
У Ч Е Б Н И К И
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ



У Ч Е Б Н И К И
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ



В.А.Гордин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Какие явления они описывают
и как их решать

*Рекомендовано Научно-методическим советом
по математике Минобрнауки в качестве учебного пособия
по специальности «Прикладная математика»
для студентов естественно-научных специальностей*



Издательский дом
Высшей школы экономики

Москва, 2016

УДК 519.62
ББК 22.1я7
Г68

Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
профессор департамента прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ
М.С. Агранович;

доктор физико-математических наук, профессор,
декан факультета математики НИУ ВШЭ *В.А. Тиморин;*

доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой математики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова
Н.Н. Нефедов

Гордин, В. А. Дифференциальные и разностные уравнения: Какие явления
Г68 они описывают и как их решать [Текст] : учеб. пособие / В. А. Гордин ; Нац.
исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М. : Изд. дом Высшей школы
экономики, 2016. — (Учебники Высшей школы экономики). — 531, [5] с. —
1000 экз. — ISBN 978-5-7598-1094-0 (в пер.).

В учебном пособии рассмотрены модели физики, механики, химии, биологии, экологии, экономики, социологии, метеорологии, электротехники, приложения к теории вероятностей, теории игр, вычислительной математике и т.п., основанные на дифференциальных и разностных уравнениях. Это практическое руководство к совместному использованию аналитических и вычислительных подходов также содержит задачи различной сложности для домашних и контрольных работ, семинарских занятий, практикумов, экзаменов и курсовых работ.

Книга написана на основе курса, который автор в течение многих лет преподавал на отделении прикладной математики НИУ ВШЭ, и адресована студентам и аспирантам естественно-научных специальностей.

УДК 519.62
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-7598-1094-0

© Гордин В.А., 2016

© Оформление. Издательский дом
Высшей школы экономики, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
Глава 1. Самые простые дифференциальные уравнения	16
1.1. Интеграл и дифференциальное уравнение	16
1.2. Ламинарное течение жидкости в трубе и безразмерное число Рейнольдса	17
1.3. Сердце и другие насосы. Безразмерное число Уомерсли	28
1.4. Течения с переменной вязкостью	30
1.5. Турбулентность и измерения	31
Глава 2. Эволюционные дифференциальные уравнения	35
2.1. Векторное поле, эволюционное уравнение и задача Коши	35
2.2. Распад изотопа и экспонента	37
2.3. Возможная неединственность (ветвление) решения задачи Коши	38
2.4. Банковский процент, начисляемый непрерывно и дискретно	39
2.5. Модель Мальтуса	40
2.6. Классификация дифференциальных уравнений и систем	41
2.7. Стационарные точки и их устойчивость по Ляпунову	43
2.8. Устойчивость произвольных решений	46
2.9. Движение небесных тел и разностная схема Эйлера	46
2.10. Движение небесных тел и законы сохранения (первые интегралы) модели	47
2.11. Уравнения, не разрешенные относительно производной	52
2.12. Стационарные (неподвижные) точки при дискретном времени и их устойчивость	54
2.13. Групповое свойство автономных систем	57
Глава 3. Линейные дифференциальные уравнения и принцип суперпозиции . . .	60
3.1. Линейный дифференциальный оператор и линейная система	60
3.2. Комплексные линейные дифференциальные уравнения и системы	64
3.3. Подпространство решений однородного уравнения и плоскость — неоднородного	66
3.4. Системы и уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен	67
3.5. Случай кратных характеристических корней и устойчивость начала координат	68
3.6. Уравнение Эйлера. Как иногда можно сделать коэффициенты дифференциального уравнения постоянными?	70
3.7. Крутильные колебания вала с дисками и двойные маятники	75
3.8. Эволюция подпространств	77

3.9. Фундаментальная система решений, вронскиан и эволюция объема — формула Лиувилля–Остроградского	80
3.10. Простейшие неоднородные уравнения	85
3.11. Инерция измерительного прибора	86
3.12. Решение неоднородных уравнений — матрица Вронского и метод вариации постоянных	89
3.13. Измерительный прибор с переменной инерцией и закон охлаждения Ньютона	90
3.14. Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами, когда форсинг — квазимногочлен	94
3.15. Периодические коэффициенты. Преобразование монодромии и устойчивость нулевого решения. Мультипликаторы	96
Глава 4. Модели войн	99
4.1. Модель Ланкастера	99
4.2. Война двух орд. Фазовые портреты	102
4.3. Модификации модели Ланкастера	106
Глава 5. Устойчивость стационарных точек — классификация	112
5.1. Классификация линейных векторных полей (матриц Якоби) для 2-го порядка	112
5.2. Устойчивость стационарных точек нелинейных систем — теорема Ляпунова	119
5.3. Устойчивость для систем большего порядка	119
5.4. Стабилизация стационарной точки и возмущение спектра матрицы	121
5.5. Структурная устойчивость и общее положение	124
5.6. Понятие коразмерности поверхностей	128
5.7. Устойчивость неподвижных и периодических точек систем с дискретным временем	130
Глава 6. Метод разделения переменных и рост живых организмов	133
6.1. Метод разделения переменных и серебряные часы Лейбница	133
6.2. Что считать решением дифференциального уравнения	137
6.3. Уравнение фон Берталанфи и асимптотическая устойчивость стационарной точки	142
6.4. Уравнение Гомперца	144
6.5. Виктория-регия — ограничения модели	146
Глава 7. Рост популяций	148
7.1. Рост популяции — конечно-разностная модель Фибоначчи	148
7.2. Модель Лесли динамики распределения по возрастам. Теоремы Перрона и Фробениуса	152
7.3. Логистическое уравнение. Жесткая и мягкая модели лова	157
7.4. Модель Басса рекламной кампании	162

