**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию
Московский государственный институт электроники и математики
(технический университет)**

**Кафедра алгебры
и математической логики**

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

**Методические указания
к домашней контрольной работе
по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»**

**Москва
2008**

Составители: канд. физ.-мат. наук К.К. Андреев;
канд. физ.-мат. наук И.К. Бусяцкая

УДК 512.8

Евклидовы пространства: Метод. указания к домашней контрольной работе по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»./ Моск. гос. ин-т электроники и математики; Сост.: И.К. Бусяцкая, К.К. Андреев. М., 2008. – 27 с.

На конкретных примерах излагаются способы решения задач домашней контрольной работы по теме «Евклидовы пространства». Приводится ряд дополнительных сведений из теории евклидовых пространств, некоторые из которых доказываются, а некоторые предоставляются для доказательства студентам.

Для студентов первого курса всех дневных факультетов.

ISBN

Условия задач

Общие условия ко всем вариантам

В пространстве $\mathbf{R}^5$ даны векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$.

1. Найти ортонормальный базис линейной оболочки системы векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$.

2. Найти проекцию и ортогональную составляющую вектора $\boldsymbol{f}_3$ при ортогональном проектировании на линейную оболочку векторов $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$,

а) используя матрицу Грама векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$;

б) используя ортонормальный базис, найденный в пункте 1.

3. К системе уравнений $\boldsymbol{a}_1x_1 + \boldsymbol{a}_2x_2 = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3$, применить метод наименьших квадратов. Найти $\delta^2 = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}_1x_1 - \boldsymbol{a}_2x_2|^2$.

Примечание. Процесс ортогонализации следует применять к векторам $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ в том порядке, в котором они выписаны.

Условия вариантов

Даны векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$.

1. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-5\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-4\\-3\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-4\\4\\4\\6\end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\5\\9\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-7\\2\\-1\\2\end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\-7\\-7\\-11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-8\\-2\\-4\\-4\end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\\8\\13\\14\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-3\\3\\5\\5\end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-5\\-10\\-11\\-16\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-5\\5\\3\\7\end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\9\\11\\17\\19\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-7\\-3\\-3\\-5\end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\5\\9\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-8\\-2\\-4\\-4\end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\\8\\13\\14\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-7\\2\\-1\\2\end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\\8\\13\\14\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-7\\2\\-1\\2\end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\4\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-5\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-4\\4\\4\\6\end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\1\\6\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-8\\-2\\-4\\-4\end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\5\\2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-1\\6\\9\\10\end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\5\\0\\7\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\-2\\2\\6\\4\end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-1\\6\\1\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-2\\7\\8\\11\end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\6\\-1\\8\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-4\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\-2\\7\\0\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\-3\\-2\\3\\-2\end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}.$

20. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$

21. $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$

22. $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -14 \\ 25 \\ -5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$

23. $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -23 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$

24. $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 19 \\ -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$

25. $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ -17 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$

26. $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$

27. $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$

28. $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$

29. $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$

30. $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 19 \\ -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$

§ 1. Основные определения и примеры

Пусть V – произвольное линейное пространство над полем $\mathbf{R}$.

Определение 1. *Скалярным произведением* в V называется отображение, ставящее в соответствие каждой упорядоченной паре векторов a, b из V некоторое действительное число, обозначаемое (a, b), причём так, что выполняются следующие условия.

1. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$ для любых $a, b, c \in V$.
2. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$ для любых $a, b \in V$ и любого $\lambda \in \mathbf{R}$. (1)
3. $(a, b) = (b, a)$ для любых $a, b \in V$.
4. $(a, a) > 0$ для любого ненулевого вектора $a \in V$.

Первые два свойства в совокупности называются *линейностью по первому переменному*, третье – *симметричностью*, последнее – *положительной определённостью* скалярного произведения.

Из симметричности скалярного произведения вытекает его линейность и по второму переменному:

$$(a, b + c) = (b + c, a) = (b, a) + (c, a) = (a, b) + (a, c);$$
$$(a, \lambda b) = (\lambda b, a) = \lambda(b, a) = \lambda(a, b).$$

Таким образом, скалярное произведение − билинейная, симметрическая и положительно определённая функция двух векторных переменных, заданная в линейном пространстве V.

Определение 2. Линейное пространство вместе с заданным в нём скалярным произведением называется *евклидовым пространством* и обозначается через E.

Заметим, что в одном и том же линейном пространстве V можно задавать различные скалярные произведения, тем самым превращая его в различные евклидовы пространства E.

Пример 1. Рассмотрим геометрическое пространство векторов V^2 или V^3 и привычное нам скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \qquad (2)$$

В курсе аналитической геометрии было доказано, что так определённое скалярное произведение удовлетворяет вышеприведённым условиям 1 – 4, причём если $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, а $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$, то скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \qquad (3)$$

Пример 2. Возьмём в качестве V координатное пространство $\mathbf{R}^n$ и определим скалярное произведение по следующей формуле: если

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то положим $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. (4)

Несложно проверить выполнение условий 1 – 4 (проверьте!). Такое скалярное произведение называется *стандартным* скалярным произведением в координатном пространстве $\mathbf{R}^n$, а соответствующее евклидово пространство − *стандартным евклидовым пространством* E^n.

Заметим, что формула (3) является частным случаем (n = 3) формулы (4). Однако существенное отличие состоит в том, что в примере 1 она выводилась из определения скалярного произведения, в котором использовались геометрические характеристики − длины и углы между векторами, − в то время как в примере 2 формула (4) сама является определением скалярного произведения.

Пусть E − произвольное евклидово пространство.

Определение 3. *Длиной* вектора a называется число $|a| = \sqrt{(a,a)}$.

Из условия 4 определения 1 следует, что любой ненулевой вектор имеет положительную длину.

Рассмотрим нулевой вектор и проверим, что $(0, b) = 0$ для любого вектора b. Действительно: $(0, b) = (0·0, b) = 0·(0, b) = 0$. Следовательно, $(0, 0) = 0$ и нулевой вектор имеет нулевую длину.

