ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ЛЕСА

ЛЕСНОЙ ВЕСТНИК

Научно-информационный журнал

2013 г. № 3(95)

Журнал издается при поддержке
Научно-образовательной
ассоциации лесного комплекса

Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-12923 от 17.06.2002

Журнал входит в перечень утвержденных ВАК РФ изданий для публикации трудов соискателей ученых степеней

Редакция журнала принимает к рассмотрению не публиковавшиеся ранее статьи объемом 5–10 страниц, включая рисунки и таблицы. Требования к представлению материалов приведены в конце номера.

Рукописи, не соответствующие указанным требованиям, не принимаются; статьи, отклоненные редакцией, не возвращаются.

Подписано в печать 25.04.2013.
Тираж 500 экз.
Заказ № 188
Объем 31,75 п. л.

Издательство Московского государственного университета леса
141005, Мытищи-5, Московская обл.,
1-я Институтская, 1, МГУЛ. (498)687-41-33
les-vest@mgul.ac.ru

4. Гиттис, Э.И. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. Изд. 3-е / Э.И. Гитис. – М.: Энергия, 1975. – 448 с.
5. Хлистунов, В.Н. Основы цифровой электроизмерительной техники и цифровые преобразователи / В.Н. Хлистунов. – М.–Л.: Энергия, 1966. – 345 с.
6. ГОСТ 8.207-76. ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения.
7. ГОСТ 8.011-72. ГСИ. Показатели точности измерений и форма представления результатов измерений.
8. Алексеев, В.В. Интегральная оценка точностных возможностей микроэлектромеханических преобразователей линейных ускорений / В.В. Алексеев, Ю.В. Ковганич, В.М. Полушкин, С.П. Тимошенков // Матер. всероссийской научно-технической конф. «Новые технологии в научных исследованиях, проектировании, управлении, производстве, космической механотронике», г. Воронеж, 2011 г.
9. Домрачеев, В.Г. Цифровые преобразователи угла: Принципы построения, теория точности, методы контроля / В.Г. Домрачеев, Б.С. Мейко – М.: Энергоатомиздат, 1984.

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ДОСТИЖЕНИЙ ЗАДАННОГО УРОВНЯ ПРОЦЕССОМ СКОЛЬЗЯЩЕГО СУММИРОВАНИЯ

А.Б. ЛОСЬ, *доц. каф. компьютерной безопасности МИЭМ НИУ ВШЭ, канд. техн. наук*

alexloss@miem.edu.ru

Пусть $X_1, X_2,\ldots, X_N$ – (1) последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, принимающих значение 1 и 0 с вероятностями p и q соответственно, $p + q = 1$,

$$\xi_t(n) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{t+n-1},\ t = 1, 2,\ldots$$

процесс скользящего суммирования, порожденный последовательностью (1).

Исследованию характеристик процесса $\xi_t(n)$ посвящено довольно много работ в научной литературе [1–5].

В настоящей работе получены условия сходимости числа достижений заданного уровня процессом $\xi_t(n)$ за время $N–n+1$, к закону Пуассона и нормальному закону, а также исследовано предельное распределение времени первого достижения процессом $\xi_t(n)$ заданного уровня m.

Введем индикаторы $\nu_t(n,m)$ достижения процесса $\xi_t(n)$ заданного уровня m, полагая

$$\nu_1(n,m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_1(n) \ge m \\ 0, & \text{если } \xi_1(n) < m \end{cases}$$

$$\nu_t(n,m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_{t-1}(n) < m,\ \xi_t(n) = m \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$t = 2,3,\ldots;$$

Положим также

$$\eta_N(n,m) = \sum_{t=1}^{N-n+1} \nu_t(n,m)$$

– число достижений заданного уравнения m процессом $\xi_t(n)$ за время $N–n+1$, $\tau(n,m) = \min(N \mid \eta_N(n,m) > 0)$ – время первого достижения заданного уровня m процессом $\xi_t(n)$.

Заметим, что случайная величина $\tau(n,m)$ изучалась в работе [6], где получена двусторонняя оценка вероятности $p\{\tau(n,m) > N\}$. В [7] для вычисления вероятности $p\{\tau(n,m) > N\}$ предложена приближенная формула.

Далее, где это не вызовет путаницы, будем опускать индексы n и m в обозначении индикаторов $\nu_t(n,m)$.

Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения

$$C(n,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},\ D(n,m) = \sum_{k=m}^{n} C(n,k),$$

$$\lambda = E\,\eta_N(n,m) = D(n.m) + (N–n)\,C(n–1,m–1)\cdot p\cdot q,$$

$$x = p^2 \cdot q^2 \sum_{s=0}^{m-2} \sum_{k=m-s+1}^{n-s} C(n-k,s) \times$$

$$\times C(k-2,m-s-1) \cdot C(k-2,m-s-2).$$

Везде далее предполагается, что

$$\binom{n}{k} = 0$$

при $k > n$ или $n < 0$ и

$$\binom{k}{0} = 1$$

при $k \ge 0$.