Глава 8. Скорость химических реакций	163
8.1. Что влияет на скорость реакций	163
8.2. Первый интеграл и понижение порядка системы дифференциальных уравнений	168
8.3. Разностный метод Эйлера приближенного решения задачи Коши	171
Глава 9. Полезные замены переменных, затопленная струя и охота	177
9.1. Простейшие замены в дифференциальных уравнениях	177
9.2. Сведение дифференциального уравнения Бернулли к линейному и задача о затопленной струе	178
9.3. Уравнения, в которых можно заменой понизить порядок. Линия погони и уравнения вида $\frac{d^2u}{dt^2} + Z\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + f(u) = 0$	183
9.4. Понижение порядка линейного уравнения при условии, что одно нетривиальное его решение уже известно	188
9.5. Можно ли аналитически решить уравнение Риккати?	190
9.6. Приведение линейного дифференциального уравнения к самосопряженной форме и разностная аппроксимация линейного дифференциального уравнения	194
9.7. Компактные разностные схемы	201
9.8. Однородные уравнения и полярные координаты	202
Глава 10. Дифференциальные и разностные операторы — операторы в бесконечномерном пространстве	207
10.1. Спектр дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами	207
10.2. Какие собственные функции считать допустимыми	209
10.3. Спектр дифференциальных операторов с переменными коэффициентами	210
10.4. Конечно-разностные линейные операторы	213
10.5. Нелинейные разностные уравнения: дискретная динамика Ферхюльста и удвоение цикла	217
10.6. Неявная схема для дискретной динамики Ферхюльста	223
Глава 11. Эволюция вероятностей и марковские цепи	225
11.1. Марковские цепи и матрицы перехода	225
11.2. Спектр матрицы перехода	230
11.3. Конечно-разностные уравнения и оценка спектра	232
11.4. Марковские цепи с непрерывным временем	234
Глава 12. Модель экономики Солоу	237
12.1. Население, капитал и производство	237
12.2. Свойства решений модели Солоу	238
12.3. Случай функций Кобба–Дугласа	240
12.4. Учет прожиточного минимума в динамике численности	242

Глава 13. Кто как летает: камни, ракеты, электроны...	244
13.1. Полет пушечного ядра	244
13.2. Полет ракеты.	246
13.3. Циклоида: полет заряженной частицы в электромагнитном поле и перемещение точки на колесе	249
13.4. Движение заряженной частицы в быстроосциллирующем электромагнитном поле. Сила Миллера	260
Глава 14. Почему и как давление убывает с высотой	264
14.1. Уравнения для воздуха	264
14.2. Барометрическая формула.	266
14.3. Закон Архимеда и кораблестроение.	268
Глава 15. Зачем канат обматывают вокруг столба	271
15.1. Формула Эйлера для силы трения каната, перекинутого через бревно	271
15.2. Балки с некруглым сечением, кривые в $\mathbb{R}^2$ и их кривизна	276
15.3. Кривые в пространстве	281
15.4. Канат на заданной поверхности	285
Глава 16. Миг удара	289
16.1. Сколько времени длится удар	289
16.2. Задача Герца.	290
16.3. Свойства гамма-функции Эйлера	294
Глава 17. Уравнения, описывающие колебания	296
17.1. Гармонические колебания	296
17.2. Нелинейные колебания	298
17.3. Модель Лотки–Вольтерра.	304
17.4. Матрица Гессе и лемма Морса для стационарных (критических) точек гладкой функции	306
17.5. Период малых колебаний популяций в модели Лотки–Вольтерра.	311
17.6. Модифицированная модель Лотки–Вольтерра.	312
17.7. Динамика опухолевых клеток.	316
17.8. Гармонический форсинг и возможность резонанса	322
Глава 18. Приближенные решения дифференциальных уравнений в виде отрезка ряда Ньютона–Тейлора	326
18.1. Последовательное уточнение решения	326
18.2. Сходимость рядов Ньютона–Тейлора	328
18.3. Аппроксимация решения рациональной функцией.	330
18.4. Асимптотика решения дифференциального уравнения с особенностью. Дробные степени.	332

18.5. Решения уравнений Бесселя	333
18.6. Ряд Ньютона–Тейлора может расходиться везде. Пример Коши	335
18.7. Комплексные дифференциальные уравнения и голоморфность	338
 Глава 19. Сжимающие отображения: метод Пикара–Линделёфа и метод Ньютона	 340
19.1. Неограниченные линейные операторы.	340
19.2. Интегральное уравнение Вольтерра и метод Пикара–Линделёфа.	342
19.3. Теорема Пикара–Линделёфа о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем	345
19.4. Оценка отклонений решения задачи Коши при изменении правой части уравнения	346
19.5. Сжимающие отображения и неподвижная точка. Метод Ньютона.	348
19.6. Сжимающие отображения и неподвижная точка в пространстве функций. Метод Пикара–Линделёфа.	352
 Глава 20. Что мы хотим знать о решении? Корректность и уравнения в вариациях.	 354
20.1. Зависимость решения дифференциального уравнения от параметра и уравнения в вариациях	354
20.2. Определение параметра задачи	361
20.3. Эволюция фазового объема в нелинейных системах	363
20.4. Гамильтоновы системы.	366
20.5. Предельные циклы, отображение Пуанкаре и теорема Понтрягина	372
20.6. Реакция типа Белоусова–Жаботинского и предельный цикл	380
20.7. Бифуркация Пуанкаре–Андропова–Хопфа рождения цикла	383
 Глава 21. Разностные аппроксимации линейных дифференциальных уравнений и аппроксимации Паде.	 391
21.1. Методы разностной аппроксимации производных	391
21.2. Компактные схемы разностной аппроксимации	396
21.3. Дифференцирование функций с «шумом»	398
21.4. Схемы Эйлера и Кранка–Николсон разностной аппроксимации дифференциального уравнения	404
21.5. Классификация разностных аппроксимаций и аппроксимация Паде.	407
21.6. Многослойные схемы и аппроксимация Паде–Эрмита	414
 Глава 22. Разностное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.	 417
22.1. Погрешность и порядок аппроксимации	417
22.2. Погрешность построения начальных условий для многослойной схемы	419
22.3. Схемы Рунге–Кутты.	420
22.4. Устойчивость и сходимость	425