Определение 4. *Углом* между ненулевыми векторами a и b называется угол φ, $0 \le \varphi \le \pi$, такой, что $\cos\varphi = \dfrac{(a,b)}{|a||b|}$.

Однако, прежде чем пользоваться этим определением, необходимо проверить, что для любых двух ненулевых векторов угол между ними корректно определён, т. е. что $\dfrac{|(a,b)|}{|a||b|} \le 1$. Заметим, что если хотя бы один из векторов равен 0, то угол между ними не определён (можно считать любое число значением этого угла).

Теорема 1 (*неравенство Коши*[1] *− Буняковского*[2]). Для любых двух векторов a, b произвольного евклидова пространства E выполняется неравенство

$$|(a, b)| \le |a|\cdot|b|,$$

---

[1] (Augustin Louis Cauchy, 1789 −1857) — французский математик.

[2] (1804 − 1889) − российский математик.

причём равенство достигается в том и только в том случае, когда векторы коллинеарны.

Доказательство. При $a = 0$ оба утверждения теоремы очевидны (имеет место равенство). Поэтому в дальнейшем можно считать, что $a \neq 0$. Возьмём и зафиксируем два вектора a, $b \in E$, $a \neq 0$. Рассмотрим функцию действительного переменного t:

$$f(t) = (ta + b, ta + b) = (a, a)t^2 + 2(a, b)t + (b, b).$$

Как видно, функция представляет собою квадратный трёхчлен со старшим ненулевым коэффициентом, значения которого неотрицательны при любом t (т. к. это скалярный квадрат!). Следовательно, дискриминант квадратного трёхчлена не может быть положительным. Вычисляем четверть дискриминанта:

$$\frac{D}{4} = (a, b)^2 - (a, a)(b, b) \le 0.$$

Отсюда $(a, b)^2 \le (a, a)(b, b)$, а $|(a, b)| \le \sqrt{(a,a)}\sqrt{(b,b)}$,что и даёт требуемое неравенство.

Пусть теперь векторы a и b коллинеарны и $a \neq 0$; тогда $b = \lambda a$ для подходящего действительного коэффициента λ. Имеем:

$$|(a, b)| = |(a, \lambda a)| = |\lambda|\cdot|a|^2 = |a|\cdot|b|.$$

Обратно, пусть имеет место равенство $|(a, b)| = |a|\cdot|b|$ и $a \neq 0$. Тогда введённый выше квадратный трёхчлен имеет нулевой дискриминант и, следовательно, обладает корнем, скажем, t_0. Имеем: $(t_0a + b, t_0a + b) = 0$, $t_0a + b = 0$, откуда $b = -t_0a$, что и означает коллинеарность векторов a и b.

Следствие (*неравенство треугольника*)**.** Для любых двух векторов a, b произвольного евклидова пространства E выполняется неравенство

$$|a + b| \le |a| + |b|.$$

Доказательство. В самом деле,

$$|a + b|^2 = (a + b, a + b) = (a, a) + 2(a, b) + (b, b) \le (a, a) + 2|(a, b)| + (b, b) \le$$
$$\le |a|^2 + 2|a|\cdot|b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2.$$

Пример 3. Рассмотрим теперь евклидово пространство совершенно иного рода. А именно, в качестве линейного пространства V возьмём множество всех функций, определённых и непрерывных на отрезке $[a, b]$ ($a < b$) (это пространство обозначается обычно $C\,[a, b]$). Такие функции можно складывать (сумма непрерывных функций есть непрерывная функция) и умножать на скаляры (произведение непрерывной функции на число есть непрерывная функция), причём выполняются обычные восемь аксиом линейного пространства. Это пространство не является конечномерным – в нём нет конечного базиса. Определим теперь в нём скалярное произведение по следующей формуле: если $f(t), g(t) \in E$, то

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)dt.$$

Произведение двух непрерывных функций непрерывно, а любая непрерывная функция интегрируема, так что в правой части всегда получится определённое действительное число. Используя свойства определённого интеграла, несложно проверить (проверьте!) выполнение условий 1 – 3. Выполнение условия 4 вытекает из теоремы математического анализа, утверждающей, что если значение определённого интеграла от непрерывной неотрицательной на отрезке функции равно нулю, то и сама функция тождественно равна нулю (и, конечно, из того, что значение определённого интеграла от неотрицательной функции неотрицательно). Полученное евклидово пространство обозначим $C_2\,[a, b]$.

Рассмотрим в пространстве $C_2\,[a, b]$ подмножество $P_n\,[x]$ многочленов степени не выше n; это подмножество является линейным подпространством, причём конечномерным, так как в качестве базиса можно взять, например, функции $1, x, \ldots, x^n$.

Таким образом, $P_n\,[x]$ − пример ещё одного конечномерного евклидова пространства (скалярное произведение в $P_n\,[x]$ определяется так же, как и во всём пространстве $C_2\,[a, b]$).

Отметим, что неравенство Коши − Буняковского, доказанное выше для произвольного евклидова пространства, принимает конкретный вид в различных евклидовых пространствах. Так, в пространстве E^n оно равносильно утверждению: для любых двух наборов действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\,.$$

В пространстве $C_2\,[a, b]$ получаем утверждение: для любых двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

В дальнейшем мы будем изучать только конечномерные евклидовы пространства.

Определение 5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ − конечный набор векторов евклидова пространства E. Вычислим попарные скалярные произведения этих векторов $(a_i, a_j) = g_{ij}$. *Матрицей Грама*[3] системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется матрица

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (g_{ij}).$$

Теорема 2. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ − базис евклидова пространства E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, $G = G(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Тогда $(x, y) = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)G\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Если обозначить $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$, то последнее равенство можно записать более кратко: $(x, y) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} G \boldsymbol{y}$.

Доказательство. $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j g_{ij}$. Матричная запись этой суммы даёт требуемое утверждение теоремы. (Проверьте! Вычислите $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} G \boldsymbol{y}$.)

Эта теорема показывает, что, зная матрицу $G(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ − матрицу попарных скалярных произведений базисных векторов, − можно вычислить скалярное произведение любой пары векторов евклидова пространства.