Теорема 1. Пусть при N, $n,m \to \infty$ величина p ($p \le p_0 < 1$) изменяется так, что

$$\lambda \cdot e^{-\lambda} / m \to 0 \qquad (2)$$

$$(n-m) \cdot p = O(1). \qquad (3)$$

Тогда, если $\lambda \to \infty$, то равномерно по значениям $k = 0, 1, 2, \ldots, 2[\lambda]$

$$p\{\eta_N(n,m)=k\} = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k! \cdot (1+o(1)) \qquad (4)$$

и случайная величина $\eta_N(n,m)$ распределена асимптотически нормально с параметром (λ,λ).

Если $\lambda \to \lambda_0$, $\lambda_0 = const$, то $Mz^{\eta_N(n,m)} \to e^{\lambda_0(z-1)}$.

Вначале докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть при N, $n,m \to \infty$ величина p ($p \le p_0 < 1$) величина p изменяется так, что $\lambda \ge C > 0$, $C = const$, и выполняется условие (3). Тогда

1) $n \cdot m^t / N \to 0$ при любом $t < \infty$,

2) $(N-n) \cdot x = O(\lambda/m)$.

Доказательство леммы. Для доказательства утверждения 1) рассмотрим два случая.

а) Пусть $m/n \to 1$.

Обозначим $h = n - m$ и рассмотрим величину $\delta = n \cdot m^t \cdot C(n-1,m-1) \cdot p \cdot q$.

Поскольку

$$\binom{n-1}{m-1} \le \frac{n^h}{h!},$$

то $\delta \le n^{t+1+h} \cdot p^m / h!$

Учитывая, что $h! \ge h^h \cdot e^{-h}$, а также, что $h/n \to 0$ при $n \to \infty$, получаем $\delta \le n^{t+1+h} \cdot p^m / h! = exp\{(t+1) \cdot lnn - h \cdot ln \cdot (h/n) + (n-h) \cdot lnp\} = exp\{n[(t+1) \cdot n^{-1} lnn - h/n \cdot lnh/n + h/n + (1-h/n)lnp]\} = exp\{n \cdot (lnp \cdot (1+o(1)+o(1))\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Отсюда следует, что $\delta = n \cdot m^t \cdot C(n-1,m-1) \cdot p \cdot q \to 0$ при $n \to \infty$.

Поскольку $\lambda = D(n,m) + (N-n)\ C(n-1,m-1) \cdot p \cdot q \ge c > 0$, то $\delta / \lambda \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как в условиях леммы $m \to \infty$, то в силу (3) и неравенства $q \ge 1 - p_0$, $p_0 = const$, $p_0 < 1$ справедливо соотношение

$$D(n,m) = C(n,m) \times$$

$$\times \left(1 + \sum_{k=1}^{m-} \frac{(n-m)\ldots(n-m-k+1)}{(m+1)\ldots(m+k)} \left(\frac{p}{q}\right)^k\right) =$$

$$= C(n,m)(1+o(1)).$$

Поэтому, $\lambda = (N - n + n/mq) \cdot C(n-1,m-1) \cdot p \cdot q \cdot (1+o(1))$, и, следовательно, $n \cdot m^t / (N-n+n/(m \cdot q)) \to 0$ при N, $n,m \to \infty$, откуда следует утверждение 1) леммы в случае а).

б) $m/n \to \gamma < 1$.

Нетрудно видеть, что в этом случае условие $(n-m) \cdot p = o(1)$ эквивалентно условию $n \cdot p = o(1)$.

Поскольку

$$\binom{n-1}{m-1} \le \frac{n^{m-1}}{(m-1)!},$$

то $n \cdot m^t \cdot (N-n) \cdot C(n-1,m-1) \cdot p \cdot q \le m^t \cdot (np)^t / (m-1)! \to 0$ при n, $m \to \infty$.

Отсюда с учетом сделанных выше замечаний следует справедливость утверждения 1) леммы в случае б). Утверждение 1) леммы доказано. Докажем утверждение 2).

Нетрудно видеть, что

$$(N-n) \cdot x \le \lambda \cdot x \cdot [(C(n-1, m-1) \cdot p \cdot q]^{-1}.$$

По определению величины x имеем

$$(N-n)x = (N-n)p^2q^2 \sum_{s=0}^{m-2} \sum_{k=m-s+1}^{n-s} C(n-k,s) \times$$

$$\times C(k-2,m-s-1)C(k-2,m-s-2)(N-n)x \le$$

$$\le \lambda \cdot \sum_{s=0}^{m-2} \sum_{m-s+1}^{n-s} \frac{\binom{n-k}{s}\binom{k-2}{m-s-1}\binom{k-2}{m-s-2}}{\binom{n-2}{m-1}} p^{m-s-1} q^{k+s-m}.$$

