

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ЛЕСА

ЛЕСНОЙ ВЕСТНИК

Научно-информационный журнал

2013 г. № 3(95)

**Координационный
совет журнала**

Главный редактор
А.Н. ОБЛИВИН

Зам. главного редактора
В.Д. НИКИШОВ

Члены совета
В.В. АМАЛИЦКИЙ
М.А. БЫКОВСКИЙ
В.И. ЗАПРУДНОВ
Н.И. КОЖУХОВ
А.В. КОРОЛЬКОВ
В.А. ЛИПАТКИН
Е.И. МАЙОРОВА
М.Д. МЕРЗЛЕНКО
А.К. РЕДЬКИН
А.А. САВИЦКИЙ
Ю.П. СЕМЕНОВ
Д.В. ТУЛУЗАКОВ
В.А. ФРОЛОВА
В.С. ШАЛАЕВ
А.А. ДАШКОВ

Ответственный секретарь
Е.А. РАСЕВА

Редактор
В.Б. ИВЛИЕВА
Набор и верстка
М.А. ЗВЕРЕВ
Электронная версия
Н.К. ЗВЕРЕВА

Журнал издается при поддержке
Научно-образовательной
ассоциации лесного комплекса

Журнал зарегистрирован Министерством
РФ по делам печати, телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-12923 от 17.06.2002

Журнал входит в перечень утвержденных
ВАК РФ изданий для публикации трудов соискателей
ученых степеней

Материалы настоящего журнала могут быть
перепечатаны и воспроизведены полностью или
частично с письменного разрешения издательства.

Редакция журнала принимает к рассмотрению не публиковавшиеся ранее статьи объемом 5–10 страниц, включая рисунки и таблицы. Требования к представлению материалов приведены в конце номера.

Рукописи, не соответствующие указанным требованиям, не принимаются; статьи, отклоненные редакцией, не возвращаются.

© ГОУ ВПО МГУЛ, 2013

Подписано в печать 25.04.2013.
Тираж 500 экз.
Заказ № 188
Объем 31,75 п. л.

Издательство Московского государственного университета леса
141005, Мытищи-5, Московская обл.,
1-я Институтская, 1, МГУЛ. (498)687-41-33
les-vest@mgul.ac.ru

Губанова Н.В. Моделирование процесса пропитки древесины жидкостью	134
Липилин А.Б., Векслер М.В., Коренюгина Н.В., Морозов А.М., Кононов Г.Н., Косарев К.Л., Кудряшов А.В. Тонкий помол и сушка древесного сырья в вихревой мельнице-нагревателе	139
Федотов Г.Н., Шалаев В.С. Использование коллоидно-химической модели для анализа процессов высушивания-увлажнения почв	144
Лесоинженерное дело	
Афоничев Д.Н., Рыбников П.С. Оптимизация в системе автоматизированного проектирования параметров размещения лесовозных усов и погрузочных пунктов на лесосеках	150
Рукомойников К.П. Имитационное моделирование взаимосогласованной работы комплексов адаптивно-модульных лесных машин	154
Рукомойников К.П. Разработка программного обеспечения к созданию рациональной технологической карты поквартального освоения участков лесного фонда	159
Ширнин Ю.А., Ширнин А.Ю. Моделирование энергозатрат систем машин при комбинированной трелевке древесины	166
Клубничкин Е.Е., Макуев В.А., Клубничкин В.Е. Определение нагруженности ходовой системы многооперационной лесосечной машины	175
Павлов А.И., Лощенко П.Ю. Способ диагностирования гидроцилиндров лесных машин в функциональном режиме	178
Математическое моделирование	
Афанасьев А.С., Комаров Е.Г., Полушкин В.М. Алгоритмическое обеспечение контроля виброустойчивости микроэлектромеханических преобразователей линейного ускорения	181
Лось А.Б. О предельном распределении числа достижений заданного уровня процессом скользящего суммирования	184
Малолепная Н.Э. Нечеткая регрессионная модель для частного случая интервальных нечетких чисел второго типа	190
Грязнов Я.А. Математическая модель отсека канальной поверхности, заданной дискретным каркасом образующих	193
Усачев М.С., Дорошенко В.А. Математическое описание компоновки распределенных систем управления с оценкой структурной избыточности и сложности	196
Горячевский В.С. Об одном способе конструирования оси динамического трубопровода	202
Экономика	
Нарышкин А.А., Тюрин А.Е. Особенности функционирования неоконсервативной модели экономики на примере лесопромышленного кластера Финляндии	205
Смирнов Д.А., Федотов А.А., Угрюмов С.А. Обоснование экономической эффективности производства древесно-стружечных плит на основе фурановых олигомеров	211
Шкляев Л.О., Трегуб А.В., Трегуб И.В. Сравнительный анализ моделей оценки кредитного риска эмитента корпоративных облигаций на российском долговом рынке	215
Иванов Г.С., Охотников Д.В. Исследование товаро- и нектаропродуктивности липняков методами математической статистики	222
Вопросы образования	
Чувашев А.П., Иванов Г.С. К обоснованию постановки курса «инженерная геометрия»	225
Шимон Т.Н. Конвергенция экономических знаний и экологического сознания для повышения эффективности образовательного процесса на всех уровнях профессиональной подготовки	228
Ридигер О.Н. Инновационные технологии экологического воспитания: семья и школа в лесной рекреации	231
Никишов В.Д., Мерзленко М.Д. Жизнь на службе большой науке к 85-летию со дня рождения Е.С. Мизуновой	236