Заметим, что матрица G не может быть произвольной. Условия 1 − 4 определения скалярного произведения накладывают на неё ряд ограничений. Так, свойство симметрии требует, чтобы $G^{\mathrm{T}} = G$, а условие положительной определённости (как это доказывается в теории билинейных форм) равносильно положительности всех главных миноров матрицы , т. е.

$$g_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,\ |G| > 0.$$

---

[3] Йорген Педерсен Грам (Jørgen Pedersen Gram, 1850 − 1916) − датский математик.

Таким образом, зафиксировав базис линейного пространства и взяв матрицу G, удовлетворяющую вышеприведённым условиям, можно задать скалярное произведение по формуле $(x, y) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} G \boldsymbol{y}$ и тем самым превратить линейное пространство в евклидово. Следовательно, на базе одного линейного пространства можно построить бесконечно много различных евклидовых пространств.

§2. Ортогональные системы векторов

Рассмотрим два вектора a и b в евклидовом пространстве E.

Определение 6. Векторы a и b называются *ортогональными* (обозначение: $a \perp b$), если $(a, b) = 0$.

Для ненулевых ортогональных векторов $\cos\varphi = \dfrac{(a,b)}{|a||b|} = 0$, а угол $\varphi =$ $= \dfrac{\pi}{2}$.

Заметим, что в евклидовых пространствах над другими полями (например, над полем **C**) понятие угла между векторами не вводится, однако понятие ортогональности ($(a, b) = 0$) сохраняется.

Очевидно, что нулевой вектор 0 ортогонален любому вектору евклидова пространства, а вектор, ортогональный любому вектору евклидова пространства (в том числе и самому себе), может быть только нулевым. Обратите внимание, что понятия ‛векторы ортогональны’ и ‛угол между векторами равен $\dfrac{\pi}{2}$’ не тождественны.

Определение 7. Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется *ортогональною*, если каждый её вектор ортогонален любому другому вектору этой системы. Ортогональная система векторов называется *ортонормальной* (ортонормированной), если вдобавок длины всех векторов этой системы равны единице.

Если ортогональная или ортонормальная система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ является базисом евклидова пространства, то этот базис называется соответственно *ортогональным* или *ортонормальным*.

В пространстве V^3 примера 1 векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ образуют ортонормальный базис. В рассмотренном в примере 2 пространстве E^n ортонормальный базис образуют векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (проверьте!).}$$

Определение 8. Базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ называется *стандартным базисом* в E^n.

Если в евклидовом пространстве имеется ортонормальный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то матрица Грама $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ будет единичной, т. к. $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$ $(i \neq j)$ и $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 1$, и формула для вычисления скалярного произведения принимает вид: если $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, а $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, то $(x, y) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} E \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Таким образом, при наличии ортонормального базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в евклидовом пространстве E его можно «отождествить» со стандартным евклидовым пространством E^n. Действительно, определим отображение φ: $E \to E^n$ по следующей формуле: если $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, то $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E^n$. Отображение φ является биективным и линейным (проверьте!) и, кроме того, сохраняет скалярное произведение: $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$. Такие отображения называются *изометрическими изоморфизмами* евклидовых пространств.

Следующие две теоремы описывают важные свойства ортогональных систем.

Теорема 3. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Доказательство. Пусть данная система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ортогональна и состоит из ненулевых векторов. Предположим, что некоторая их линейная комбинация равна нулю:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ \ldots\ + \lambda_n a_n = 0.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на какой-нибудь вектор a_i данной системы:

$$\lambda_1(a_1, a_i) + \lambda_2(a_2, a_i) + \ \ldots\ + \lambda_n(a_n, a_i) = 0.$$

В левой части этого равенства все скалярные произведения (a_k, a_i), кроме (a_i, a_i), равны нулю (в силу ортогональности системы). Следовательно,

$$\lambda_i(a_i, a_i) = 0,$$

откуда $\lambda_i = 0$, т. к. $(a_i, a_i) \neq 0$ (иначе было бы $a_i = 0$). Таким образом, все коэффициенты λ_i равны нулю, что и означает линейную независимость системы, QED[4].

Теорема 4 (Пифагора[5]). Для любой ортогональной системы векторов квадрат длины суммы всех векторов системы равен сумме квадратов длин всех векторов этой системы.

---

[4] Quod erat demonstrandum (*лат.*) ‘что и требовалось доказать’.
[5] Пифагор Самосский (Πυθαγόρας, 570 – 490 до Р. Х.) – древнегреческий математик.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – данная система векторов. Тогда

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n|^2 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n, a_1 + a_2 + \ldots + a_n) =$$

$$= \sum_{i,j}(a_i, a_j) = \sum_{i=1}^{n}(a_i, a_i) + 2\sum_{i<j}(a_i, a_j).$$

Так как все слагаемые последней суммы равны нулю (векторы ортогональны), получаем:

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2, \text{ QED.}$$

Определение 9. *Ортогональным дополнением* к данному вектору a называется множество векторов

$$a^{\perp} = \{b \in E\colon b \perp a\}.$$

Предложение 1. Ортогональное дополнение к любому вектору является линейным подпространством.

Доказательство. Обозначим $a^{\perp}$ через L. Надо доказать, что L есть линейное подпространство. Проверим выполнение трёх пунктов определения линейного подпространства.

1. $0 \in L$. В самом деле, $0 \in a^{\perp}$, т. к. $0 \perp a$.

2. Если b и $c \in L$, то $b + c \in L$. Действительно, данные условия означают, что $(b, a) = 0$ и $(c, a) = 0$; но тогда и $(b + c, a) = (b, a) + (c, a) = 0 + 0 = 0$.

3. Если $b \in L$ и $\lambda \in \mathbf{R}$, то $\lambda b \in L$. В самом деле, по условию $(b, a) = 0$; но тогда и $(\lambda b, a) = \lambda(b, a) = \lambda \cdot 0 = 0$.

Предложение доказано.