Поскольку

$$\max_{k \in [m-s+1, n-s]} \binom{k-2}{m-s-2} = \binom{n-s-2}{m-s-2},$$

то

$$(N-n)x \le \lambda \sum_{s=0}^{m-2} \binom{n-s-2}{m-s-2} \times$$

$$\times p^{m-s-1} \sum_{k=m-s+1}^{n-s} \frac{\binom{n-k}{s}\binom{k-2}{m-s-1}}{\binom{n-1}{m-1}}. \qquad (5)$$

Применяя известное тождество

$$\sum_{k=l}^{n-m} \binom{n-k}{m}\binom{k}{l} = \binom{n+1}{m+l+1},$$

из (5) получаем

$$\sum_{k=m-s+1}^{n-s}\frac{\binom{n-k}{s}\binom{k-2}{m-s-1}}{\binom{n-1}{m-1}}=\frac{\binom{n-1}{m}}{\binom{n-1}{m-1}}=\frac{n-m}{m},$$

и, следовательно,

$$(N-n)x\le\lambda\frac{(n-m)}{m}\cdot p\cdot\sum_{s=0}^{m-2}\binom{n-s-2}{m-s-2}p^{m-s-2}. \quad (6)$$

Обозначим $m-s-2=l$, $n-m=h$ и рассмотрим величину

$$\sum_{s=0}^{m-2}\binom{n-s-2}{m-s-2}p^{m-s-2}=\sum_{l=0}^{m-2}\binom{h+l}{l}p^{l}.$$

Покажем, что при выполнении условия (3) она ограничена. Для этого достаточно показать сходимость ряда

$$\sum_{l=0}^{\infty}\binom{h+l}{l}p^{l}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\binom{h+l}{l}\cdot p^{l}\le\frac{(h+l)^{h}}{h!}\cdot p^{l}=\frac{l^{h}\cdot p^{l}}{h!}\cdot(1+\frac{h}{l})^{h}.$$

Поскольку

$$\left(1+\frac{h}{l}\right)^{h}\le e^{h^{2}/l}$$

при h, $l>0$ и $h!\ge h^{h}\cdot e^{-h}$, то

$$\binom{h+l}{l}p^{l}\le l^{h}\cdot p^{l}\cdot l^{h^{2}/l+h}=$$

$$=\exp\left\{h\cdot\ln l+l\cdot\ln p+\frac{h^{2}}{l}+h-h\ln h\right\}=$$

$$=exp\{l\cdot(lnp+(h/l)^{2}+h/l\cdot(1-ln(h/l))\}.$$

Далее заметим, для любого значения h найдется такое l_0, что для всех $l\ge l_0$ справедливо неравенство $(h/l)^2+h/l\cdot(1-ln(h/l))\le ln((1+p_0)/2p_0))$.

При этом

$$\binom{h+l}{l}p^{l}\le\exp\left\{l\left(\ln p+\frac{1+p_0}{p_0}\right)\right\}\le$$

$$\le\exp\left\{l\left(\ln p_0+\ln\frac{1+p_0}{2p_0}\right)\right\}=\left(\frac{1+p_0}{2}\right).$$

Тогда очевидно, что

$$\sum_{l=l_0}^{\infty}\left(\frac{1+p_0}{2}\right)^{l}=o(1).$$

Обозначим $C_0=C_0(h)>0$ величину, удовлетворяющую условию $h/l\le C_0$ для всех $l\ge l_0$ и $h/l>C_0$ для всех $l<l_0$.

Тогда для величины $l=0,1,\ldots,l_0-1$ справедливы соотношения

$$\binom{h+l}{l}p^{l}\le\frac{(h+l)^{l}}{l!}p^{l}=$$

$$=\frac{\left(h\cdot p\cdot\left(1+\frac{l}{h}\right)\right)^{l}}{l!}\le\frac{(h\cdot p\cdot(1+1/C_0))^{l}}{l!}.$$

Поэтому

$$\sum_{l=0}^{l_0-1}\binom{h+l}{l}\cdot p^{l}\le\sum_{l=0}^{l_0-1}\left(\frac{h\cdot p\cdot(1+1/C_0)}{l!}\right)^{l}\le$$

$$\le\exp\left\{h\cdot p\cdot(1+C_0^{-1})\right\}=o(1).$$

Таким образом, при выполнении условия (3) величина

$$\sum_{s=0}^{m-2}\binom{n-s-2}{m-s-2}\cdot p^{m-s-2}$$

ограничена. При этом из соотношения (6) следует утверждение 2) леммы. Лемма доказана. Перейдем к доказательству теоремы 1.

Для значений величины $k=1,2,\ldots$ положим

$$b_{i_1},b_{i_2},\ldots,b_{i_k}=p\left\{v_{i_1}=v_{i_2}=\ldots=v_{i_k}=1\right\}.$$

Вначале рассмотрим случай $\lambda\to\infty$.