4. Гиттис, Э.И. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. Изд. 3-е / Э.И. Гиттис. – М.: Энергия, 1975. – 448 с.
5. Хлистунов, В.Н. Основы цифровой электроизмерительной техники и цифровые преобразователи / В.Н. Хлистунов. – М.-Л.: Энергия, 1966. – 345 с.
6. ГОСТ 8.207-76. ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения.
7. ГОСТ 8.011-72. ГСИ. Показатели точности измерений и форма представления результатов измерений.
8. Алексеев, В.В. Интегральная оценка точностных возможностей микроэлектромеханических преобразователей линейных ускорений / В.В. Алексеев, Ю.В. Ковганич, В.М. Полушкин, С.П. Тимошенков // Матер. всероссийской научно-технической конф. «Новые технологии в научных исследованиях, проектировании, управлении, производстве, космической механотронике», г. Воронеж, 2011 г.
9. Домрачев, В.Г. Цифровые преобразователи угла. Принципы построения, теория точности, методы контроля / В.Г. Домрачев, Б.С. Мейко – М.: Энергоатомиздат, 1984.

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ДОСТИЖЕНИЙ ЗАДАННОГО УРОВНЯ ПРОЦЕССОМ СКОЛЬЗЯЩЕГО СУММИРОВАНИЯ

А.Б. ЛОСЬ, доц. каф. компьютерной безопасности МИЭМ НИУ ВШЭ, канд. техн. наук

alexloss@miem.edu.ru

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_N$ – (1) последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, принимающих значение 1 и 0 с вероятностями p и q соответственно, $p + q = 1$,

$$\xi_t(n) = X_1 + X_2 + \dots + X_{t+n-1}, \quad t = 1, 2, \dots$$

процесс скользящего суммирования, порожденный последовательностью (1).

Исследованию характеристик процесса $\xi_t(n)$ посвящено довольно много работ в научной литературе [1–5].

В настоящей работе получены условия сходимости числа достижений заданного уровня процессом $\xi_t(n)$ за время $N-n+1$, к закону Пуассона и нормальному закону, а также исследовано предельное распределение времени первого достижения процессом $\xi_t(n)$ заданного уровня m .

Введем индикаторы $v_t(n, m)$ достижения процесса $\xi_t(n)$ заданного уровня m , полагая

$$v_1(n, m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_1(n) \geq m \\ 0, & \text{если } \xi_1(n) < m \end{cases}$$

$$v_t(n, m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_{t-1}(n) < m, \xi_t(n) = m \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$t = 2, 3, \dots;$

Положим также

$$\eta_N(n, m) = \sum_{t=1}^{N-n+1} v_t(n, m)$$

– число достижений заданного уравнения m процессом $\xi_t(n)$ за время $N-n+1$, $\tau(n, m) = \min(N | \eta_N(n, m) > 0)$ – время первого достижения заданного уровня m процессом $\xi_t(n)$.

Заметим, что случайная величина $\tau(n, m)$ изучалась в работе [6], где получена двусторонняя оценка вероятности $p\{\tau(n, m) > N\}$. В [7] для вычисления вероятности $p\{\tau(n, m) > N\}$ предложена приближенная формула.

Далее, где это не вызовет путаницы, будем опускать индексы n и m в обозначении индикаторов $v(n, m)$.

Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения

$$C(n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad D(n, m) = \sum_{k=m}^n C(n, k),$$

$$\lambda = E \eta_N(n, m) = D(n, m) + (N-n) C(n-1, m-1) \cdot p \cdot q,$$

$$x = p^2 \cdot q^2 \sum_{s=0}^{m-2} \sum_{k=m-s+1}^{n-s} C(n-k, s) \times$$

$$\times C(k-2, m-s-1) \cdot C(k-2, m-s-2).$$

Везде далее предполагается, что

$$\binom{n}{k} = 0$$

при $k > n$ или $n < 0$ и

$$\binom{k}{0} = 1$$

при $k \geq 0$.

Теорема 1. Пусть при $N, n, m \rightarrow \infty$ величина p ($p \leq p_0 < 1$) изменяется так, что

$$\lambda \cdot e^{-\lambda} / m \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$(n-m) \cdot p = O(1). \quad (3)$$

Тогда, если $\lambda \rightarrow \infty$, то равномерно по значениям $k = 0, 1, 2, \dots, 2[\lambda]$

$$p\{\eta_N(n, m) = k\} = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k! \cdot (1 + o(1)) \quad (4)$$

случайная величина $\eta_N(n, m)$ распределена асимптотически нормально с параметром λ, λ .

Если $\lambda \rightarrow \lambda_0, \lambda_0 = \text{const}$, то $\eta_N(n, m) \rightarrow e^{\lambda_0(z-1)}$.

Вначале докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть при $N, n, m \rightarrow \infty$ величина p ($p \leq p_0 < 1$) величина p изменяется так, что $\lambda \geq C > 0, C = \text{const}$, и выполняется условие (3). Тогда

1) $n \cdot m^t / N \rightarrow 0$ при любом $t < \infty$,

2) $(N-n) \cdot x = O(\lambda/m)$.