Определение 10. *Ортогональным дополнением* к данному множеству векторов M называется множество векторов

$$M^{\perp} = \{a \in E\colon b \in M \Rightarrow a \perp b\}.$$

Иными словами, для принадлежности вектора множеству $M^{\perp}$ требуется, чтобы он был ортогонален каждому вектору из M.

Теорема 5. Ортогональное дополнение к любому множеству M векторов является линейным подпространством.

Доказательство. Легко понять, что $M^{\perp} = \bigcap\limits_{b \in M} b^{\perp}$. Так как пересечение любой совокупности подпространств есть (линейное) подпространство, получаем, что $M^{\perp}$ есть также подпространство, QED.

Замечание. Можно считать, что $\varnothing^{\perp} = E$. Из определения следует, что $0^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$. Точно так же легко видеть, что $E^{\perp} = \{0\}$. В самом деле, если вектор принадлежит $E^{\perp}$, то это означает, что он ортогонален каждому вектору из E; в частности, он ортогонален самому себе, откуда вытекает (свойство 4 скалярного произведения), что он нулевой.

Предложение 2. Если векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ортогональны вектору b, то любая линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_1 a_2 + \ldots + \lambda_1 a_n$ ортогональна вектору b.

Доказательство. В самом деле, из условия вытекает, что $a_1, a_2, \ldots, a_n \in$ $\in b^{\perp}$. Так как $b^{\perp}$ является линейным подпространством, то линейная оболочка $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \subseteq b^{\perp}$ в силу минимального свойства линейной оболочки (если система векторов лежит в каком-то подпространстве, то линейная оболочка этой системы векторов также лежит в этом подпространстве). Так как $\lambda_1 a_1 +$ $+ \lambda_1 a_2 + \ldots + \lambda_1 a_n \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$, получаем, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_1 a_2 + \ldots + \lambda_1 a_n \in b^{\perp}$, что означает, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_1 a_2 + \ldots + \lambda_1 a_n \perp b$, QED.

Определение 11. Будем говорить, что вектор b *ортогонален* множеству M ($b \perp M$), если он ортогонален каждому вектору из этого множества.

Предложение 3. Вектор b тогда и только тогда ортогонален линейной оболочке системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, когда он ортогонален каждому вектору этой системы.

Доказательство. Если вектор b ортогонален каждому вектору системы, то в силу предложения 2 он ортогонален каждому вектору линейной оболочки. Обратное очевидно.

Следствие. Вектор тогда и только тогда ортогонален подпространству, когда он ортогонален каждому вектору какого-нибудь базиса этого подпространства.

Примеры.

1. Рассмотрим пространство V^3, скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) =$ $= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$. Вектор $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ принадлежит ортогональному дополнению $\boldsymbol{a}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, что равносильно условию $x + 2y + 3z = 0$. Таким образом, $\boldsymbol{a}^{\perp}$ – это множество всех векторов, компланарных плоскости $x + 2y + 3z = 0$.

2. Рассмотрим стандартное евклидово пространство E^4 и систему двух линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Множество всех решений этой системы M является линейным подпространством евклидова пространства E^4, причём $\dim M = 4 - \operatorname{rk} A$, где $A =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ – матрица системы. Приведём эту матрицу к главному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\mathrm{rk}\, A = 2$, $\dim M = 2$, а в качестве базиса подпространства M можно взять векторы $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $M = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$. Найдём $M^{\perp}$. Согласно предложению 4 множество $M^{\perp}$ состоит из векторов $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, для которых $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2) = 0$. Таким образом, $M^{\perp}$ описывается следующей системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0; \\ -x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Матрица этой системы $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеет ранг, равный двум. Следовательно, $\dim M^{\perp} = 2$, а векторы $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют базис подпространства $M^{\perp}$.

Базисы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ являются ортогональными в подпространствах M и $M^{\perp}$ соответственно. Чтобы получить в этих подпространствах ортонормальные базисы, нужно каждый из векторов поделить на его длину. Длины всех векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ равны $\sqrt{2}$.

Заметим, что набор векторов

$$\boldsymbol{a}_1^0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

является примером ортонормального базиса во всём пространстве E^4, причём базиса, отличного от стандартного, а само пространство E^4 является прямой суммой подпространств M и $M^{\perp}$: $E^4 = M \oplus M^{\perp}$, т. е. любой вектор $\boldsymbol{a} \in E^4$ может быть представлен единственным образом в виде $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{b} \in M$, а $\boldsymbol{c} \in M^{\perp}$.

§ 3. Ортогональная проекция

Определение 12. Пусть L − линейное подпространство евклидова пространства E, a − произвольный вектор пространства E. Если $a = b + c$, причём $b \in L$, $c \perp L$ ($c \in L^{\perp}$), то b называется *ортогональной проекцией* вектора a на подпространство L ($\mathrm{pr}_L a$), а c − *ортогональной составляющей* при (ортогональном) проектировании вектора a на подпространство ($\mathrm{ort}_L a$).

Таким образом, проекция вектора a на подпространство L − это вектор b, принадлежащий этому подпространству ($b \in L$) и такой, что $a - b \perp L$ ($a - b \in L^{\perp}$).

Теорема 6. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая, если они существуют, определяются единственным образом.

Доказательство. Пусть

$$a = b_1 + c_1 = b_2 + c_2,$$

причём b_1 и $b_2 \in L$, c_1 и $c_2 \perp L$. Имеем:

$$b_1 - b_2 = c_2 - c_1,$$

так что этот вектор принадлежит одновременно и L, и $L^{\perp}$. Значит, он ортогонален самому себе, что возможно только для нулевого вектора:

$$b_1 - b_2 = c_2 - c_1 = 0,$$

откуда $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

Что касается вопроса о существовании проекции вектора на некоторое линейное подпространство L, то он не так очевиден. Ниже будет показано, что в случае конечномерного подпространства евклидова пространства (в частности, во всех случаях, когда само евклидово пространство конечномерно), ортогональная проекция, а равно и ортогональная составляющая, обязательно существуют. Вместе с тем в бесконечномерных евклидовых пространствах можно привести примеры векторов и подпространств, для которых ортогональной проекции нет.