Обозначим $\eta_N^*(n,m)=\eta_N(n,m)-v_1$.

В рамках введенных обозначений нетрудно видеть, что

$$p\{\eta_N(n,m)-\eta_N^*(n,m)>0\}=p\{v_1=1\}=D(n,m)=$$

$$=C(n,m)\left(1+\sum_{h=1}^{n-m}\frac{(n-m)\ldots(n-m-h+1)}{(m+1)\ldots(m+h)}\left(\frac{p}{q}\right)^{h}\right).$$

Поскольку по условию теоремы 1 $q\ge 1-p_0$, то в силу утверждения 1) леммы справедливы равенства $D(n,m)=C(n,m)\,(1+o\,(1))=n\cdot m^{-1}\cdot C(n-1,m-1)\cdot p\cdot(1+o\,(1))=n\cdot\lambda\cdot(m\cdot(N-n)\cdot q)^{-1}\cdot(1+o\,(1))\to 0$ (7). Таким образом, $p\{\eta_N(n,m)-\eta_N^*(n,m)>0\}\to 0$ и, следовательно, предельные распределения случайных величин η_N^* и η_N совпадают.

Положим далее $z_1=\alpha\cdot\lambda^*\cdot n/(N-n)+2(N-n)\cdot x$,

$$z_2=z_1+e\min\left\{\frac{(\lambda^*)^{2}\cdot(n-m)\cdot(m-1)}{N-n},\lambda^*\cdot(np)^{2}\right\},$$

$\omega = 2\,(\lambda^*)^2\,(n+1)/(N-n) + D(n,m)^2$,
$[(2n+1)\cdot e\cdot b_2]^{-1}$, $\lambda^* = E\,\eta_N{}^*(n,m) = \lambda + o\,(1)$.

Проводя рассуждения, аналогичные ательству теоремы 1 работы [8], мож- оказать, что для случайной величины $m)$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|p\left\{\eta_N^*(n,m)=k\right\}-\frac{(\lambda^*)^k\cdot e^{-\lambda^*}}{k!}\right|\le R^*, \qquad (8)$$

$$\max\{w,z_2\}\frac{(1+z_2\cdot e^{2\lambda^*+1-\alpha^*})(2+(\lambda^*+2)/\alpha^*+e^{2\lambda^*+1-\alpha^*})}{1-w/2-z_2(1+(\lambda^*+2)/\alpha^*)}.$$

Для доказательства (4) тогда достаточ- оказать, что равномерно по всем значени- $= 0, 1, 2, \ldots, 2[\lambda]$ имеет место соотношение

$$R^* = o(\lambda^k\,e^{-\lambda}/k!),$$

$\lambda]$ – целая часть λ.

Заметим, что функция $f(k) = \lambda^k/k!$, за- ая на множестве $\{0, 1, \ldots, 2[\lambda]\}$, достига- инимума в одной из крайних точек $k=0$ $k= 2[\lambda]$. Применяя формулу Стирлинга, чаем

$$(2[\lambda])=\frac{\lambda^{2[\lambda]}}{(2[\lambda])!}=\frac{1}{2\sqrt{\pi[\lambda]}}\frac{\lambda^{2[\lambda]}\cdot e^{2[\lambda]}}{(2[\lambda])^{2[\lambda]}}(1+o(1)).$$

Поскольку

$$\frac{\lambda^{2[\lambda]}}{[\lambda]^{2[\lambda]}}\ge 1,$$

$$\frac{\lambda^{2[\lambda]}\cdot e^{2[\lambda]}}{\sqrt{\pi[\lambda]}\cdot(2\lambda)^{2[\lambda]}}\ge\frac{1}{2\sqrt{\pi[\lambda]}}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^{2[\lambda]}\to\infty$$

$\lambda\to\infty$.

В связи с этим, для доказательства со- ошения (4) достаточно показать, что

$$R^* = o(e^{-\lambda}).$$

Из соотношения (8) следует, что для олнения последнего равенства достаточ- ыполнения условий

$$e^{\lambda}\cdot max\,(\omega, z_2) \to 0 \text{ и } \lambda = o(\alpha^*).$$

Заметим, что

$$b_2 = C(n-1,m-1)\cdot p\cdot q = \lambda\cdot N^{-1}\,(1+o\,(1)), \quad (9)$$

тому в силу утверждения 1) леммы и ус- ия (2) имеем:

$$\lambda/\alpha^* = \lambda(2n+1)\cdot e\cdot b_2 =$$
$$= 2e\cdot\lambda^2\cdot n\cdot N^{-1}\,(1+o\,(1)) \to 0$$

$N,n,m\to\infty$ и, следовательно, $\lambda = o(\alpha^*)$.