Доказательство леммы. Для доказательства утверждения 1) рассмотрим два случая.

а) Пусть $m/n \rightarrow 1$.

Обозначим $h = n - m$ и рассмотрим величину $\delta = n \cdot m^t \cdot C(n-1, m-1) \cdot p \cdot q$.

Поскольку

$$\binom{n-1}{m-1} \leq \frac{n^h}{h!},$$

то $\delta \leq n^{t+1+h} \cdot p^m / h!$

Учитывая, что $h! \geq h^h \cdot e^{-h}$, а также, что $h/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получаем $\delta \leq n^{t+1+h} \cdot p^m / h! = \exp\{(t+1) \cdot \ln n - h \cdot \ln(h/n) + (n-h) \cdot \ln p\} = \exp\{n[(t+1) \cdot n^{-1} \ln n - h/n \cdot \ln h/n + h/n + (1-h/n) \ln p]\} = \exp\{n \cdot \ln p \cdot (1 + o(1) + o(1))\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Отсюда следует, что $\delta = n \cdot m^t \cdot C(n-1, m-1) \cdot p \cdot q \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Поскольку $\lambda = D(n, m) + (N-n) \cdot C(n-1, m-1) \cdot p \cdot q \geq c > 0$, то $\delta / \lambda \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как в условиях леммы $m \rightarrow \infty$, то в силу (3) и неравенства $q \geq 1 - p, p_0 = \text{const}, p_0 < 1$ справедливо соотношение

$$D(n, m) = C(n, m) \times \left(1 + \sum_{k=1}^m \frac{(n-m) \dots (n-m-k+1)}{(m+1) \dots (m+k)} \left(\frac{p}{q}\right)^k\right) = C(n, m) (1 + o(1)).$$

Поэтому, $\lambda = (N-n + n/mq) \cdot C(n-1, m-1) \cdot p \cdot q \cdot (1 + o(1))$, и, следовательно, $n \cdot m^t / (N-n + n/(m \cdot q)) \rightarrow 0$ при $N, n, m \rightarrow \infty$, откуда следует утверждение 1) леммы в случае а).

б) $m/n \rightarrow \gamma < 1$.

Нетрудно видеть, что в этом случае условие $(n-m) \cdot p = o(1)$ эквивалентно условию $n \cdot p = o(1)$.

Поскольку

$$\binom{n-1}{m-1} \leq \frac{n^{m-1}}{(m-1)!},$$

то $n \cdot m^t \cdot (N-n) \cdot C(n-1, m-1) \cdot p \cdot q \leq m^t \cdot (np)^t / (m-1)! \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Отсюда с учетом сделанных выше замечаний следует справедливость утверждения 1) леммы в случае б). Утверждение 1) леммы доказано. Докажем утверждение 2).

Нетрудно видеть, что

$$(N-n) \cdot x \leq \lambda \cdot x \cdot [(C(n-1, m-1) \cdot p \cdot q)^{-1}].$$

По определению величины x имеем

$$(N-n)x = (N-n) p^2 q^2 \sum_{s=0}^{m-2} \sum_{k=m-s+1}^{n-s} C(n-k, s) \times \\ \times C(k-2, m-s-1) C(k-2, m-s-2) (N-n)x \leq \\ \leq \lambda \sum_{s=0}^{m-2} \sum_{k=m-s+1}^{n-s} \frac{\binom{n-k}{s} \binom{k-2}{m-s-1} \binom{k-2}{m-s-2}}{\binom{n-2}{m-1}} p^{m-s-1} q^{k+s-m}.$$

Поскольку

$$\max_{k \in [m-s+1, n-s]} \binom{k-2}{m-s-2} = \binom{n-s-2}{m-s-2},$$

то

$$(N-n)x \leq \lambda \sum_{s=0}^{m-2} \binom{n-s-2}{m-s-2} \times \\ \times p^{m-s-1} \sum_{k=m-s+1}^{n-s} \frac{\binom{n-k}{s} \binom{k-2}{m-s-1}}{\binom{n-1}{m-1}}. \quad (5)$$

Применяя известное тождество

$$\sum_{k=l}^{n-m} \binom{n-k}{m} \binom{k}{l} = \binom{n+1}{m+l+1},$$

из (5) получаем

$$\sum_{k=m-s+1}^{n-s} \frac{\binom{n-k}{s} \binom{k-2}{m-s-1}}{\binom{n-1}{m-1}} = \frac{\binom{n-1}{m}}{\binom{n-1}{m-1}} = \frac{n-m}{m},$$

и, следовательно,

$$(N-n)x \leq \lambda \frac{(n-m)}{m} \cdot p \cdot \sum_{s=0}^{m-2} \binom{n-s-2}{m-s-2} p^{m-s-2}. \quad (6)$$

Обозначим $m-s-2=l$, $n-m=h$ и рассмотрим величину

$$\sum_{s=0}^{m-2} \binom{n-s-2}{m-s-2} p^{m-s-2} = \sum_{l=0}^{m-2} \binom{h+l}{l} p^l.$$

Покажем, что при выполнении условия (3) она ограничена. Для этого достаточно показать сходимость ряда

$$\sum_{l=0}^{\infty} \binom{h+l}{l} p^l.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left(\frac{h+l}{l} \right) \cdot p^l \leq \frac{(h+l)^h}{h!} \cdot p^l = \frac{l^h \cdot p^l}{h!} \cdot \left(1 + \frac{h}{l}\right)^h.$$