Теорема 7 (о линейности проекции)**.** Если существуют $\mathrm{pr}_L a$ и $\mathrm{pr}_L b$, то существует и $\mathrm{pr}_L(\alpha a + \beta b)$ и она равна $\alpha \mathrm{pr}_L a + \beta \mathrm{pr}_L b$.

Доказательство. В силу линейности подпространства L из того, что $\mathrm{pr}_L a \in L$ и $\mathrm{pr}_L b \in L$, следует, что $\alpha \mathrm{pr}_L a + \beta \mathrm{pr}_L b \in L$ при любых α и β. Таким образом, для доказательства равенства $\mathrm{pr}_L(\alpha a + \beta b) = \alpha \mathrm{pr}_L a + \beta \mathrm{pr}_L b$ достаточно проверить, что вектор $(\alpha a + \beta b) - (\alpha \mathrm{pr}_L a + \beta \mathrm{pr}_L b) \in L^{\perp}$. Но $(\alpha a + \beta b) - (\alpha \mathrm{pr}_L a + \beta \mathrm{pr}_L b) = \alpha(a - \mathrm{pr}_L a) + \beta(b - \mathrm{pr}_L b)$, и в силу линейности подпространства $L^{\perp}$ наш вектор принадлежит этому подпространству.

Теорема 8 (о минимизирующем свойстве проекции)**.** Пусть a − произвольный вектор евклидова пространства E, $\mathrm{pr}_L a$ − его ортогональная проекция на линейное подпространство L; тогда для любого вектора $b \in L$ выполняется неравенство $|a - b| \geq |a - \mathrm{pr}_L a|$, причём равенство возможно только при $b = \mathrm{pr}_L a$.

Доказательство. Запишем вектор $a - b$ в виде $(a - \mathrm{pr}_L a) + (\mathrm{pr}_L a - b) = \mathrm{ort}_L a + (\mathrm{pr}_L a - b)$. Вектор $\mathrm{ort}_L a \perp L$, а вектор $\mathrm{pr}_L a - b \in L$. Применим теорему Пифагора:

$$|a - b|^2 = |(a - \mathrm{pr}_L a) + (\mathrm{pr}_L a - b)|^2 = |a - \mathrm{pr}_L a|^2 + |\mathrm{pr}_L a - b|^2 \geq |a - \mathrm{pr}_L a|^2.$$

Следовательно, $|a - b| \geq |a - \mathrm{pr}_L a|$, и равенство возможно только если $|\mathrm{pr}_L a - b| = 0$, т. е. $b = \mathrm{pr}_L a$.

Заметим, что $a - \mathrm{pr}_L a = \mathrm{ort}_L a$ − перпендикуляр к подпространству L, а вектор $a - b$, если $b \neq \mathrm{pr}_L a$, естественно назвать наклонной к подпространству L. Таким образом, теорема утверждает, что в произвольном евклидовом пространстве перпендикуляр короче любой наклонной.

Вернёмся к вопросу о существовании проекции вектора на подпространство.

Теорема 9. Пусть L − линейное подпространство евклидова пространства E, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ − ортонормальный базис этого подпространства. Тогда для любого вектора a пространства E существует проекция на подпространство L, равная

$$p = (a, u_1)u_1 + (a, u_2)u_2 + \ldots + (a, u_n)u_n.$$

Доказательство. Так как вектор p, очевидно, лежит в L, то достаточно доказать, что вектор $a - p$ ортогонален подпространству L, а для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что он ортогонален каждому вектору базиса подпространства L. Проверяем:

$$(a - p, u_i) = (a, u_i) - ((a, u_1)(u_1, u_i) + (a, u_2)(u_2, u_i) + \ldots + (a, u_n)(u_n, u_i)) =$$
$$= (a, u_i) - (a, u_i)\,(u_i, u_i) = 0.$$

Мы использовали тот факт, что все скалярные произведения (u_k, u_i) равны нулю, за исключением только (u_i, u_i), которое равно единице. Теорема доказана.

Следствие. Если подпространство евклидова пространства обладает ортонормальным базисом, то существует ортогональная проекция любого вектора на это подпространство.

Таким образом, доказанная выше теорема связывает существование ортогональной проекции вектора на подпространство с существованием ортогонального базиса в этом подпространстве. А ортогональный базис легко превратить в ортонормальный, поделив все его векторы на их длины (ни один из них не равен нулю − иначе это не базис). Мы скоро увидим, что в случае ненулевого конечномерного подпространства такой базис действительно существует.

Определение 13. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_k$ − ортонормальная система векторов в евклидовом пространстве E, a − произвольный вектор этого пространства. Числа $(a, u_1), (a, u_2), \ldots, (a, u_k)$ называются *коэффициентами Фурье*[6] вектора a относительно системы $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Доказанная выше теорема утверждает, что координаты проекции вектора a на подпространство $L = \langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle$ в базисе являются коэффициентами Фурье вектора a относительно системы $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Если же вектор $a \in$ $\in L$, то он сам является, очевидно, своей проекцией на L (ортогональная составляющая равна нулю). В этом случае теорема 9 (в силу единственности проекции) дает:

$$a = (a, u_1)u_1 + (a, u_2)u_2 + \ldots + (a, u_k)u_k.$$

Рассматривая случай $L = E$, получаем

Предложение 4. Координаты вектора в ортонормальном базисе − это его коэффициенты Фурье относительно системы базисных векторов.