В силу утверждения 1) и 2) леммы и соотношения (7) получаем

$$e^{\lambda}\omega\le e^{\lambda}\left(2\lambda^2\frac{n+1}{N-n}+D^2(n,m)\right)=$$
$$=O\left(\frac{\lambda^2e^{\lambda}nm^2}{m^2\cdot N}\right)+O\left(\frac{\lambda e^{\lambda}n}{m\cdot N}\right)\to 0 \qquad (10)$$

при $N,n,m\to\infty$.

Кроме того,

$$e^{\lambda}\cdot z\le e^{\lambda}\left(\frac{2\cdot\lambda\cdot n}{N-n}+2(N-n)x+e\frac{\lambda^2(n-m)(m-1)}{N-n}\right)=$$
$$=O\left(\frac{\lambda\cdot e^{\lambda}\cdot m\cdot n}{m\cdot N}\right)+O\left(\frac{\lambda\cdot e^{\lambda}}{m}\right)+$$
$$+O\left(\frac{\lambda^2\cdot e^{\lambda}(n-m)m^2(m-1)}{m^2\cdot N}\right)\to 0. \qquad (11)$$

при $N,n,m\to\infty$.

Тем самым соотношение (4) доказано. Покажем, что из условия (4) следует асимптотическая нормальность случайной величины $\eta_N(n,m)$.

В [9] отмечено, что если некоторая случайная величина распределена по закону Пуассона с параметром λ, то при $\lambda\to\infty$ она имеет асимптотически нормальное распределение с параметром (λ, λ). В связи с этим в нашем случае достаточно показать, что при $\lambda\to\infty$. распределение $\eta_N(n,m)$ есть закон Пуассона с параметром λ.

Обозначим $\varphi_\eta(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\eta_N(n,m)$, а $\varphi_\xi(t)$ – характеристическую функцию случайной величины ξ, распределенной по закону Пуассона с параметром λ.

Положим также $p\{\eta_N(n,m)=k\} = p_k$, при $k = 2[\lambda] + 1, \ldots$

Нетрудно видеть,

$$\varphi_\eta(t) - \varphi_\xi(t)\,| =$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{2[\lambda]}e^{itk}\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}(1+o(1))+\sum_{k=2[\lambda]+1}^{\infty}e^{itk}\cdot p_k-\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}\right|\le$$
$$\le\sum_{k=0}^{2[\lambda]}\left|e^{itk}\right|\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}\cdot o(1)+\sum_{k=2[\lambda]+1}^{\infty}\left|e^{itk}\right|\cdot\left(p_k+\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}\right). \quad (12)$$

Покажем, что

$$\sum_{k=2[\lambda]+1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}\to 0 \text{ при } \lambda\to\infty.$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=2[\lambda]+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} = p\{\xi > 2[\lambda]\}.$$

Применяя известное неравенство $p\{\xi \geq 2[\lambda]\} \leq exp\{-2[\lambda]\}\cdot Ee^{\xi}$, получаем

$$\sum_{k=2[\lambda]+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!} < e^{-2[\lambda]}e^{\lambda(e-1)} \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Из последнего соотношения следует, что при любом фиксированном значении t все слагаемые в (12) стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$. Следовательно, при любом фиксированном значении t

$$|\varphi_{\eta}(t) - \varphi_{\xi}(t)| \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Это, в свою очередь, означает, что при $\lambda \to \infty$ случайные величины $\eta_N(n,m)$ и ξ имеют одинаковые предельные распределения. Таким образом, утверждение теоремы 1 в случае $\lambda \to \infty$ доказано.

Рассмотрим случай $\lambda \to \lambda_0 > 0$, , $\lambda_0 = const$. Из утверждения 1) леммы и соотношения (7) следует, что $D(n,m) \to 0$ при N, $n,m \to \infty$, поэтому предельные распределения *$\eta_N(n,m)$ и $\eta_N^*(n,m)$ также совпадают и для доказательства теоремы 1* достаточно показать, что $R^* \to 0$ при N, $n,m \to \infty$.

С учетом (8) имеем $\lambda / \alpha^* = 2\cdot e\cdot \lambda^2 \cdot n\cdot N^{-1}(1+o(1))$.

Поэтому, $exp\{2\lambda - \alpha^*\} = O(1)$.

Справедливость соотношения $max(\omega, z_2) \to 0$ непосредственно следует из (10) , (11) и утверждений 1) и 2) леммы. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $n,m \to \infty$ так, что $n - m = k \geq 0$, $k = const$.

Тогда $p\{\tau(n,m)\cdot n^k \cdot p^n \leq x\} \to 1 - exp\{-x\cdot p^{-k}\cdot q^{k+1}/k!\}$.

Доказательство. Очевидно, что при любом фиксированном $x \in (0, \infty)$,

$$p\{\tau(n,m)\cdot n^k \cdot p^n > x\} = p\{\eta_{N(x)}(n,m) = 0\},$$

где $N(x) = [x/ n^k p^n]$,

поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что при любом фиксированном $x \in (0,\infty)$, величины $N(x),n,m$ и p, определенные в условии теоремы 2, удовлетворяют условию теоремы 1 со значением $\lambda(x) = x\cdot p^{-k}\cdot q^{k+1}/k!$.

