спроса $n(\alpha) = A\alpha^{-r}$ (где параметры $r, A > 0$), она является одной из стандартных функций спроса для микроэкономического анализа (рис. 1).

Случай нормально распределенного риска.

Пусть для однородной группы клиентов используется нормальная модель суммарного риска, т.е. X_α распределен нормально с параметрами $n(\alpha)M_1$ и $n(\alpha)\sigma_1^2$, где через σ_1^2 обозначена дисперсия индивидуального риска X_1 , $n(\alpha)$ – число клиентов, которое определяется как степенная функция от

¹ Более привычной с точки зрения микроэкономического анализа является зависимость не $n(\alpha)$, а $n(d)$ – функция от цены полиса, т.е. от размера взноса d . Но поскольку $d = (1 + \alpha)M_1$ и страховщик контролирует именно коэффициент нагрузки, а не средний ущерб клиента M_1 , то оптимизация по α на некотором заданном интервале $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$ очевидным образом равносильна оптимизации на интервале $d \in [(1 + \alpha^-)M_1, (1 + \alpha^+)M_1]$.

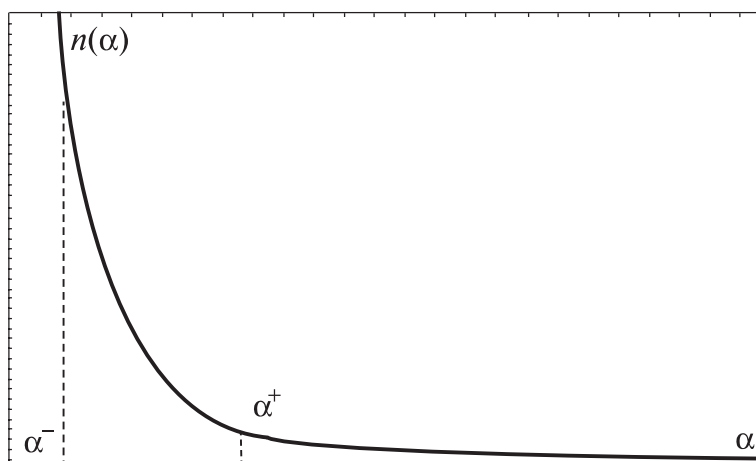


Рис. 1. Степенная функция спроса от коэффициента нагрузки

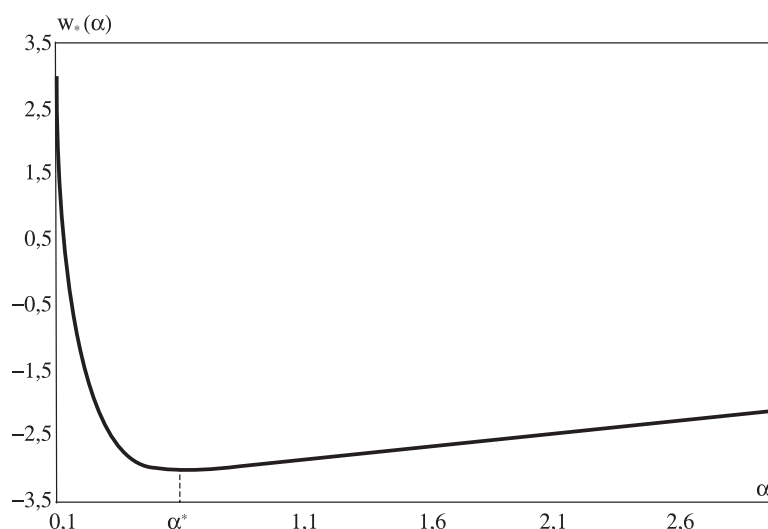


Рис. 2. Зависимость объема собственных средств от коэффициента нагрузки при степенном спросе в случае $1 < r < 2$ (здесь $n(\alpha) = 9\alpha^{-1,6}$, $M_1 = \sigma_1 = 1$, $\beta = 0,98$)

коэффициента нагрузки, $n(\alpha) = A\alpha^{-r}$, $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$, где $r, A > 0$. Требуется найти начальный капитал и коэффициент нагрузки (w_*, α^*) , обеспечивающие заданный уровень надежности β при минимальном объеме собственных средств.

Решение. В данном случае мы легко можем найти явное выражение для квантиля $x_\beta(\alpha)$. Действительно, учитывая, что среднее и стандартное отклонение суммарного риска равны соответственно $M(\alpha) = n(\alpha)M_1$ и $\sigma(\alpha) = \sqrt{n(\alpha)}\sigma_1$, и переходя в задаче (1) к β -квантилю стандартного нормального распределения $x_\beta^N = (x_\beta(\alpha) - M(\alpha))/\sigma(\alpha)$, получим, что целевая функция в (1) имеет вид

$$w_*(\alpha) = x_\beta^N \sigma_1 \sqrt{n(\alpha)} - M_1 a n(\alpha).$$

После подстановки выражения для $n(\alpha)$ исследуем поведение целевой функции. Обозначая через $\rho = x_\beta^N \sigma_1 / (M_1 \sqrt{A})$, после дифференцирования получим

$$w_*'(\alpha) = -M_1 A \alpha^{-r} (1 - r + \frac{\rho r}{2} \alpha^{(r-2)/2}).$$

Рассмотрим различные предположения о параметре r функции спроса.