Теорема 10 (Грама − Шмидта[7])**.** Пусть L − линейное подпространство евклидова пространства E с базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда существует ортонормальный базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$ подпространства L, обладающий свойствами:

$$\begin{aligned} &\langle u_1\rangle = \langle a_1\rangle; \\ &\langle u_1, u_2\rangle = \langle a_1, a_2\rangle; \\ &\qquad \ldots; \\ &\langle u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle. \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство будем вести индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что для некоторого n теорема доказана, и пусть M − линейное подпространство данного евклидова пространства E с базисом a_1, $a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Обозначим через L подпространство $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ и применим к нему предположение индукции. Тогда существует ортонормальный базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$ подпространства L, обладающий указанными свойствами. Согласно следствию из теоремы 9 любой вектор может быть спроектирован на подпространство L. В частности, вектор a_{n+1} может быть представлен в виде $a_{n+1} = \mathrm{pr}_L a_{n+1} + \mathrm{ort}_L a_{n+1}$. Обозначим через u ортогональную составляющую при ортогональном проектировании вектора a_{n+1} на подпространство L, $u =$ $= \mathrm{ort}_L a_{n+1}$. Вектор u ортогонален подпространству L, и, следовательно, он ортогонален каждому вектору u_i его базиса. При этом $u \neq 0$, иначе вектор a_{n+1} принадлежал бы L, что невозможно. Следовательно, система векторов u_1, u_2, $\ldots, u_n, u$ является ортогональной системой ненулевых векторов подпространства M, а значит, она является его базисом, так как количество векторов в этой системе равно размерности подпространства M. Отсюда очевидно выполнение условия

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_n, u\rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\rangle.$$

---

[6] Жан Батист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768 − 1830), французский математик и физик.
[7] Эрхард Шмидт (Erhard Schmidt, 1876 − 1959), немецкий математик.

Остаётся только нормировать вектор u, т. е. положить $a_{n+1} = \dfrac{u}{|u|}$, причём после нормировки выполнение последнего соотношения, очевидно, сохраняется. Теорема доказана.

Следствие 1. Любое ненулевое конечномерное подпространство евклидова пространства обладает ортонормальным базисом.

Следствие 2. В евклидовом пространстве существует ортогональная проекция любого вектора на любое конечномерное подпространство.

Как же найти ортогональную проекцию данного вектора на данное подпространство? Пусть линейное подпространство задано как линейная оболочка известных векторов: $L = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ (эти векторы необязательно линейно независимы). Далее возможны два способа решения. В первом случае заменяем данную систему векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на линейно независимую подсистему, линейная оболочка которой совпадает с $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, и находим ортонормальный базис подпространства L методом Грама − Шмидта (т. е. следуя доказательству теоремы 10). После этого остаётся лишь применить формулу теоремы 9 для проекции вектора на подпространство, т. е. записать проекцию как линейную комбинацию базисных векторов с коэффициентами Фурье.

При втором способе решения будем исходить из определения проекции. Пусть a − вектор евклидова пространства E, для которого мы ищем $\mathrm{pr}_L a$, где $L = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. Так как $\mathrm{pr}_L a \in L$, то $\mathrm{pr}_L a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + + \alpha_n a_n$. Итак, требуется найти числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что вектор $a - \mathrm{pr}_L a = a - - (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n)$ будет ортогонален подпространству L. Для этого, согласно предложению 4, необходимо и достаточно, чтобы этот вектор был ортогонален системе векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, порождающей подпространство L. Это условие равносильно системе:

$$\begin{cases} (a - \alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \ldots - \alpha_n a_n, a_1) = 0; \\ (a - \alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \ldots - \alpha_n a_n, a_2) = 0; \\ \qquad\qquad \ldots \\ (a - \alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \ldots - \alpha_n a_n, a_n) = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

которая после преобразования принимает вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 (a_1, a_1) + \alpha_2 (a_2, a_1) + \ldots + \alpha_n (a_n, a_1) = (a, a_1); \\ \alpha_1 (a_1, a_2) + \alpha_2 (a_2, a_2) + \ldots + \alpha_n (a_n, a_2) = (a, a_2); \\ \qquad\qquad \ldots \\ \alpha_1 (a_1, a_n) + \alpha_2 (a_2, a_n) + \ldots + \alpha_n (a_n, a_n) = (a, a_n). \end{cases} \qquad (7)$$

Это неоднородная система линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, матрица которой есть матрица Грама $G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из существования ортогональной проекции вектора на любое линейное подпространство следует, что система (7) совместна. Заметим, однако, что из единственности ортогональной проекции вектора на подпространство L не следует единственность решения системы (7). Каждое решение системы – это набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, с помощью которых вектор $\mathrm{pr}_L a$ записывается как линейная комбинация векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, порождающих подпространство L. Такая запись будет единственной тогда и только тогда, когда система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независима, т. е. является базисом линейной оболочки $L = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$.

§ 4. Метод наименьших квадратов

Рассмотрим несовместную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица этой системы.

Запишем данную систему в векторном виде:

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b},$$

где векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ – столбцы коэффициентов при соответствующих неизвестных, а $\boldsymbol{b}$ – столбец свободных членов. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ принадлежат m-мерному координатному пространству $\mathbf{R}^m$. Несовместность системы (8) с геометрической точки зрения означает, что вектор $\boldsymbol{b}$ не лежит в линейном подпространстве $L = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\rangle$ (линейной оболочке этих векторов). Однако на практике, например, при математической обработке результатов наблюдений, часто возникает задача нахождения хотя бы приближённого решения системы (8). Дело в том, что в этих случаях несовместность возникает из-за погрешности измерений.

Определение. Набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *решением системы* (8) *по методу наименьших квадратов*, если этот набор минимизирует выражение

$$\delta^2 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2)^2 + \ldots + \\ + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m)^2.$$

Такой подход, при котором в качестве приближённого решения системы (8) берётся решение по методу наименьших квадратов, был предложен Гауссом[8] и называется *методом наименьших квадратов*. Число δ называется *среднеквадратичной погрешностью* «решения».

[8] Йоханн Карл Фридрих Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855) – немецкий математик, астроном и физик.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^m$ стандартное скалярное произведение. Погрешность δ имеет простой геометрический смысл – это длина вектора $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}$, т. е. $\delta^2 = |x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}|^2$.