Нетрудно видеть, что $\lambda(x) = D(n,m) + (N(x) - n)\cdot C(n-1,m-1)\cdot p\cdot q \sim x\cdot p^{-k}\cdot q^{k+1}/k!$.

Условие $N(x) \to \infty$, очевидно, вы... нено. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть при $n,m \to \infty$ вели... на $p \to 0$ так, что $n\cdot p \to \delta > 0$, $\delta = const$, $m/n \to \gamma > 0$, $\gamma = const$.

Тогда,

$$p\left\{\tau(n,m)\cdot\binom{n-1}{m-1}p^{m} < x\right\} \to 1 - \exp\left\{-x\cdot e^{-\delta(1-\gamma)}\right\}.$$

Доказательство теоремы 3 аналоги... доказательству теоремы 2.

Рассмотрим теперь важный с практической точки зрения случай $p = q = 1/2$.

Обозначим σ^2 – дисперсию случайн... величины $\eta_N(n,m)$.

Теорема 4. Если при $N,n \to \infty$ натуральная величина $m > 1$ изменяется так, что

$$N\cdot\binom{n-1}{m-1}\cdot 2^{-n} \to \infty, \qquad (13)$$

$$\left|\frac{m - n/2}{\sqrt{n}/2}\right| \geq \sqrt{2\ln n}, \qquad (14)$$

то

$$\lim_{N\to\infty} p\left\{\frac{\eta_N(n,m) - \lambda}{\sigma} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Доказательство. Прямым применением формулы Стирлинга нетрудно показать, что для всех m, удовлетворяющих условию (14), имеет место равенство

$$\binom{n}{m}\cdot 2^{-n} = O(n^{-3/2}). \qquad (15)$$

Оценим величину σ^2. Учитывая, что $E\nu_i = p\{\nu_i = 1\} = b_i$ при $i = 1,2,\ldots N-n+1$ и $b_i = b_j$ при $i, j \geq 2$, получаем

$$\sigma^2 = E\left\{\sum_{i=1}^{N-n+1}(\nu_i - b_i)\right\}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-n+1} E(\nu_i - b_i)^2 + 2\cdot\sum_{i=2}^{N-n+1}\left[E\nu_1\nu_i - b_1 b_2\right] +$$

$$+ 2\cdot\sum_{2\leq i<j\leq N-n+1}\left[E\nu_i\nu_j - b_2^2\right].$$

Учитывая, что $E\nu_i\nu_j = E\nu_i\cdot E\nu_j$ при $|i-j| \geq n+1$, а также, что $E\nu_i\nu_j = b_{i,j}$, из последнего соотношения получаем

$$\sigma^2 = b_1(1-b_1) + (N-n)b_2(1-b_2) + 2\sum_{i=2}^{n+1}(b_{1,i} - b_1\cdot b_2) +$$

$$2\sum_{i=2}^{N-n}\sum_{j=i+1}^{\min(i+n,N-n+1)}(b_{i,j} - b_2^2) \geq$$

$\geq (N-n)\, b_2\, (1-b_2) - 2\,(n+1)\, b_1\, b_2 -$
$N-n)\cdot n\cdot (b_2)^2 = (b_1 + (N-n)\, b_2)\cdot[1 - b_2 -$
$.(n+1)/(N-n)\, b_1 - 2n\, b_2] - b_1 + b_1 b_2 +$
$\imath+1)(N-n)\,(b_1)^2 + 2\, n\, b_1 b_2 \geq \lambda\,[1 - b_2 -$
$)/(N-n)\, b_1 - 2\, n\, b_2 - b_1 / \lambda] = \lambda\,(1 + o\,(1)).$

Поскольку из (14) и (15) следует, что $n\cdot$ $n^{-1/2})$ при $n \to \infty$, а также, что

$n / N \to 0$ при $N, n \to \infty$.

Таким образом, из (13) – (15) и сделан- лше замечаний следует, что $\sigma^2 \to \infty$ при ∞.

Обозначим λ^* и $(\sigma^*)^2$ соответственно :е и дисперсию случайной величины $\imath) = \eta_N(n,m) - \nu_1$ и рассмотрим величину $\imath) - \lambda)/\sigma - (\eta_N^*(n,m) - \lambda^*)/\sigma = (\nu_1 - b_1)/\sigma$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторое фиксированное . Применяя неравенство Чебышева, по- м

$$p\left\{\left|\frac{\nu_1 - b_1}{\sigma}\right| > \sigma\right\} \leq \frac{D\nu_1}{\sigma^2 \cdot \varepsilon^2} \to 0 \qquad (16)$$

$\to \infty$.