Пусть сначала $1 < r < 2$. В этом случае $w_*(\alpha)$ имеет единственную точку минимума на $(0, \infty)$, как показано на рис. 2. Действительно, $1 - r + \frac{\rho r}{2} \alpha^{(r-2)/2}$ убывает от ∞ до $1 - r < 0$ с ростом α . Тогда выражение для производной имеет вид $w_*'(\alpha) = \varphi(\alpha) \theta(\alpha)$ где функция $\varphi(\alpha) < 0$ и $\theta(\alpha)$ убывает на $(0, \infty)$. Поэтому (см. [2, с. 34]), $w_*(\alpha)$ относится к так

называемым унимодальным вниз функциям и единственный корень уравнения $w'_*(\alpha) = 0$, т.е. точка

$$\alpha^0 = \left[\frac{pr}{2(r-1)} \right]^{2/(2-r)}$$

доставляет минимум $w'_*(\alpha)$ на $(0, \infty)$. Нетрудно видеть, что решение задачи минимизации на отрезке $[a^-, a^+]$ есть

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha^-, & \text{при } \alpha^0 \leq \alpha^- \\ \alpha^0, & \text{при } \alpha^- < \alpha^0 < \alpha^+ \\ \alpha^+, & \text{при } \alpha^0 \geq \alpha^+. \end{cases}$$

Если же $0 < r \leq 1$ или $r \geq 2$, то решение рассматриваемой задачи минимизации (1) есть одна из крайних точек отрезка $[\alpha^-, \alpha^+]$, поскольку при этих предположениях $w'_*(\alpha)$ либо монотонно убывает (первый случай), либо унимодальна вверх. Поэтому

$$\alpha^* = \operatorname{argmin}\{w'_*(\alpha) \mid \alpha = \alpha^-, \alpha^+\}.$$

Можно сказать, что для «пологой» кривой спроса $n(\alpha) = A\alpha^{-r}$ с $0 < r \leq 1$ следует выбирать максимально возможный коэффициент нагрузки $\alpha^* = \alpha^+$. Если показатель степени r растет, или, в терминах теории спроса, возрастает эластичность² $e(\alpha)$ спроса по коэффициенту нагрузки, которая в данном случае $e(\alpha) \equiv r$, то оптимальное α^* будет принимать промежуточные значения. Наконец, при больших $r \geq 2$ оптимальное значение σ^* будет совпадать с одной из граничных точек α^-, α^+ . Отметим также, что в случае внутренней оптимальной точки $\alpha^* = \alpha^0$ возрастание коэффициента вариации σ_1/M_1 индивидуального ущерба, т.е. «ухудшение» риска клиента, влечет увеличение оптимального коэффициента нагрузки, т.е. уменьшение объема $n(\alpha^*)$ общего портфеля рисков.

Максимизация полезности без учета вероятности разорения

Теперь будем считать критерием оптимальности ожидаемую полезность финального капитала $Eu(w + D_d - X_d)$, где функция полезности страховщика экспоненциальна, $u(y) = -\exp(-cy)$ (здесь $c > 0$ – заданный параметр, равный [2] показателю неприятия риска страховщика). Такой тип функции полезности является одним из наиболее широко используемых в теории риска и математической теории страхования [2, 3], он соответствует «осторожному» страховщику, имеющему постоянное неприятие риска $c > 0$. На этот раз управляемым параметром будет сама цена полиса

(взнос клиента) d , которая может варьироваться страховщиком на множестве $[d^-, d^+]$. Суммарный взнос есть (детерминированная) величина, равная $D_d = n(d)d$, где $n(d)$ – положительный параметр, имеющий смысл спроса на страховой продукт, от которого параметрически зависит и распределение суммарного риска $X_d = \sum_{i=1}^{n(d)} X_i$ рассматриваемой однородной группы клиентов. Если бы страховщик был заинтересован только в увеличении «выручки» $n(d)d$, то, например, при линейном спросе $n(d) = -Ad + B$ оптимальная цена была бы вершиной параболы $d^0 = B/(2A)$. Но от $n(d)$ зависит также ущерб X_d , причем увеличение $n(d)$ (т.е. уменьшение d , поскольку $n(d)$ убывает с ростом d) приводит к «худшему» X_d с большим числом слагаемых и наоборот. Поэтому естественно ожидать, что оптимальная цена d^* будет смещена вправо от «примитивного» оптимума d^0 максимизирующего $n(d)d$. Величина этого смещения будет зависеть как от вида функции спроса, так и от распределения индивидуального риска X_1 . Итак, рассматриваемая задача:

$$J(d) \equiv -E\{\exp(-c[w + n(d)d - X_d])\} \rightarrow \rightarrow \max, d \in [d^-, d^+].$$