Глава 23. Движение планет и других шариков	428
23.1. Движение по желобу и форма изохроны	428
23.2. Брахистохрона и рефракция	430
23.3. Трамплины	435
23.4. Движение по склону	438
23.5. Движение в поле центральной силы	441
23.6. Случай Якоби, ряд Фурье и условие разрешимости	444
23.7. Эффективная потенциальная энергия. Апогей и перигей	446
 Глава 24. Градиентные системы и системы с трением	454
24.1. Минимизация функции методом тяжелого шарика	454
24.2. Жесткие задачи	460
24.3. Минимизация методом градиентного спуска и градиентные системы дифференциальных уравнений	460
24.4. Аттракторы систем дифференциальных уравнений	462
24.5. Нелинейное трение	470
24.6. Гармонический форсинг и переменный электрический ток	472
24.7. Длинные электрические цепи и конечно-разностные уравнения	478
24.8. Нелинейные электрические цепи	483
 Глава 25. Системы с разрывной правой частью — режимы с переключением . .	487
25.1. Грузик на пружине с трением о поверхность	487
25.2. Аттрактор системы	489
25.3. Оптимальное распределение ресурса между производственными отраслями — простейшая модель	491
 Глава 26. Уравнения с особенностями	493
26.1. Особая точка линейного дифференциального уравнения	493
26.2. Теория Фробениуса	495
26.3. Особая точка линейных уравнений на бесконечности и гипергеометрическая функция	502
26.4. Преобразование Лиувилля. Можно ли сделать коэффициенты почти постоянными?	504
 Глава 27. Сращивание асимптотик	509
27.1. Двухточечные и многоточечные интерполяции и аппроксимации	509
27.2. Двухточечная рациональная аппроксимация при $b = \infty$. Аппроксимация функции Планка	512
27.3. Двухточечная рациональная аппроксимация решения дифференциального уравнения	515
27.4. Сращивание разных асимптотик на $\pm\infty$. Сигмоиды	517
 Список литературы	519
Предметный указатель	524

ПРЕДИСЛОВИЕ

Поклоение уходит, и поколение приходит, а Земля пребывает вовеки. И восходит Солнце, и заходит Солнце, и устремляется к месту своему, где оно восходит. Идет к югу и поворачивает к северу; кружится, кружится, движется ветер, и на круги свои возвращается ветер. Все реки текут в море, но море не переполняется, к месту, откуда реки текут возвращаются они...

Коэлет (Экклезиаст, Говорящий в собрании) 1:3–7

Физические законы должны обладать математической красотой.

П.А.М. Дирак

Эта книга рассказывает о различных моделях, описывающих природные процессы, используемых в технике, экологии, экономике, военных действиях и т.п. Общее в этих моделях: математический аппарат — дифференциальные уравнения. С помощью таких моделей многое можно предвидеть, рассчитать, понять природу того или иного явления. В письме Ньютона¹, написанном более трех веков назад (в 1676 г.), анаграмма, расшифровка которой (в вольном

¹ Сэр Исаак Ньютон (1643–1727). В 1665–1667 гг. Ньютон был принужден жить на своей ферме в Вулсторпе. В Англии была чума. Результатом этой «Болдинской осени» были основные его работы по математике и механике. Производную по времени он назвал флюксий, а первообразную — флюентом. В октябре 1666 г. Ньютон составил черновую рукопись (ее опубликовали три века спустя), а в 1669 г. передал конспект результатов своему учителю, профессору Исааку Барроу (1630–1677), лекции которого он перед тем слушал.

Обстоятельства 1669 г. были связаны с появлением конкурентов. Джон Коллинс (1625–1683), который вел активную переписку (научных журналов еще не было) с учеными разных стран, переслал Барроу вышедшую в 1668 г. книгу Николауса Меркатора «Логарифмотехния».

Тут необходимо прервать изложение, чтобы сообщить кое-что и о Меркаторе (1620–1687). Меркатор — латинский псевдоним. Настоящая фамилия математика — Кауфман (на немецком значит «купец»). Николауса не следует путать с выдающимся картографом Г. Меркатором (1512–1594), жившим веком ранее Кауфмана. Впрочем, настоящая фамилия Герарда — Кример (на немецком тоже означает: «купец»).

Николаус Меркатор свел вычисление площади под графиком гиперболы — натурального логарифма — к суммированию бесконечного ряда:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (1)$$

Эта идея вычислений с помощью рядов стала быстро распространяться среди специалистов. Коллинс переслал книгу Меркатора профессору Барроу (получена в начале 1669 г.), а тот, прочитав, немедленно сообщил о ситуации своему выдающемуся ученику и потребовал, чтобы Ньютон написал текст для официальной публикации и закрепления приоритета своих существенно более общих методов. Название будущему мемуару было дано такое: «Об анализе

пересказе В.И. Арнольда¹; подробнее см.: [Карцев, 1987]) гласила: *Полезно решать дифференциальные уравнения*. Это утверждение оказывается верным по сию пору — действительно, во многих случаях очень полезно.

Упомянутое письмо с анаграммами Ньютон написал Лейбницу² по настоятельной просьбе секретаря Королевского общества Ольденбурга³ (а его, в свою очередь, просил об этом Лейбниц, приехавший по дипломатическим делам в Англию). Ньютон все же не хотел раскрывать любознательному

уравнений с бесконечным числом членов». Это был обзор неопубликованных работ Ньютона. Спустя полгода был отослан ответ на «Логарифмотехнию».

Барроу — Коллинсу.

20 июля 1669 г.

«[один мой друг] замечательной гениальности в этом отношении, принес мне на другой же день несколько статей, в которых он разработал методы вычислений величин, подобные тем, что употребляет господин Меркатор для гиперболы, но гораздо более общие»

Спустя 11 дней сам манускрипт отправляется со следующим сопроводительным письмом:

Барроу — Коллинсу.

31 июля 1669 г.

«Посылаю Вам статьи моего друга, как я и обещал. Прошу Вас в соответствии с его желанием, используя их так, как Вы сочтете нужным, тотчас же возвратить их мне. Прошу при ближайшей возможности дать мне знать о том, что Вы получили их с тем, чтобы я мог быть уверен, что они у Вас; я боюсь за них. Вверяю их почти лишь потому, что не могу более медлить...»

Ньютон не желает, чтобы его имя, вообще, упоминалась. Но Коллинс настаивает, и Барроу не может не назвать своего замечательного ученика:

Барроу — Коллинсу.

20 августа 1669 г.

«Его имя — Ньютон. Он член нашего колледжа и совсем еще молодой человек — всего год назад он получил диплом магистра. Он с несравненной гениальностью достиг большого прогресса в этой области...»