Поскольку

$$\left(1 + \frac{h}{l}\right)^h \leq e^{h^2/l},$$

при $h, l > 0$ и $h! \geq h^h \cdot e^{-h}$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{h+l}{l} \right) p^l &\leq l^h \cdot p^l \cdot l^{h^2/l+h} = \\ &= \exp \left\{ h \cdot \ln l + l \cdot \ln p + \frac{h^2}{l} + h - h \ln h \right\} = \\ &= \exp \{ l \cdot (\ln p + (h/l)^2 + h/l \cdot (1 - \ln(h/l))) \}. \end{aligned}$$

Далее заметим, для любого значения h найдется такое l_0 , что для всех $l \geq l_0$ справедливо неравенство $(h/l)^2 + h/l \cdot (1 - \ln(h/l)) \leq \ln((1+p_0)/2p_0)$.

При этом

$$\begin{aligned} \left(\frac{h+l}{l} \right) p^l &\leq \exp \left\{ l \left(\ln p + \frac{1+p_0}{p_0} \right) \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ l \left(\ln p_0 + \ln \frac{1+p_0}{2p_0} \right) \right\} = \left(\frac{1+p_0}{2} \right)^l. \end{aligned}$$

Тогда очевидно, что

$$\sum_{l=l_0}^{\infty} \left(\frac{1+p_0}{2} \right)^l = o(1).$$

Обозначим $C_0 = C_0(h) > 0$ величину удовлетворяющую условию $h/l \leq C_0$ для всех $l \geq l_0$ и $h/l > C_0$ для всех $l < l_0$.

Тогда для величины $l = 0, 1, \dots, l_0-1$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \binom{h+l}{l} p^l &\leq \frac{(h+l)^l}{l!} p^l = \\ &= \frac{\left(h \cdot p \cdot \left(1 + \frac{l}{h}\right) \right)^l}{l!} \leq \frac{(h \cdot p \cdot (1 + 1/C_0))^l}{l!}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{l_0-1} \binom{h+l}{l} \cdot p^l &\leq \sum_{l=0}^{l_0-1} \frac{(h \cdot p \cdot (1 + 1/C_0))^l}{l!} \leq \\ &\leq \exp \{ h \cdot p \cdot (1 + C_0^{-1}) \} = o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении условия (3) величина

$$\sum_{s=0}^{m-2} \binom{n-s-2}{m-s-2} \cdot p^{m-s-2}$$

ограничена. При этом из соотношения (6) следует утверждение 2) леммы. Лемма доказана. Перейдем к доказательству теоремы 1.

Для значений величины $k = 1, 2, \dots$ положим

$$b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_k} = p \{v_{i_1} = v_{i_2} = \dots = v_{i_k} = 1\}.$$

Вначале рассмотрим случай $\lambda \rightarrow \infty$.

Обозначим $\eta_N^*(n, m) = \eta_N(n, m) - v_1$.

В рамках введенных обозначений нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} p \{ \eta_N(n, m) - \eta_N^*(n, m) > 0 \} &= p \{ v_1 = 1 \} = D(n, m) = \\ &= C(n, m) \left(1 + \sum_{h=1}^{n-m} \frac{(n-m) \cdot (n-m-h+1)}{(m+1) \cdot (m+h)} \left(\frac{p}{q} \right)^h \right). \end{aligned}$$

Поскольку по условию теоремы 1 $q \geq 1 - p_0$, то в силу утверждения 1) леммы справедливы равенства $D(n, m) = C(n, m) (1 + o(1)) = n \cdot m^{-1} \cdot C(n-1, m-1) \cdot p \cdot (1 + o(1)) = n \cdot \lambda \cdot (m \cdot (N-n) \cdot q)^{-1} \cdot (1 + o(1)) \rightarrow 0$ (7). Таким образом, $p \{ \eta_N(n, m) - \eta_N^*(n, m) > 0 \} \rightarrow 0$ и, следовательно, предельные распределения случайных величин η_N^* и η_N совпадают.

Положим далее $z_1 = \alpha \cdot \lambda^* \cdot n / (N-n) + 2(N-n) \cdot x$,

$$z_2 = z_1 + e \min \left\{ \frac{(\lambda^*)^2 \cdot (n-m) \cdot (m-1)}{N-n}, \lambda^* \cdot (np)^2 \right\},$$

$$\omega = 2(\lambda^*)^2(n+1)/(N-n) + D(n,m)^2, \\ [(2n+1) \cdot e \cdot b_2]^{-1}, \lambda^* = E \eta_N^*(n,m) = \lambda + o(1).$$

Проводя рассуждения, аналогичные ательству теоремы 1 работы [8], мож-
оказать, что для случайной величины
m) справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} p\{\eta_N^*(n,m)=k\} \frac{(\lambda^*)^k \cdot e^{-\lambda^*}}{k!} \leq R^*, \quad (8)$$

$$\max\{w, z_2\} \frac{(1+z_2 \cdot e^{2\lambda^*+1-\alpha^*})(2+(\lambda^*+2)/\alpha^* + e^{2\lambda^*+1-\alpha^*})}{1-w/2-z_2(1+(\lambda^*+2)/\alpha^*)}.$$

Для доказательства (4) тогда достаточ-
казать, что равномерно по всем значени-
= 0, 1, 2, ..., 2[λ] имеет место соотношение
 $R^* = o(\lambda^k e^{-\lambda^*}/k!)$,

λ] – целая часть λ.