Заметим, что при любом наборе чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектор $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n \in L = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$. Из теоремы о минимизирующем свойстве проекции следует, что $\min\limits_{a \in L} |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = |\mathrm{pr}_L \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}|$. Таким образом, решение системы (8) по методу наименьших квадратов – это набор чисел, для которых $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n$ является проекцией вектора $\boldsymbol{b}$ на линейное подпространство L, а δ^2 – квадрат длины ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{b}$. Следовательно, решение системы (8) по методу наименьших квадратов всегда существует. Отметим, что, несмотря на то, что проекция вектора на подпространство определена однозначно, решение системы по методу наименьших квадратов не обязано быть единственным. Единственность бывает только в том случае, когда вектор-столбцы коэффициентов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, порождающие линейное подпространство L, линейно независимы. Если же векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно зависимы, то решений будет бесконечно много, однако погрешность δ всех таких решений будет одна и та же, и в этом смысле все решения равноправны.

С геометрической точки зрения нахождение решения системы $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$ по методу наименьших квадратов сводится к нахождению обычного решения системы $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ – ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на подпространство $L = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$.

§ 5. Пример

Пусть даны три вектора:

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5.$$

Вначале от нас требуется найти ортонормальный базис линейного подпространства $L = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 \rangle$, т. е. найти такую ортонормальную систему $\boldsymbol{l}_1^0$, $\boldsymbol{l}_2^0$, $\boldsymbol{l}_3^0$, что $L = \langle \boldsymbol{l}_1^0, \boldsymbol{l}_2^0, \boldsymbol{l}_3^0 \rangle$. Сделать это можно методом Грама – Шмидта, используя процесс ортогонализации, изложенный в доказательстве теоремы 10. Сначала мы построим ортогональную систему $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3$ с выполнением условий

$$\langle \boldsymbol{l}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{f}_1 \rangle;$$
$$\langle \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle;$$
$$\langle \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 \rangle,$$

а в конце эту систему нормируем.

В качестве $\boldsymbol{l}_1$ всегда можно взять $\boldsymbol{f}_1$. Далее, спроектируем вектор $\boldsymbol{f}_2$ на одномерное подпространство $\langle \boldsymbol{f}_1 \rangle$, т. е. представим вектор $\boldsymbol{f}_2$ в виде $\boldsymbol{f}_2 = \lambda \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{l}_2$, где $\lambda \boldsymbol{f}_1$ – ортогональная проекция при указанном проектировании, а $\boldsymbol{l}_2$ – ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{f}_2$, т. е. $\boldsymbol{l}_2 \in \langle \boldsymbol{f}_1 \rangle^{\perp}$. Вектор $\boldsymbol{l}_2$ мы сможем взять в качестве второго вектора искомой ортогональной системы. Неизвестный пока коэффициент λ легко найти, если умножить скалярно вышеприведённое равенство на $\boldsymbol{f}_1$:

$$(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1) = \lambda(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1),$$

т. к. $\boldsymbol{l}_2 \perp \boldsymbol{f}_1$. Вычисляя, имеем: $10\lambda = -10$, откуда $\lambda = -1$. Таким образом, $\boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \lambda \boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Далее, спроектируем вектор $\boldsymbol{f}_3$ на подпространство $L = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2 \rangle$, т. е. представим его в виде:

$$\boldsymbol{f}_3 = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{l}_3.$$

Здесь $\lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{f}_2$ – ортогональная проекция, а $\boldsymbol{l}_3$ – ортогональная составляющая при указанном ортогональном проектировании. Умножим теперь предыдущее равенство скалярно сначала на $\boldsymbol{f}_1$, а затем на $\boldsymbol{f}_2$. Мы получим систему линейных уравнений относительно неизвестных λ_1 и λ_2:

$$\begin{cases} (f_1, f_1)\lambda_1 + (f_1, f_2)\lambda_2 = (f_3, f_1); \\ (f_1, f_2)\lambda_1 + (f_2, f_2)\lambda_2 = (f_3, f_2). \end{cases}$$

Здесь, как и выше, мы воспользовались тем, что $\boldsymbol{l}_3 \perp \boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{l}_3 \perp \boldsymbol{f}_2$. Матрица этой системы есть не что иное, как матрица Грама системы векторов $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$. В нашем конкретном случае:

$$\begin{cases} 10\lambda_1 - 10\lambda_2 = -10; \\ -10\lambda_1 + 24\lambda_2 = 24. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, т. е. ортогональная проекция $\mathrm{pr}_L\, \boldsymbol{f}_3 = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, а ортогональная составляющая $\mathrm{ort}_L\, \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \mathrm{pr}_L\, \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Эта ортогональная составляющая и есть искомый третий вектор $\boldsymbol{l}_3$ нашей ортогональной системы. Остаётся лишь нормировать полученные три вектора $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$:

$$\boldsymbol{l}_1^0=\frac{\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{l}_1|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{2}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}}\\ 0\\ -\frac{2}{\sqrt{10}}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{l}_2^0=\frac{\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{l}_2|}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{14}}\\ -\frac{2}{\sqrt{14}}\\ \frac{3}{\sqrt{14}}\\ 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{l}_3^0=\frac{\boldsymbol{l}_3}{|\boldsymbol{l}_3|}=\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{20}}\\ 0\\ 0\\ 0\\ -\frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}.$$

Примечание. Для удобства проверки работы преподавателем не следует перебрасывать радикалы в числитель или сокращать дроби. Например, в нашем случае можно было бы написать

$$\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

но этого делать не следует.

Заметьте, что попутно мы решили задачу 2а, т. е. нашли проекцию вектора $\boldsymbol{f}_3$ на $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle$.

Эту задачу мы можем решить и другим способом. В самом деле, мы знаем, что $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle = \langle \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2\rangle$, так что вышеприведённый процесс можно применить к векторам $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$:

$$\boldsymbol{f}_3 = \mu_1\boldsymbol{l}_1 + \mu_2\boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_3.$$

Умножая скалярно это равенство на $\boldsymbol{l}_1$, затем на $\boldsymbol{l}_2$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_1)\mu_1=(\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{l}_1);\\ (\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_2)\mu_2=(\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{l}_2).\end{cases}$$

Для ортогональной системы векторов эта система уравнений, как видите, имеет особенно простой вид, т. к. $(\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2) = 0$ (а для ортонормальной системы мы сразу получаем значения коэффициентов μ_1, μ_2).