За продолжением этой детективной истории я рекомендую обратиться к книге [Карцев, 1987].

Сам Барроу трактовал кривые как функции от времени, и Ньютон потом говорил: *«вероятно, что лекции доктора Барроу могли навести меня на рассмотрение образования фигур с помощью движения, хотя я теперь и не помню этого»*. В том же 1669 г. Барроу передал Ньютону кафедру математики в Кембридже (сам он занял более престижную и оплачиваемую должность придворного капеллана при дворе Карла II).

В 1670–1671 гг. Ньютон готовил подробное сочинение «Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum» по методу флюксий, но ... не нашел издателя — бизнес-проект не оказался интересным... В печати эти результаты стали появляться лишь начиная с 1704 г. Помимо замедления прогресса науки задержка в публикации привела к длительному приоритетному конфликту между Ньютоном и Лейбницем, в который включились и их сторонники [Гиндикин, 2001; Карцев, 1987].

¹ В.И. Арнольд (1939–2010).

² Г.-В. Лейбниц (1646–1716). Ученик Гюйгенса.

³ Г. Ольденбург (1618–1677). Основатель и редактор научного журнала «Философские труды Королевского общества». Ввел практику предварительного независимого рецензирования присылаемых для публикации статей. В дальнейшем именно через Ольденбурга велась переписка Ньютона и Лейбница. Видимо, оба соперника признавали его справедливость и честность.

незнакомцу все свои методы, а лишь намекнул на них. А чтобы его приоритет был зафиксирован, он и использовал такой способ. Но Лейбниц знал о математических работах Ньютона еще и от самого Ольденбурга, и от Коллинса (с которым он беседовал о неопубликованных работах Ньютона в свой предыдущий приезд в Лондон в 1673 г.).

Поэтому полученное письмо Лейбницу в его размышлениях оказалось весьма полезным.

В мемуаре Ньютона, написанном в 1671 г. (а изданном уже после его смерти), рассмотрено три типа уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x_1 \frac{dy}{dx_1} + x_2 \frac{dy}{dx_2} = y.$$

Решение первого уравнения получается обычным интегрированием. Эту математическую задачу (и физические примеры) мы обсудим в гл. 1. Анализ и решение уравнений второго типа — обыкновенных дифференциальных уравнений — составляет основной предмет данной книги. Третье уравнение относится к простейшим уравнениям в частных производных. Здесь они упоминаются лишь мельком.

Сам термин «дифференциальные уравнения» появился в мемуаре Лейбница¹ в 1676 г. (впервые опубликован в 1684 г. — в октябрьском номере одного из первых в мире (подробнее см. примечание в разд. 16.1) научного журнала — «Acta Eruditorum»). Назывался мемуар «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Разработанные Ньютоном и Лейбницем методы были немедленно поняты и использованы для решения разнообразных задач научным сообществом — в ту пору весьма немногочисленным. В 1696 г. появился учебник Лопиталья² (12 лет от первой публикации новой трудной теории до учебника — срок и по нынешним временам небольшой).

Упомянем и некоторых предшественников Ньютона и Лейбница (список их может быть существенно расширен при более подробном рассмотрении). Кеплер³, Кавальери⁴, Уоллис⁵ и многие другие подготовили работы двух наиболее известных создателей математического анализа.

¹ Русский перевод мемуара см.: Успехи математических наук. 1948. Т. 3. Вып. 1 (23). С. 165–204.

² Г.Ф. Лопиталь (1661–1704).

³ И. Кеплер (1571–1630). Его мемуар «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии» был опубликован в Линце в 1615 г.

⁴ Б. Кавальери (1598–1647). Его книга «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» была издана в 1635 г.

⁵ Дж. Уоллис (1616–1703) — вариант русского написания фамилии Валлис. Его «Арифметика бесконечного» была издана в 1655 г.

Вообще представление о том, в какой последовательности происходило развитие теории дифференциальных уравнений, может быть полезным дополнением к самой теории, которая и сейчас продолжает развиваться. Это развитие происходило одновременно с расширением понимания окружающего мира и оказывало существенное влияние на развитие цивилизации в целом.

Я старался объяснить на примерах, как дифференциальные уравнения составляют и какое место эти уравнения и модели, на них основанные, занимают среди других наук, насколько прочно и естественно в них вмонтированы. Независимой переменной чаще всего будет время, хотя и кое-какие статические модели также будут изучены. На этих примерах продемонстрированы методы аналитического исследования и (когда получится) решения дифференциальных уравнений и систем. Также рассматриваются простейшие методы численного решения начальных задач для дифференциальных уравнений.

Конечно-разностные уравнения, помимо того, что к ним сводится численное решение дифференциальных уравнений и они хорошо реализуются в виде кодов на компьютерах, представляют также и самостоятельный интерес. Некоторые модели здесь рассмотрены. А общие теоремы для линейных дифференциальных и конечно-разностных уравнений во многом аналогичны (в первом случае время изменяется непрерывно, а во втором — дискретно).

На перечисленные темы со времен Ньютона и Лейбница написано огромное количество книг. В их числе немало написанных блестяще. Настоящее пособие предназначено для первоначального знакомства с предметом и адресовано студентам младших курсов, уже изучившим математический анализ и линейную алгебру. Читателю (или, говоря современным языком, пользователю) желательно также владеть каким-то алгоритмическим языком, чтобы ответить на контрольные вопросы (они помечены буквой **K** и пронумерованы римскими цифрами), связанные с численным решением¹. Они различаются и по трудности, и по предполагаемым затратам времени. Если получить решение трудно, прочитайте формулировку.

¹ Сто лет, в 1907–1908 гг., назад Феликс Клейн (1849–1925) читал лекции в Гёттингенском университете для будущих преподавателей средних школ [Клейн, 1987]. В частности, в лекциях был такой абзац: *«Во всех этих новых учебниках производная и интеграл определяются при помощи предельного перехода — о разностном исчислении в них нет и речи. При таком изложении многое может стать более отчетливым, но при этом, как в микроскопе, суживается поле зрения. Разностное исчисление теперь предоставлено тем, кто занимается практическими вычислениями, главным образом астрономам; математики же совсем не изучают его»*.