Заметим, что функция $f(k) = \lambda^k/k!$, за-
ая на множестве {0, 1, ..., 2[λ]}, достижи-
нимума в одной из крайних точек $k=0$
 $k=2[λ]$. Применяя формулу Стирлинга,
чаем

$$2[λ] = \frac{\lambda^{2[λ]}}{(2[λ])!} = \frac{1}{2\sqrt{\pi[λ]}} \frac{\lambda^{2[λ]} \cdot e^{2[λ]}}{(2[λ])^{2[λ]}} (1+o(1)).$$

Поскольку

$$\frac{\lambda^{2[λ]}}{[λ]^{2[λ]}} \geq 1,$$

$$\frac{\lambda^{2[λ]} \cdot e^{2[λ]}}{\sqrt{\pi[λ]} \cdot (2[λ])^{2[λ]}} \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi[λ]}} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2[λ]} \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow \infty.$$

В связи с этим, для доказательства со-
шения (4) достаточно показать, что

$$R^* = o(e^{-\lambda}).$$

Из соотношения (8) следует, что для
олнения последнего равенства достаточ-
ыполнения условий

$$e^{\lambda} \cdot \max(\omega, z_2) \rightarrow 0 \text{ и } \lambda = o(\alpha^*).$$

Заметим, что

$b_2 = C(n-1, m-1) \cdot p \cdot q = \lambda \cdot N^{-1} (1+o(1))$, (9)
тому в силу утверждения 1) леммы и ус-
я (2) имеем:

$$\lambda \alpha^* = \lambda(2n+1) \cdot e \cdot b_2 = \\ = 2e \cdot \lambda^2 \cdot n \cdot N^{-1} (1+o(1)) \rightarrow 0$$

$N, n, m \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\lambda = o(\alpha^*)$.

В силу утверждения 1) и 2) леммы и
соотношения (7) получаем

$$e^{\lambda} \omega \leq e^{\lambda} \left(2\lambda^2 \frac{n+1}{N-n} + D^2(n,m) \right) = \\ = O\left(\frac{\lambda^2 e^{\lambda} n m^2}{m^2 \cdot N} \right) + O\left(\frac{\lambda e^{\lambda} n}{m \cdot N} \right) \rightarrow 0 \quad (10)$$

при $N, n, m \rightarrow \infty$.

Кроме того,

$$e^{\lambda} \cdot z \leq e^{\lambda} \left(\frac{2 \cdot \lambda \cdot n}{N-n} + 2(N-n)x + e \cdot \frac{\lambda^2(n-m)(m-1)}{N-n} \right) = \\ = O\left(\frac{\lambda \cdot e^{\lambda} \cdot m \cdot n}{m \cdot N} \right) + O\left(\frac{\lambda \cdot e^{\lambda}}{m} \right) + \\ + O\left(\frac{\lambda^2 \cdot e^{\lambda} (n-m)m^2(m-1)}{m^2 \cdot N} \right) \rightarrow 0. \quad (11)$$

при $N, n, m \rightarrow \infty$.

Тем самым соотношение (4) доказано.

Покажем, что из условия (4) следует асимпто-
тическая нормальность случайной величины
 $\eta_N(n,m)$.

В [9] отмечено, что если некоторая
случайная величина распределена по закону
Пуассона с параметром λ, то при $\lambda \rightarrow \infty$ она
имеет асимптотически нормальное распреде-
ление с параметром (λ, λ). В связи с этим в
нашем случае достаточно показать, что при
 $\lambda \rightarrow \infty$ распределение $\eta_N(n,m)$ есть закон Пу-
ассона с параметром λ.

Обозначим $\varphi_{\eta}(t)$ характеристическую
функцию случайной величины $\eta_N(n,m)$, а $\varphi_{\xi}(t)$ –
характеристическую функцию случай-
ной величины ξ, распределенной по закону
Пуассона с параметром λ.

Положим также $p\{\eta_N(n,m)=k\} = p_k$ при
 $k=2[λ]+1, \dots$

Нетрудно видеть,

$$\varphi_{\eta}(t) - \varphi_{\xi}(t) =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{2[λ]} e^{itk} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} (1+o(1)) + \sum_{k=2[λ]+1}^{\infty} e^{itk} \cdot p_k - \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \right| \leq \\ \leq \sum_{k=0}^{2[λ]} \left| e^{itk} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} o(1) \right| + \sum_{k=2[λ]+1}^{\infty} \left| e^{itk} \right| \left(p_k + \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \right). \quad (12)$$

Покажем, что

$$\sum_{k=2[λ]+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=2[\lambda]+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = p\{\xi > 2[\lambda]\}.$$

Применяя известное неравенство $p\{\xi \geq 2[\lambda]\} \leq \exp\{-2[\lambda]\} \cdot Ee^{\xi}$, получаем

$$\sum_{k=2[\lambda]+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} < e^{-2[\lambda]} e^{\lambda(e-1)} \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Из последнего соотношения следует, что при любом фиксированном значении t все слагаемые в (12) стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Следовательно, при любом фиксированном значении t

$$|\varphi_{\eta}(t) - \varphi_{\xi}(t)| \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Это, в свою очередь, означает, что при $\lambda \rightarrow \infty$ случайные величины $\eta_N(n, m)$ и ξ имеют одинаковые предельные распределения. Таким образом, утверждение теоремы 1 в случае $\lambda \rightarrow \infty$ доказано.