Легко видеть, что оптимальное значение d^* не будет зависеть от начального капитала w , поскольку в максимизируемой экспоненциальной полезности $J(d)$ от w зависит только множитель $\exp(-cw) > 0$. Ниже мы приведем решение этой задачи предполагая, что спрос есть степенная функция $n(d) = Ad^{-r}$, где $r > 0, A > 0$.

Решение. Учитывая независимость X_i , после логарифмирования $J(d)$ получаем эквивалентную (2) задачу минимизации:

$$L(d) \equiv n(d)\mu - dn(d) \rightarrow \min, d \in [d^-, d^+], \quad (3)$$

где $\mu \stackrel{\text{def}}{=} c^{-1} \ln E \exp(cX_1) > 0$, причем предполагается, что ущерб клиента имеет конечный экспоненциальный момент $E \exp(cX_1)$.

При дифференцируемой $n(d)$ производная $L'(d)$ равна

$$L' = n'(d)\mu - (n(d) + dn'(d)).$$

После подстановки степенной функции спроса $n(d)$ в $L'(d)$ получаем

$$L'(d) = -Ard^{-r-1}[\mu - d(r-1)/r].$$

1. Пусть $0 < r \leq 1$. Как легко видеть, $L'(d) < 0$ и $d^* = d^+$ – как и в задаче (3) минимизации объема собственного капитала.

2. Пусть $r > 1$. Так как сомножитель в квадратных скобках есть убывающая функция от d , то (см. выше) $L(d)$ унимодальна вниз на $[0, \infty]$. Един-

² Напомним, что в микроэкономической теории эластичностью функции спроса $n(\alpha)$ в точке α называют отношение $e(\alpha) = |n'(\alpha)\alpha/n(\alpha)|$ которое имеет смысл модуля процентного приращения спроса $|\Delta n/n(\alpha)|$ на один процент приращения аргумента $\Delta\alpha/\alpha$.

ственное решение уравнения $L'(d) = 0$ на этом интервале равно

$$d' = \frac{r}{r-1} \mu, \quad (4)$$

поэтому единственной точкой минимума $L(d)$ (а значит, точкой максимума $J(d)$) на $[d^-, d^+]$ будет

$$d^* = \begin{cases} d^-(d^+), & \text{при } d' \leq d^-(\geq d^+) \\ d', & \text{при } d^- < d' < d^+. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь стационарная точка d' , определяющая оптимальное значение d^* , монотонно убывает при возрастании показателя степени r (т.е. эластичности спроса). Такое поведение страховщика — который имеет в данном случае «осторожную» экспоненциальную функцию полезности — отражает его опасения потерять значительную при эластичном спросе долю клиентов $[n(d) - n(d_1)]/n(d)$ с повышением цены до уровня d_1 , в то время как распределение риска $F_d(x)$ улучшится для него лишь в незначительной степени.

Пример максимизации полезности страховщика по страховому продукту каско

Здесь мы рассмотрим пример решения задачи (2) максимизации экспоненциальной полезности для страховщика, действующего на определенном сегменте страхового рынка и предлагающего один из достаточно востребованных страховых продуктов — автокаска.

Первой задачей, которую необходимо решить, является построение кривой спроса $n(d)$. Ниже схематично описывается такая методика, основанная на анализе имеющихся у страховой компании экспериментальных данных и группировке клиентов по различным признакам, таким как марка и модель автомобиля, год выпуска, возраст страхователя, стаж вождения, наличие противоблокирующей системы. Учитывается также присутствие на рынке десяти основных конкурентов компании с их фиксированными тарифами. (Конкуренты — 10 лидеров по собранной премии каска в выбранном регионе за отчетный период. Для определения этих топ-лидеров можно использовать открытый источник: данные Федеральной службы по финансовым рынкам.)

Сначала вычисляются вероятности, т.е. частоты попадания клиентов в выделенные группы или категории. Для клиентов каждой категории оценивается вероятность привлечь такого клиента выбранным тарифом, при этом учитываются процентные отклонения этого тарифа от тарифов конкурентов. Меняя значения премии

$d_k = y_k d_{cp}$, $k = 1, \dots, K$, где $Y_k > 0$ выбираемые пропорции к известному на рынке среднему тарифу d_{cp} , мы получаем ряд точек зависимости $p(d)$ — доли рынка в процентах, которую заберет компания, если ее тариф равен d . Затем на интервале возможного изменения тарифа $[d^-, d^+]$ выбираем функцию из арсенала стандартных функций спроса, график которой проходит наиболее близко к построенным точкам. В результате искомая кривая спроса имеет вид $n(d) = n_0 p(d)$, где n_0 — общее количество клиентов на рассматриваемом сегменте рынка.