Автор этой книги хотел бы совместить аккуратное изложение математических результатов с практическими вычислениями, которых отнюдь не чуждались великие математики прошлых веков. Методы аналитического исследования делаются более понятными, если убедиться в их эффективности на реальных физических, химических, экологических и т.п. моделях. А разбирая конкретные модели, можно понять, какой математический аппарат эффективен, а какой — нуждается в усовершенствовании или замене. Ньютон сам обтачивал свои линзы и даже сам изготавливал приборы для этого. А в результате не только был понят закон всемирного тяготения, но и обнаружены новые законы оптики...

Студенту, особенно студенту-математику, полезно иметь одновременно под рукой и учебник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, написанный более формальным образом. Такой учебник (по необходимости весьма объемный) должен содержать подробные доказательства. Автор же предпочел написать учебное пособие с большим количеством разнообразных примеров, задач и методов их решения как аналитических, так и компьютерных. Для практического применения (о котором писал И. Ньютон более трех веков тому назад), как правило, полезно использовать и аналитические, и численные подходы. Они часто дополняют друг друга. Хочу надеяться, что полученные здесь знания и навыки окажутся полезными читателю при работе с его собственными моделями и задачами.

При работе над книгой я получил полезные замечания от Ф.Л. Быкова, С.Г. Лобанова, Я.Г. Лондера, О.С. Козловского, В.В. Курина, Е.В. Родиной, Ю.А. Степанянца, Я. Стрельцына, а также от В.А. Тиморина — рецензента Издательского дома Высшей школы экономики. В подготовке графиков мне помогали Р.Б. Зарипов и А.А. Шемендюк. Пользуюсь возможностью выразить им свою искреннюю признательность.

Я также благодарен РФФИ и экономическому факультету НИУ ВШЭ за поддержку моих исследований.

САМЫЕ ПРОСТЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Начавши ковать — станешь кузнецом.
Пословица

В этой главе собственно дифференциальные уравнения еще не рассматриваются. Речь идет лишь о применении интегрального исчисления к стационарным задачам гидродинамики. Однако вопросы, на которые мы пытаемся тут найти ответы, будут возникать на протяжении всей книги. Речь идет об обработке данных измерений, о построении математической модели физического процесса, о подобию моделей с различными значениями физических параметров, об оценке возможных погрешностей моделей и т.п.

Эти подробности обсуждаются здесь, чтобы у читателя постепенно сложилось впечатление о том, как «придумывают» математические модели, содержащие дифференциальные уравнения.

1.1. ИНТЕГРАЛ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Обычный неопределенный интеграл

$$x(t) = \int f(t) dt \quad (1.1)$$

можно рассматривать как общее решение (т.е. однопараметрическое семейство функций) уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f. \quad (1.2)$$

Здесь $f = f(t)$ — заданная функция, а функцию $x = x(t)$ нам нужно определить. Формула (1.1), как следует из теоремы Ньютона–Лейбница, определяет (при некоторых ограничениях¹ на функцию f) решение с точностью до

¹ Непрерывности f достаточно.

аддитивной константы (подробнее см. учебники по математическому анализу, например: [Зорич, 2002; Фихтенгольц, 2001]). Уравнение (1.2) включает только первую производную неизвестной функции и поэтому называется *дифференциальным первого порядка*.

Например, если во все моменты времени t известна скорость $v(t)$ движения автомобиля по прямолинейной дороге, то местоположение этого автомобиля как скалярная функция¹ времени определяется с точностью до константы: $x(t) = \int v(t) dt$. Если, кроме того, известно, что в какой-то момент времени t_0 автомобиль находился в известной точке $x(t_0)$, то решение задачи уже единственно:

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(s) ds + x(t_0). \quad (1.3)$$

Уравнение (1.2) — наиболее простое дифференциальное уравнение. В более общем по сравнению с (1.2) случае *дифференциальным* называется *уравнение*, для которого правая часть f сама зависит от неизвестной функции

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Например, если нас интересует местоположение воздушного шарика, переносимого известным нам ветром, то формулой (1.3) уже не воспользуешься — в разных точках пространства скорость ветра разная; $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s, \mathbf{x}(s))$, и неизвестная функция $\mathbf{x}(s)$ будет присутствовать в обеих частях формулы (1.3).

1.2. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ И БЕЗРАЗМЕРНОЕ ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА

Дифференциальные уравнения начали изучать почти одновременно с разработкой дифференциального и интегрального исчисления. Рассмотрение примеров начнем с простой и понятной каждому задачи.

Пусть по трубе течет жидкость. Если жидкость подается в трубу при постоянном слабом давлении, то течение плавное. Если же медленно повышать давление и смотреть, что получается в каждом случае, то при некотором критическом его значении мы заметим качественное изменение течения. Ровное *ламинарное течение* вдруг превратится в другое, включающее много неупорядоченных мелкомасштабных вихревых движений. Если труба стеклянная, и в нее пустить вместе с водой струйку краски, то в ламинарном и *турбулентном режимах* будут видны принципиально разные картины:

¹ Если автомобиль едет по полю, то его местонахождение в каждый момент времени определяется двумя координатами — мы имеем дело с вектор-функцией.

в ламинарном — струйка будет довольно долго сохранять сравнительно четкие границы, а в турбулентном — мгновенно разрушится, окрасив всю жидкость. Следовательно, это *течение* не *стационарное*¹ в строгом смысле — стационарными оказываются лишь некоторые осредненные характеристики течения.

Момент перехода к турбулентности при очень плавном увеличении скорости течения в первую очередь определяется молекулярной вязкостью жидкости (стабилизирующий фактор) и максимальной скоростью стационарного течения (дестабилизирующий фактор). *Числом Рейнольдса*² называется безразмерный параметр: комбинация характерной скорости жидкости U , характерного для данной задачи линейного размера L (например, это может быть диаметр трубы, по которой жидкость течет, или шарика, который жидкость обтекает) и кинематической вязкости ν :

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}.$$

Например, для течения, показанного на рис. 1.2, число Рейнольдса $\text{Re} \approx 140$. Здесь L — диаметр отверстий; эксперимент проводился при температуре 20°C, когда динамическая вязкость воды $\mu = \nu\rho$ равна 1,004 мПа · с (миллипаскаль на секунду); ρ — плотность жидкости.