Рассмотрим случай $\lambda \rightarrow \lambda_0 > 0$, $\lambda_0 = \text{const}$. Из утверждения 1) леммы и соотношения (7) следует, что $D(n, m) \rightarrow 0$ при $N, n, m \rightarrow \infty$, поэтому предельные распределения $\eta_N(n, m)$ и $\eta_N^*(n, m)$ также совпадают и для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $R^* \rightarrow 0$ при $N, n, m \rightarrow \infty$.

С учетом (8) имеем $\lambda / \alpha^* = 2 \cdot e \cdot \lambda^2 n \cdot N^{-1} (1 + o(1))$.

Поэтому, $\exp\{2\lambda - \alpha^*\} = O(1)$.

Справедливость соотношения $\max(\omega, z_2) \rightarrow 0$ непосредственно следует из (10), (11) и утверждений 1) и 2) леммы. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $n, m \rightarrow \infty$ так, что $n - m = k \geq 0$, $k = \text{const}$.

Тогда $p\{\tau(n, m) \cdot n^k \cdot p^n \leq x\} \rightarrow 1 - \exp\{-x \cdot p^{-k} \cdot q^{k+1} / k!\}$.

Доказательство. Очевидно, что при любом фиксированном $x \in (0, \infty)$,

$$p\{\tau(n, m) \cdot n^k \cdot p^n > x\} = p\{\eta_{N(x)}(n, m) = 0\},$$

где $N(x) = [x / n^k p^n]$,

поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что при любом фиксированном $x \in (0, \infty)$, величины $N(x), n, m$ и p , определенные в условии теоремы 2, удовлетворяют условию теоремы 1 со значением $\lambda(x) = x \cdot p^{-k} \cdot q^{k+1} / k!$.

Нетрудно видеть, что $\lambda(x) = D(n, m) + (N(x) - n) \cdot C(n-1, m-1) \cdot p \cdot q \sim x \cdot p^{-k} \cdot q^{k+1} / k!$.

Условие $N(x) \rightarrow \infty$, очевидно, выполнено. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть при $n, m \rightarrow \infty$ величины $p \rightarrow 0$ так, что $n \cdot p \rightarrow \delta > 0$, $\delta = \text{const}$, $m \cdot n \cdot p \rightarrow \gamma > 0$, $\gamma = \text{const}$.

Тогда,

$$p\left\{\tau(n, m) \binom{n-1}{m-1} p^m < x\right\} \rightarrow 1 - \exp\{-x e^{-\delta(1-\gamma)}\}$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Рассмотрим теперь важный с практической точки зрения случай $p = q = 1/2$.

Обозначим σ^2 — дисперсию случайной величины $\eta_N(n, m)$.

Теорема 4. Если при $N, n \rightarrow \infty$ натуральная величина $m > 1$ изменяется так, что

$$N \cdot \binom{n-1}{m-1} \cdot 2^{-n} \rightarrow \infty, \quad (13)$$

$$\left| \frac{m - n/2}{\sqrt{n/2}} \right| \geq \sqrt{2 \ln n}, \quad (14)$$

то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p\left\{\frac{\eta_N(n, m) - \lambda}{\sigma} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Доказательство. Прямым применением формулы Стирлинга нетрудно показать, что для всех m , удовлетворяющих условию (14), имеет место равенство

$$\binom{n}{m} \cdot 2^{-n} = O(n^{-3/2}). \quad (15)$$

Оценим величину σ^2 . Учитывая, что $E v_i = p\{v_i = 1\} = b_i$ при $i = 1, 2, \dots, N - n + 1$ и $b_i = b_j$ при $i, j \geq 2$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E \left\{ \sum_{i=1}^{N-n+1} (v_i - b_i) \right\}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N-n+1} E(v_i - b_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=2}^{N-n+1} [E v_i v_i - b_i b_2] + \\ &+ 2 \cdot \sum_{2 \leq i < j \leq N-n+1} [E v_i v_j - b_2^2]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $E v_i v_j = E v_i \cdot E v_j$ при $|i - j| \geq n + 1$, а также, что $E v_i v_j = b_{i,j}$ из последнего соотношения получаем

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= b_1(1 - b_1) + (N - n)b_2(1 - b_2) + 2 \sum_{i=2}^{n+1} (b_{i,i} - b_1 \cdot b_2) + \\ &+ 2 \sum_{i=2}^{N-n} \sum_{j=i+1}^{\min(i+n, N-n+1)} (b_{i,j} - b_2^2) \geq \end{aligned}$$

$\geq (N-n) b_2 (1-b_2) - 2(n+1) b_1 b_2 -$
 $V-n) \cdot n \cdot (b_2)^2 = (b_1 + (N-n) b_2) \cdot [1 - b_2 -$
 $(n+1)/(N-n) b_1 - 2n b_2] - b_1 + b_1 b_2 +$
 $(n+1)(N-n) (b_1)^2 + 2n b_1 b_2 \geq \lambda [1 - b_2 -$
 $)/(N-n) b_1 - 2n b_2 - b_1 / \lambda] = \lambda (1 + o(1))$.
 Поскольку из (14) и (15) следует, что $n \cdot$
 $n^{-1/2}$ при $n \rightarrow \infty$, а также, что

$$n/N \rightarrow 0 \text{ при } N, n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, из (13) – (15) и сделанные замечания следует, что $\sigma^2 \rightarrow \infty$ при ∞ .