Далее заметим, что

$$\sigma^2 - (\sigma^*)^2 = E(\nu_1 - b_1)^2 +$$
$$+2\sum_{i=2}^{n+1} E(\nu_1 \nu_i - b_1 b_i) = b_1(1-b_1) + 2\sum_{i=2}^{n+1}(b_{1,i} - b_1 \cdot b_i) \leq$$
$$\leq b_1(1-b_1) + 2\sum_{i=2}^{n+1} b_{1,i} \leq b_1(1-b_1) + n \cdot b_2,$$

ак $b_{1,i} \leq b_{i-} b_2$ при $i = \overline{2, n+1}$.

С другой стороны $\sigma^2 - (\sigma^*)^2 \geq b_1\,(1 - b_1)$ $_1 b_2$.

Поскольку $b_1\,(1 - b_1) \leq 1$, а $n\cdot b_2 = o\,(1)$, $(\sigma^*)^2/\,\sigma^2 \to 0$ при $N \to \infty$ и, следовательно, $^*)^2 \cdot (1 + o\,(1))$.

Из последнего соотношения, а также 6) следует, что предельные распреде- : случайных величин $(\eta_N(n,m) - \lambda)/\sigma$ и $:,m) - \lambda^*)/\sigma^*$ совпадают. Таким образом, оказательства теоремы 4 достаточно по- ь, что при выполнении (13) и (14) имеет) равенство

$$\lim_{N\to\infty} p\left\{\frac{\eta_N^*(n,m) - \lambda^*}{\sigma^*} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \qquad (17)$$

Покажем, что для стационарной после- :ельности $\{\nu_i\}$, $i = 2, 3, \ldots$ выполняется ус- : теоремы 18.5. 1 работы [10]. В соответс- с [10] для этого достаточно показать что

$$\varphi_n(k) = \max_{k \leq t \leq n}\ \max_{i,j \in \{0,1\}} r_{i,j}(t) \to 0 \qquad (18)$$

при n, $k \to \infty$, где $r_{ij}(t) = |\, p\{\nu_2 = i,\ \nu_t = j\} - p\{\nu_2 = i\}\cdot p\{\nu_t = j\}| / p\{\nu_2 = i\}$.

Пусть $k \geq 4$. Рассмотрим величину $max\ r_{11}(t)$, $k \leq t \leq n$.

Очевидно, что $r_{11}(t) = = |\, b_{2,t} - b_2\, b_t| / / b_2 \leq b_{2,t} / b_2 + b_t$.

Из соотношения (15) следует, что

$$b_2 = \binom{n-1}{m-1}\cdot 2^{-(n+1)} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Далее заметим, что

$$b_{2,t} = \sum_{s=0}^{m-2} 2^{-t+2}\binom{n-t+1}{s}\cdot\binom{t-3}{m-s-1}\cdot\binom{t-3}{m-s-2}\cdot\binom{n-1}{m-1}^{-1} \leq$$

$$\leq 2^{-t+2}\max_{0<s<m-2}\binom{t-3}{m-s-1}\cdot\frac{\binom{n-2}{m-2}}{\binom{n-1}{m-1}} = 2^{-t+2}\max_{0<s<m-2}\binom{t-3}{m-s-1}\cdot\frac{m-1}{n-1}.$$

Поскольку

$$\max_{0\leq s\leq m-2}\binom{t-3}{m-s-1} \leq \max_{0\leq s\leq t-3}\binom{t-3}{s} = \binom{t-3}{\left[\frac{t-3}{2}\right]},$$

то

$$\frac{b_{2,t}}{b_2} \leq \frac{1}{2}\cdot\binom{t-3}{\left[\frac{t-3}{2}\right]}\cdot 2^{-(t-3)}.$$

Тогда

$$\max_{k\leq t\leq n} r_{11}(t) \leq \frac{1}{2}\cdot\binom{k-3}{\left[\frac{k-3}{2}\right]}\cdot 2^{-(k-3)} + b_t \to 0$$

при n, $k \to \infty$.

Рассмотрим величину $r_{10}(t)$, равную $r_{10}(t) = |\, p\{\nu_2 = 1,\ \nu_t = 0\} - p\{\nu_2 = 1\}\cdot p\{\nu_t = 0\}| / / p\{\nu_2 = 1\}$.

Принимая во внимание очевидное равенство $p\{\nu_2 = 1\} = p\{\nu_2 = 1, \nu_t = 0\} + p\{\nu_2 = 1, \nu_t = 1\}$, получаем $r_{10}(t) = |\, b_2 - b_{2,t} - b_2\,(1 - b_t)| / / b_2 = |b_{2,t} - b_2\, b_t| / b_2 = r_{11}(t)$.

Рассмотрим величину $r_{01}(t)$ равную $r_{01}(t) = |\, p\{\nu_2 = 0,\ \nu_t = 1\} - p\{\nu_2 = 0,\ \nu_t = 1\}| / / p\{\nu_2 = 0\}$.