Замечание А. Безразмерные параметры задачи позволяют сравнивать задачи с различными размерными параметрами. Если все безразмерные параметры у двух задач равны, то ответ, полученный (посредством вычислений или экспериментально) для одной задачи, можно с помощью известного множителя преобразовать в ответ для другой. Простейший пример: одна и та же задача, записанная в различных системах физических единиц — достаточно решить ее лишь один раз.

Замечание Б. Вязкость жидкости существенно уменьшается при повышении температуры. Существует более десятка эмпирических формул³ для описания этой зависимости у различных жидкостей при различном давлении. Одна из самых простых формул — *формула Андраде*⁴–*Френкеля*⁵: $\nu \approx A \exp(b/T)$, где A, b — эмпирические константы, T — температура в градусах Кельвина⁶ (см. рис. 1.1).

Вязкость жидкости измеряют, например, вискозиметром Жуковского⁷, который можно изготовить даже в домашних условиях (см., например, популярную статью [Аринштейн, 1983]). Для газов вязкость пропорциональна средней скорости мо-

¹ *Стационарным* будем называть *течение*, скорость которого в каждой точке не зависит от времени: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Положение произвольной частицы $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ может зависеть от времени t .

² О. Рейнольдс (1883–1912).

³ Вопрос аппроксимации сложных функций более простыми, рациональными будет обсуждаться в гл. 27.

⁴ Э.Н. да К. Андраде (1887–1971).

⁵ Я.И. Френкель (1894–1952).

⁶ У. Томсон, лорд Кельвин (1824–1907).

⁷ Н.Е. Жуковский (1847–1921).

лекул газа, а скорость эта пропорциональна $\sqrt{T}$. В этом состоит закон Максвелла¹. Так что для газов вязкость повышается с температурой, а не понижается, как для жидкостей.

К.1. Как изменится число Рейнольдса, если, не меняя скорость U и характерный размер L , температуру воды повысить с 20°C до 60°C? Как должна измениться скорость течения, чтобы число Рейнольдса при таком изменении температуры осталось неизменным?

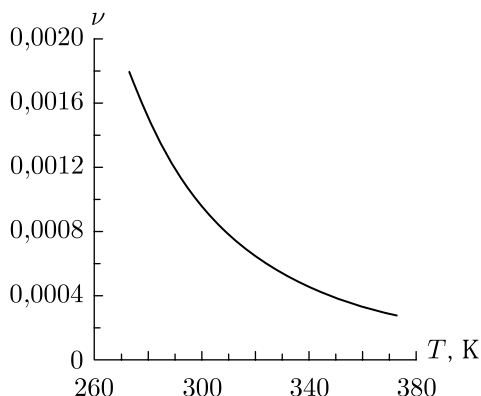


Рис. 1.1. Зависимость вязкости воды от температуры в указанном диапазоне температур хорошо описывается формулой Андраде–Френкеля. Здесь $A = 1,742 \cdot 10^{-6}$ кг/(м · с), $b = 1895$ К

К.2. Предположим, что масштаб рис. 1.2 составляет 1 : 1. Оцените характерную скорость воды. Как изменится ответ, если известно, что этот масштаб 1 : 2?

Если заниматься вычислениями или физическими экспериментами при различных значениях физических параметров, то можно производить их не для всех возможных наборов значений U , L , ν , т.е. в трехмерном пространстве параметров, но только для различных значений параметра **Re**, т.е. в одномерной области (см. Замечание **А**). В частности, если **Re** проходит некоторое критическое значение, обозначаемое **Re_{кр}**, то ламинарный поток в трубе сменяется турбулентным². Критическое значение числа Рейнольдса

¹ Дж.К. Максвелл (1831–1879).

² *Нектон* (совокупность плавающих животных — «свободных в выборе своего пути», т.е. тех, которые могут противостоять сравнительно сильному течению) — старается избежать турбулентности.

Каждая чешуйка рыбы — сложная обтекаемая конструкция. Например, на чешуе акулы есть крошечные ребрышки («риблеты»), которые уменьшают сдвиговое напряжение. Нечто похожее есть и на крыльях бабочек.

Важную сглаживающую роль играет слизь рыбы. Хвостовой плавник быстро плавающих рыб напоминает новорожденный месяц — такая форма обеспечивает ламинарный режим при больших скоростях (рыбы, предпочитающие маневренность скорости, т.е. возможность резкого поворота, имеют хвостовой плавник с почти ровным окончанием). Рыбы стараются «сбрасывать» с себя вихри, соответствующим образом изгибая свое тело (см. также рис. 1.6, где волоски, видимо, играют ту же роль в капилляре человека). Однако «парадокс Грея» (1933) — утверждение о том, что плывущая рыба или дельфин испытывает меньшее сопротивление, чем ее жесткая модель, — отнюдь не доказан. Природа, конечно, мудра, но отнюдь не всемогуща.

может зависеть от многих факторов, например от формы сечения трубы, шероховатости и упругости ее поверхности и т.п. Говорят, что при $Re = Re_{кр}$ в системе происходит *бифуркация* (или *катастрофа*)¹ перехода к турбулентности² (см. рис. 1.2).

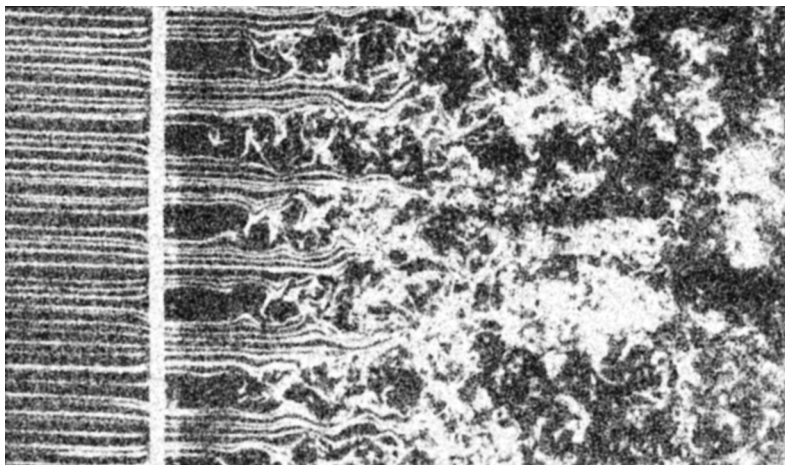


Рис. 1.2. После прохождения с большой скоростью жидкости через маленькие отверстия (их размер и дает параметр L , входящий в число Рейнольдса данной задачи) в ней образуются турбулизированные участки. Здесь они сосуществуют с участками, где течение ламинарно. Это фотография лабораторного эксперимента (см.: [Ван-Дайк, 1986])

Представление о ламинарном потоке: жидкость может быть мысленно разделена на тонкие слои, *laminae*, которые движутся, не перемешиваясь, хотя и влияют друг на друга. Соседние слои двигаются чуть по-разному и «увлекают» данный слой.