Обозначим λ^* и $(\sigma^*)^2$ соответственно λ и дисперсию случайной величины $v_i = \eta_N(n, m) - v_i$ и рассмотрим величину $(\eta_N(n, m) - \lambda)/\sigma - (\eta_N^*(n, m) - \lambda^*)/\sigma^* = (v_i - b_1)/\sigma$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторое фиксированное. Применяя неравенство Чебышева, по-

$$P\left\{\left|\frac{v_i - b_1}{\sigma}\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{Dv_i}{\sigma^2 \cdot \varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad (16)$$

$\rightarrow \infty$.

Далее заметим, что

$$\sigma^2 - (\sigma^*)^2 = E(v_i - b_1)^2 +$$

$$+ 2 \sum_{i=2}^{n+1} E(v_i v_i - b_1 b_i) = b_1(1-b_1) + 2 \sum_{i=2}^{n+1} (b_{1,i} - b_1 \cdot b_i) \leq$$

$$\leq b_1(1-b_1) + 2 \sum_{i=2}^{n+1} b_{1,i} \leq b_1(1-b_1) + n \cdot b_2,$$

так $b_{1,i} \leq b_{i-1} b_2$ при $i = 2, n+1$.

С другой стороны $\sigma^2 - (\sigma^*)^2 \geq b_1(1-b_1)$

b_2 .

Поскольку $b_1(1-b_1) \leq 1$, а $n \cdot b_2 = o(1)$, $(\sigma^*)^2/\sigma^2 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ и, следовательно, $(\sigma^*)^2 \cdot (1+o(1))$.

Из последнего соотношения, а также б) следует, что предельные распределения случайных величин $(\eta_N(n, m) - \lambda)/\sigma$ и $(\eta_N^*(n, m) - \lambda^*)/\sigma^*$ совпадают. Таким образом, оказательства теоремы 4 достаточно по-казать, что при выполнении (13) и (14) имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\eta_N^*(n, m) - \lambda^*}{\sigma^*} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (17)$$

Покажем, что для стационарной последовательности $\{v_i\}$, $i = 2, 3, \dots$ выполняется условие теоремы 18.5. 1 работы [10]. В соответствии [10] для этого достаточно показать что

$$\varphi_n(k) = \max_{k \leq i \leq n} \max_{i, j \in \{0, 1\}} r_{i, j}(t) \rightarrow 0 \quad (18)$$

при $n, k \rightarrow \infty$, где $r_{ij}(t) = |p\{v_2 = i, v_t = j\} - p\{v_2 = i\} \cdot p\{v_t = j\}| / p\{v_2 = i\}$.

Пусть $k \geq 4$. Рассмотрим величину $\max r_{11}(t)$, $k \leq t \leq n$.

Очевидно, что $r_{11}(t) = |b_{2,t} - b_2 b_t| / b_2 \leq b_{2,t} / b_2 + b_t$.

Из соотношения (15) следует, что

$$b_2 = \binom{n-1}{m-1} \cdot 2^{-(n+1)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Далее заметим, что

$$b_{2,t} = \sum_{s=0}^{m-2} 2^{-t+2} \binom{n-t+1}{s} \binom{t-3}{m-s-1} \binom{t-3}{m-s-2} \binom{n-1}{m-1}^{-1} \leq$$

$$\leq 2^{-t+2} \max_{0 \leq s \leq m-2} \binom{t-3}{m-s-1} \binom{n-2}{m-2} \binom{t-3}{m-s-1} \binom{n-1}{m-1}^{-1} \leq 2^{-t+2} \max_{0 \leq s \leq m-2} \binom{t-3}{m-s-1} \frac{m-1}{n-1}.$$

Поскольку

$$\max_{0 \leq s \leq m-2} \binom{t-3}{m-s-1} \leq \max_{0 \leq s \leq t-3} \binom{t-3}{s} = \binom{t-3}{\lfloor \frac{t-3}{2} \rfloor},$$

то

$$\frac{b_{2,t}}{b_2} \leq \frac{1}{2} \cdot \binom{t-3}{\lfloor \frac{t-3}{2} \rfloor} \cdot 2^{-(t-3)}.$$

Тогда

$$\max_{k \leq t \leq n} r_{11}(t) \leq \frac{1}{2} \cdot \binom{k-3}{\lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor} \cdot 2^{-(k-3)} + b_t \rightarrow 0$$

при $n, k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим величину $r_{10}(t)$, равную $r_{10}(t) = |p\{v_2 = 1, v_t = 0\} - p\{v_2 = 1\} \cdot p\{v_t = 0\}| / p\{v_2 = 1\}$.

Принимая во внимание очевидное равенство $p\{v_2 = 1\} = p\{v_2 = 1, v_t = 0\} + p\{v_2 = 1, v_t = 1\}$, получаем $r_{10}(t) = |b_2 - b_{2,t} - b_2(1-b_t)| / b_2 = |b_{2,t} - b_2 b_t| / b_2 = r_{11}(t)$.