Такой вид исследования спроса сразу на крупном сегменте рынка представляется актуальным для деятельности страховых компаний, поскольку часто требуется изменить тариф не на какие-то отдельные модели автомобилей, а сразу на все тарифы каска по городу, например из-за инфляции или каких-либо управленческих решений.

Используя описанную методику, были построены кривые спроса на каско-страхование для нескольких крупных городов Российской Федерации. Оказалось, что для различных городов результаты несколько отличаются, однако характерна нелинейная (убывающая) зависимость, которая достаточно хорошо описывается степенной функцией $n(d) = Ad^{-r}$, где $r > 0$, $A > 0$. В зависимости от города меняются параметры кривой: r и A .

Приведем один конкретный пример — для выбранного филиала одной из известных страховых компаний. Найденная на основе эмпирических данных функция спроса выглядит следующим образом:

$$n(d) = n_0 1,158 e^{-14} d^{-12}; \quad d \in [0.1, 20],$$

(здесь и ниже величина страховой премии d измеряется в условных денежных единицах), где n_0 — общее количество клиентов на рассматриваемом сегменте рынка автострахования. Как было показано выше, значение n_0 входящее в коэффициент A функции спроса Ad^{-r} не влияет на величину оптимального тарифа d^* . Далее заметим, что параметр кривой спроса $r = 12 > 1$, поэтому при определении оптимального тарифа используем выражение (5). Для нахождения значения коэффициента неприятия риска σ в функции полезности страховщика воспользуемся методикой, приведенной в [2] (п. 2.5 и Прил. 2), где страховщик определяет денежные эквиваленты предлагаемых

случайных выигрышей. Для получения оценки экспоненциального момента $E \exp(cX_1)$ входящего (см. (4)) в выражение для $\mu \stackrel{\text{def}}{=} c^{-1} \ln E \exp(cX_1)$, воспользуемся известной прошлой статистикой об индивидуальных ущербах (в усл. ден. ед.). Тогда выборочный экспоненциальный момент равен $N^{-1} \sum_{i=1}^N \exp(cx_i)$, где N – количество наблюдений (клиентов). В результате определяем численное значение $\mu = 6.01$. Тогда из (5) находим значение оптимального размера премии

$$d^* = \frac{12}{11} \mu = 6.55.$$

С учетом известного среднего тарифа $d_{cp} = 9.1$ на этом сегменте рынка можно сделать следующий вывод: для того чтобы максимизировать ожидаемую полезность, страховщику необходимо

снизить существующий средний тариф d_{cp} на 28,1%.

Литература:

1. Голубин А.Ю., Гридин В.Н., Газов А.И. Оптимизация дележа риска в статической модели с перестрахованием // Автоматика и телемеханика. 2009. Т. 70, № 8. С. 133–144.
2. Голубин А.Ю. Математические вопросы управления риском в базовых моделях страхования. М.: Анкил, 2013.
3. Иванов С.С., Голубев С.Д., Черная Л.А. Теория и практика рискового страхования. М.: Анкил, 2007.
4. Браверман А. Маркетинг в российской экономике переходного периода: методология и практика. М.: ОАО «Экономика»: ТОО «Комаркт Лтд», 1997.
5. Зубец А.Н. Страховой маркетинг в России. М.: Центр экономики и маркетинга, 1999.



Подробно рассмотрены социология денег и их социокультурные функции, деньги как фактор дезинтеграции и катализатор отчуждения как «ничто» (отчужденные социокультурные формы как предпосылка глобализации; в социальной коммуникации; архаичные и символические рыночного обмена; «семиотические» виртуальной глобальной экономики постмодерна и т.д.).

В отдельных главах показано: развитие мифологии денег от модерна к постмодерну (социосемиотическая природа буржуазного мифа денег рынка, особенности буржуазного рыночного мифа денег в русской культуре XIX — XX вв., постмодернистский миф денег в современной российской культуре, влияние денег на трансформации рациональности, деньги как фактор социальной эмансипации, виртуальные и электронные деньги и т. д.); влияние денег на социальное конструирование времени и пространства, неинструментальное циклическое время традиционного общества и т. д.

Особое внимание уделено проблеме деньги и культура богатства (символическое содержание богатства и его демонстрация как составляющая его культуры, легитимация богатства, рост отчуждения богатых и бедных, виртуальные деньги, глобальные финансы и трансформация культуры богатства).