Вычисляем:

$$\mu_1=\frac{(\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{l}_1)}{(\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_1)}=\frac{-10}{10}=-1;$$

$$\mu_2=\frac{(\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{l}_2)}{(\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_2)}=\frac{14}{14}=1.$$

Таким образом, $\mathrm{pr}_L\,\boldsymbol{f}_3=\mu_1\boldsymbol{l}_1+\mu_2\boldsymbol{l}_2=\boldsymbol{l}_2-\boldsymbol{l}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -3\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{l}_3 = \mathrm{ort}_L\, \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \mathrm{pr}_L\, \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Тем самым решена задача 2б.

Тот же результат мы получим, если воспользуемся формулой теоремы 9:

$$\mathrm{pr}_L\, \boldsymbol{f}_3 = (\boldsymbol{f}_3,\ \boldsymbol{l}_1^0)\,\boldsymbol{l}_1^0 + (\boldsymbol{f}_3,\ \boldsymbol{l}_2^0)\,\boldsymbol{l}_2^0 = (\boldsymbol{f}_3,\ \frac{\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{l}_1|})\frac{\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{l}_1|} + (\boldsymbol{f}_3,\ \frac{\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{l}_2|})\frac{\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{l}_2|} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{l}_1|^2}(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{l}_1) + \frac{\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{l}_2|^2}(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{l}_2).$$

Вычисления можно вести прямо по последней формуле.

Перейдём теперь к методу наименьших квадратов. Прежде всего вычислим векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы имеем систему линейных уравнений (явно несовместную!):

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b};$$

$$\begin{cases} -x_1 & & = 5; \\ 2x_1 & +x_2 & = 0; \\ x_1 & -2x_2 & = -5; \\ & 3x_2 & = 6; \\ -2x_1 & & = 0. \end{cases}$$

Чтобы решить её методом наименьших квадратов, спроектируем вектор $\boldsymbol{b}$ на $L = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$:

$$\boldsymbol{b} = \mu_1\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\boldsymbol{a}_2 + \mathrm{ort}_L\, \boldsymbol{b}.$$

Находим коэффициенты μ_1 и μ_2, как обычно (т. е. умножаем скалярно последнее равенство на $\boldsymbol{a}_1$, затем на $\boldsymbol{a}_2$):

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)\mu_1 + (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\mu_2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1); \\ (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\mu_1 + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2)\mu_2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10\mu_1 = -10; \\ 14\mu_2 = 28. \end{cases}$$

У нас случайно получилось, что $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$ (в Вашем варианте это может быть не так). Решая систему, получаем: $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 2$. Таким образом, проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на L равна:

$$\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b} = \mu_1\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Геометрический смысл метода наименьших квадратов в том, что теперь мы заменим столбец свободных членов $\boldsymbol{b}$ на проекцию $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b}$, и получится совместная система:

$$\begin{cases} -x_1 & & = 1; \\ 2x_1 & +x_2 & = 0; \\ x_1 & -2x_2 & = -5; \\ & 3x_2 & = 6; \\ -2x_1 & & = 2. \end{cases}$$

Решать её заново не нужно, т. к. очевидно, что числа μ_1 и μ_2 являются её решением. Эти числа и считаются приближённым решением исходной несовместной системы, так что можно написать: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Мерилом погрешности этого приближённого решения считается длина вектора $\mathrm{ort}_L\boldsymbol{b}$, который равен разности данной правой части и заменяющей её проекции (для совместной системы этот вектор равен нулю, а приближённое решение совпадает с обычным). При этом чем длиннее вектор $\mathrm{ort}_L\boldsymbol{b}$, тем дальше отстоит новая (совместная) система от старой (несовместной). Таким образом, погрешность δ равна $|\mathrm{ort}_L\boldsymbol{b}|$. Чтобы не возиться с радикалами, часто вычисляют δ^2. В нашем случае

$$\delta^2 = |\mathrm{ort}_L\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{b} - \mathrm{pr}_L\boldsymbol{b}|^2 = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right|^2 = 20.$$

Как видим, погрешность получилась весьма значительной (у Вас она может получиться даже еще больше). В реальных прикладных задачах она, конечно, значительно меньше.

Заметим, что наша задача допускает ещё один способ решения. Из теоремы 7 о линейности проекции следует, что ортогональное проектирование на L есть линейный оператор. После замены нашей исходной несовместной системы уравнений на совместную имеем равенство

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{b},$$

где x_1, x_2 – искомое (приближённое, условное) решение. Но

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3;$$

$$\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b} = \mathrm{pr}_L(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3) = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_1 + \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_2 + \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_3.$$

Но $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_1$, $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}_2$, т. к. $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in L$, так что

$$x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_3;$$

Вычитая из обеих частей $\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2$, имеем:

$$x_1\boldsymbol{f}_1 + (x_2 - 1)(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_3;$$

$$(x_1 + x_2 - 1)\boldsymbol{f}_1 + (x_2 - 1)\boldsymbol{f}_2 = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_3.$$

Заметим, что вектор $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_3$ и его разложение в линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ мы уже вычислили выше. Так что в нашем случае имеем:

$$x_1 + x_2 - 1 = \lambda_1 = 0;$$

$$x_2 - 1 = \lambda_2 = 1,$$

откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (как и выше).

Учебное издание

Евклидовы пространства

Составители: АНДРЕЕВ Кирилл Кириллович
БУСЯЦКАЯ Ирина Константиновна

Методические указания рассмотрены и одобрены на заседании кафедры АМЛ 6 февраля 2008 года, протокол № 1-08.

Зав. кафедрой, профессор
В.Л. Попов.

Редактор
Технический редактор

Подписано в печать Формат 60×84/16.
Бумага Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Изд. № . Тираж 200 экз. Заказ . Бесплатно.
Московский государственный институт электроники и математики.
109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., 3/12.
Отдел оперативной полиграфии Московского государственного
института электроники и математики.
113054, Москва, ул. М.Пионерская, 12.