Рассмотрим величину $r_{01}(t)$ равную $r_{01}(t) = |p\{v_2 = 0, v_t = 1\} - p\{v_2 = 0\} \cdot p\{v_t = 1\}| / p\{v_2 = 0\}$.

Принимая во внимание равенство $p\{v_t = 1\} = p\{v_2 = 0, v_t = 1\} + p\{v_2 = 1, v_t = 1\}$, получаем $r_{01}(t) = |b_t - b_2 b_t - (1-b_2) b_t| / (1-b_2) = |b_{2,t} - b_2 b_t| / (1-b_2) = r_{11}(t) b_2' / (1-b_2) \leq$

$\leq r_{11}(t)$ при всех n , начиная с некоторого номера n_0 .

Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно показать, что $r_{00}(t) = r_{01}(t)$.

Из сказанного выше следует, что функция $\varphi_n(k)$, определяемая соотношением (17), стремится к нулю при $n, k \rightarrow \infty$, и последовательность $\{v_i\}$, $i=2,3,\dots$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания. Таким образом, все условия теоремы 18.5.1 работы [10] выполнены и для случайной величины $\eta_N^*(n,m)$ справедливо соотношение (17). Теорема 4 доказана.

Библиографический список

1. Новак, С.Ю. О распределении максимума частичных сумм Эрдеша-Реньи / С.Ю. Новак // Теория вероятностей и ее применения. – 1997. – Т. 42. – Вып. 2. – С. 274–293.
2. Питербарг, В.И. О больших скачках случайного блуждания / В.И. Питербарг // Теория вероятностей и ее применения. – 1991. – Т. 36. – Вып. 1. – С. 54–64.
3. Довгалоук, В.В. Большие отклонения траекторий пуассоновского процесса. – Вероятностные про-

- цессы и их приложения / В.В. Довгалоук, В.И. Питербарг. – М.: МИЭМ, 1989. – С. 112–117.
4. Козлов, М.В. О частичных суммах Эрдеша-Реньи. Большие отклонения, условное поведение. / М.В. Козлов // Теория вероятностей и ее приложения. – Т. 46. – Вып. 4. – 2001. – С. 678–696.
5. Лось, А.Б. О предельном распределении максимума процесса скользящего суммирования (частичных сумм Эрдеша-Реньи) / А.Б. Лось // Вестник МГУЛ – Лесной вестник. – № 3(79). – 2011. – С. 185–190.
6. Зубков, А.М. Оценки для сумм конечно-разностных индикаторов и для момента первого появления редкого события / А.М. Зубков // Тр. МГУЛ СССР, 1986. – Т. 177. – С. 33–46.
7. Naus J.I. Approximations for distributions of statistics. – J. Amer. Statistic Assoc., 1974, 69, 810–815.
8. Лось, А.Б. О скорости сходимости к закону распределения числа достижений заданного уровня процессом скользящего суммирования / А.Б. Лось // Вестник МГУЛ – Лесной вестник, 2012.
9. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – М.: Мир, 1964. – С. 498.
10. Ибрагимов, И.А. Независимые и стационарные случайные величины / И.А. Ибрагимов, Ю.В. Ливинский. – М.: Наука, 1965. – 523 с.

НЕЧЕТКАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ ВТОРОГО ТИПА

Н.Э. МАЛОЛЕПШАЯ, асс. каф. высшей математики МГУЛ

olga.m.pol@yandex.ru

Для анализа зависимостей между качественными характеристиками и прогноза их значений используются методы нечеткого регрессионного анализа, которые значительно расширили границы применения класси-

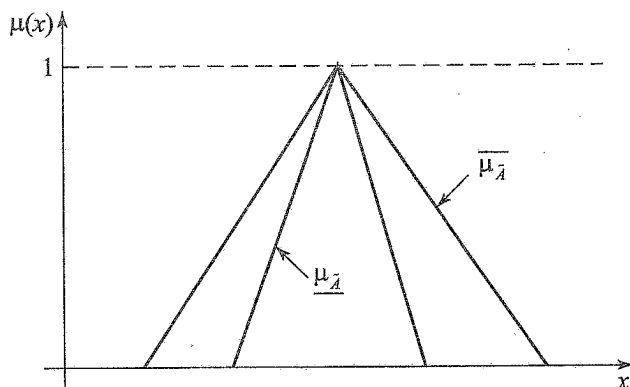


Рисунок. Интервальное нечеткое числа второго типа с $LMF \underline{\mu}_A$ и $UMF \overline{\mu}_A$

ческого регрессионного анализа, то есть позволили строить регрессионные зависимости на основе нечеткой исходной информации [1]. Однако в настоящее время методы нечеткого регрессионного анализа ограничены рассмотрением только нечетких чисел первого типа, что можно отнести к их недостаткам и причинам достаточно грубой формализации исходной информации [2]. Поскольку представления разных людей об одном и том же понятии могут различаться, то устранить недостатки нечеткого регрессионного анализа позволяют нечеткие числа второго типа, которые имеют достаточно степеней свободы, чтобы сохранить индивидуальные сведения субъектов об определенном понятии и повысить информативность исходных данных. В то же время с нечеткими числами второго типа работать