При *стационарном* осесимметричном (решение не зависит от угла φ) течении вдоль оси z (когда вектор скорости имеет лишь один ненулевой компонент $u_z = u_z(r)$) в круглой трубе³ радиуса R слои эти, естественно, представляют собой коаксиальные трубки (см. рис. 1.3а), а радиальный компонент u_r скорости жидкости равен нулю. И. Ньютон предположил, что сила, действующая вдоль оси трубы на участке длины l на слой, отстоящий

По-видимому, следует считать экспериментально установленным тот факт, что волны на поверхности кожи дельфинов и людей (при сравнительно большой скорости) — это вынужденная реакция тела, а не хитрый способ живого организма уменьшить вихреобразование. Подробные сведения и фотографии см. в работах [Алеев, 1976; Кокшайский, 1974].

¹ Общая теория и другие примеры бифуркаций см. в книге [Арнольд, 1983].

² Само слово «турбулентность» происходит от латинских слов, которые означают возмущение народа, шум, путаницу, в частности запутанную прическу.

³ При такой геометрии области для описания течения удобны цилиндрические координаты: $\langle r, \varphi, z \rangle$.

от оси трубы на расстояние r , со стороны внутренней (по отношению к слою $[r, r + \delta r]$) жидкости, пропорциональна и площади цилиндра — границы слоев $S_i = 2\pi r l$, и производной (сдвигу) скорости в этом направлении:

$$K(r) = -\mu S_i \frac{du}{dr}, \quad \text{где } u = u_z(r);$$

коэффициент «внутреннего трения» $\mu = \text{const}$ зависит от свойств жидкости.

Производная $\frac{du}{dr}(r)$ называется *сдвигом скорости*. При ненулевом сдвиге скорости неизбежно со временем меняется расположение частиц жидкости относительно друг друга.

Замечание В. Для трехмерных течений, в которых все три компоненты скорости $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ могут быть отличны от нуля и зависеть от всех трех координат, для описания *сдвига скорости* частиц жидкости используется симметричная матрица третьего порядка с элементами $\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, 2, 3$. Иногда применяется обозначение $\dot{\gamma}_{ij}$.

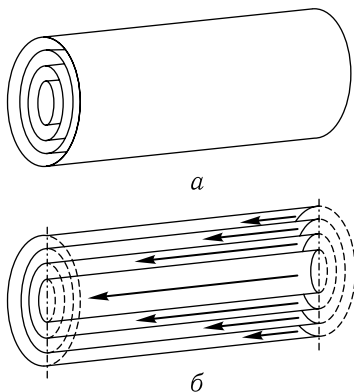


Рис. 1.3. Воображаемое разделение Ньютоном ламинарного потока жидкости в трубе круглого сечения на слои (а) и эпюра зависимости скорости потока от радиуса (б): $u = u_z(r)$

Скорость $u = u_z(r)$ жидкости равна нулю около неподвижной трубы и увеличивается при приближении к оси (см. рис. 1.3б). Поэтому более внутренние слои «ускоряют» данный: $K(r) > 0$.

Со стороны же внешней жидкости на данный слой действует, также вдоль оси z , замедляющая сила:

$$M(r + \Delta r) = \mu S_e \frac{du}{dr}(r + \Delta r) < 0,$$

где $S_e = 2\pi(r + \Delta r)l$.

Сумма этих сил компенсируется (движение, напомним, предполагается стационарным, а значит, ускорений нет) разностью давлений при $z = 0, l$, действующих на торцы цилиндрического слоя с радиусами r и $r + \Delta r$ (площадь торцов $S_{\text{butt}} \approx 2\pi r \Delta r$, давление предполагается постоянным не только по времени, но и по сечению трубы, $p_0, p_l = \text{const}$):

$$(p_l - p_0)\mu 2\pi l \left[(r + \Delta r) \frac{du}{dr}(r + \Delta r) - r \frac{du}{dr}(r) \right] = S_{\text{butt}} = M + K.$$

Поделив обе части равенства на Δr и переходя к пределу $\Delta r \rightarrow +0$, получаем равенство:

$$\mu 2\pi l \frac{d}{dr} r \frac{du}{dr} = (p_l - p_0) 2\pi r. \quad (1.4)$$

Мы вывели *обыкновенное дифференциальное уравнение* второго порядка относительно неизвестной функции $u(r)$. Слово «обыкновенное» («ordinary») означает, что производные берутся только по одному аргументу (здесь — по переменной r). Поскольку старший порядок производной неизвестной функции равен двум, уравнение (1.4) классифицируется как уравнение второго порядка.

В этой задаче тоже можно простым интегрированием (аналогично (1.3)) определить зависимость скорости от радиуса. Для этого нужно учесть равенство: $\frac{du}{dr}(0) = 0$ и *граничное условие прилипания*: $u(R) = 0$ на поверхности трубы.

Замечание Г. Условие прилипания получается из физики взаимодействия жидкости с поверхностью трубы. Условие при $r = 0$ следует из непрерывности функции u на оси трубы, где система цилиндрических координат имеет особенность. Бесконечно гладкая функция двух переменных при $r = 0$ должна удовлетворять бесконечному числу условий (подробнее см.: [Гордин, 2012]).