Принимая во внимание равенство $p\{\nu_t = 1\} = p\{\nu_2 = 0, \nu_t = 1\} + p\{\nu_2 = 1, \nu_t = 1\}$, получаем $r_{01}(t) = |\, b_t - b_2\, b_t - (1 - b_2)\, b_t| / (1 - b_2) = = |\, b_{2,t} - b_2\, b_t| / (1 - b_2) = r_{11}(t)\, b_2 / (1 - b_2) \leq$

$\leq r_{11}(t)$ при всех n, начиная с некоторого номера n_0.

Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно показать, что $r_{00}(t) = r_{01}(t)$.

Из сказанного выше следует, что функция $\varphi_n(k)$, определяемая соотношением (17), стремится к нулю при $n,k \to \infty$, и последовательность $\{v_i\}$, i=2,3,... удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания. Таким образом, все условия теоремы 18.5.1 работы [10] выполнены и для случайной величины $\eta_N^*(n,m)$ справедливо соотношение (17). Теорема 4 доказана.

Библиографический список

1. Новак, С.Ю. О распределении максимума частичных сумм Эрдеша-Реньи / С.Ю. Новак // Теория вероятностей и ее применения. – 1997. – Т. 42. – Вып. 2. – С. 274–293.
2. Питербарг, В.И. О больших скачках случайного блуждания / В.И. Питербарг // Теория вероятностей и ее применения. – 1991. – Т. 36. – Вып. 1. – С. 54–64.
3. Довгалюк, В.В. Большие уклонения траекторий пуассоновского процесса. – Вероятностные процессы и их приложения / В.В. Довгалюк, В.И. Питербарг. – М.: МИЭМ, 1989. – С. 112–117.
4. Козлов, М.В. О частичных суммах Эрдеша-Реньи: Большие уклонения, условное поведение / М.В. Козлов // Теория вероятностей и ее применения. – Т. 46. – Вып. 4. – 2001. – С. 678–696.
5. Лось, А.Б. О предельном распределении максимума процесса скользящего суммирования (частичных сумм Эрдеша-Реньи) / А.Б. Лось // Вестник МГУЛ – Лесной вестник. – № 3(79). – 2011. – С. 185–
6. Зубков, А.М. Оценки для сумм конечно-зависимых индикаторов и для момента первого появления редкого события / А.М. Зубков // Тр. МИАН СССР, 1986. – Т. 177. – С. 33–46.
7. Naus J.I. Approximations for distributions of scan statistics. – J. Amer. Statistic Assoc., 1974, v. 69. – 810–815.
8. Лось, А.Б. О скорости сходимости к закону Пуассона числа достижений заданного уровня процессом скользящего суммирования / А.Б. Лось // Вестник МГУЛ–Лесной вестник, 2012.
9. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – М: Мир, 1964. – Т. – 498 с.
10. Ибрагимов, И.А. Независимые и стационарно связанные величины / И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник. – М: Наука, 1965. – 523 с.

НЕЧЕТКАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ ВТОРОГО ТИПА

Н.Э. МАЛОЛЕПШАЯ, *асс. каф. высшей математики МГУЛ*

olga.m.pol@yandex.ru

Для анализа зависимостей между качественными характеристиками и прогноза их значений используются методы нечеткого регрессионного анализа, которые значительно расширили границы применения классического регрессионного анализа, то есть позволили строить регрессионные зависимости на основе нечеткой исходной информации [1]. Однако в настоящее время методы нечеткого регрессионного анализа ограничены рассмотрением только нечетких чисел первого типа, что можно отнести к их недостаткам и причинам достаточно грубой формализации исходной информации [2]. Поскольку представления разных людей об одном и том же понятии могут различаться, то устранить недостатки нечеткого регрессионного анализа позволяют нечеткие числа второго типа, которые имеют достаточно степеней свободы, чтобы сохранить индивидуальные сведения субъектов об определенном понятии и повысить информативность исходных данных. В то же время с нечеткими числами второго типа работать

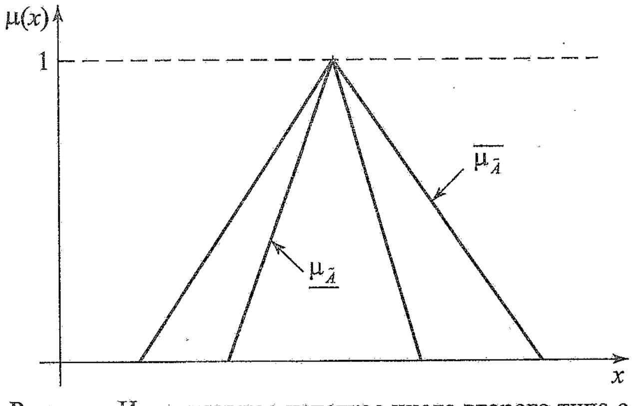

Рисунок. Интервальное нечеткое числа второго типа с $LMF\ \underline{\mu_{\tilde{A}}}$ и $UMF\ \overline{\mu_{\tilde{A}}}$