Решение уравнения (1.4), удовлетворяющее этим двум граничным условиям при $r = 0, R$, определяется однозначно (проверьте!):

$$u(r) = \frac{p_0 - p_l}{4\mu l} (R^2 - r^2), \quad (1.5)$$

здесь скорость направлена вдоль оси трубы и зависит от радиуса квадратично.

Отсюда следует *формула Гагена*¹ (публикация 1839 г.)–*Пуазейля*² (публикации 1840–1841 гг.) для общего потока жидкости Π через трубу с круглым сечением:

$$\Pi = \int_0^R u \cdot 2\pi r \, dr = \frac{\pi R^4}{8\mu l} (p_0 - p_l).$$

Следовательно, средняя скорость такого потока может быть вычислена по формуле:

$$u_{\text{ср}} = \Pi / (\pi R^2) = \frac{R^2}{8\mu l} (p_0 - p_l), \quad (1.6)$$

она равна половине максимальной.

¹ Г.Х.Л. Гаген (1797–1884).

² Ж.Л.М. Пуазейль (1797–1869).

Если поток в трубе ламинарный, закон Гагена–Пуазейля¹ (поток Π пропорционален четвертой степени радиуса трубы R) выполняется (как показывает эксперимент) с большой точностью. Коэффициент внутреннего трения μ совпадает с *динамической вязкостью* жидкости. Обратная величина $\varphi = \frac{1}{\mu}$ называется *текучестью* этой жидкости. Давление $p = p(x)$ при стационарном течении жидкости изменяется вдоль трубы постоянного сечения линейно:

$$p = p_0 + \frac{p_l - p_0}{l}x. \quad (1.7)$$

Замечание Д. Если труба не прямая, а изогнутая, то скорость стационарного течения (при тех же длине и разнице давлений на концах) в ней будет меньше, а значит, и пропускная способность такой трубы меньше. Чем круче изгиб, тем сильнее замедление. Это же замечание относится и к потокам автомобилей на дороге.

Замечание Е. У человека аорта расположена не прямо против сердца, а под углом к его поверхности. Поэтому при выталкивании из сердца во время систолы² кровь прижимается к «дальней» стенке, а «ближняя» сторона аорты оказывается незаполненной. Во время диастолы, когда напор крови из сердца ослабевает, аорта заполняется полностью, но скорость крови сравнительно мала. Искривленность аорты приводит к закручиванию потока крови. На движение крови влияет и эластичность стенок кровеносных сосудов (см., например: [Батищев и др., 2013]).

Замечание Ж. Сдвиг скорости стационарного течения в круглой трубе легко определяется из формулы (1.5):

$$\dot{\gamma}(r) = \frac{du}{dr} = \frac{p_l - p_0}{2\mu l} r. \quad (1.8)$$

Если рассмотреть эту функцию вдоль произвольного диаметра трубы (постройте график!), то окажется, что при $r = 0$ функция имеет излом. Это не означает, что скорость течения u не является гладкой функцией. Такой график — следствие вырожденности системы полярных координат при $r = 0$.

Средний сдвиг в круглой трубе радиуса R получается осреднением $\dot{\gamma}(r)$ по кругу: $\bar{\gamma} = \frac{p_l - p_0}{3\mu l} R$.

Если труба имеет постоянное эллиптическое сечение, а давление на каждом из концов трубы p_0 и p_l не меняется вдоль сечения, т.е. не зависит от координат $\langle x, y \rangle$, то скорость, направленная вдоль оси трубы, в стационарном режиме может быть вычислена по формуле:

$$u(x, y) = (2\mu)^{-1} \frac{p_0 - p_l}{l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right], \quad (1.9)$$

¹ Гаген и Пуазейль получили формулу экспериментально; теоретическое объяснение (в том числе, роли вязкости) дал Дж.Г. Стокс (1819–1903), см. также разд. 9.2.

² На греческом языке систола означает сжатие, а диастола — расширение.

где $p_0 - p_l = \text{const}$ — перепад давления на участке трубы длиной l ; a, b — полуоси эллипса (сечения трубы) в направлениях x, y соответственно. При $a = b$ получаем формулу (1.5).

К.III. Определите матрицу $\epsilon_{i,j}$ для течения (1.9) и ее собственные числа. Как этот результат связан с формулой (1.8) в случае круглой трубы?

В случае цилиндрической трубы произвольного сечения G стационарное распределение скорости $u(x, y)$ по сечению удовлетворяет (это можно доказать) *дифференциальному уравнению в частных производных* (в такое уравнение входят производные не по одному, а по двум переменным) — *уравнению Пуассона*¹:

$$\Delta u = \frac{p_l(x, y) - p_0(x, y)}{\mu l} = f(x, y), \quad \langle x, y \rangle \in G \quad (1.10)$$

и *граничному условию Дирихле*²:

$$u = 0 \quad (1.11)$$

на границе ∂G области G .

Физический смысл этого граничного условия (его называют *условием прилипания*, и оно обобщает условие $u(R) = 0$ для круглой трубы): те частицы жидкости, которые граничат с твердым телом, остаются абсолютно неподвижны.

Здесь используется обозначение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

этот действующий в пространстве функций $u = u(x, y)$ дифференциальный оператор Δ называется *оператором Лапласа*³.

Замечание 3. При нулевой правой части $f \equiv 0$ уравнение Пуассона (1.10) называется *уравнением Лапласа*.

Замечание И. В уравнении Пуассона (1.10) правая часть — функция двух переменных. Но, если мы рассматриваем стационарное течение жидкости со скоростью, направленной вдоль оси z , то, оказывается, эта функция может быть лишь константой. Если функция $f(x, y)$, пропорциональная перепаду давления, зависит от x или y , то стационарное течение жидкости возможно, но скорость этого течения не везде будет направлена вдоль оси.

Уравнение Пуассона, связывающее функции u и f , приведено здесь в общем виде, поскольку оно описывает много других физических явлений. Например, соотношение между электростатическим потенциалом и электрическим зарядом, между стационарной концентрацией примеси и распределением ее источников, между стационарной температурой и источником тепла, между положением упругой мембраны и силы,

¹ С.Д. Пуассон (1781–1840).

² Л.П.Г. Дирихле (1805–1859).

³ П.С. Лаплас (1749–1827).

ее растягивающей. Разумеется, в этих задачах учитываются также проводимость, коэффициент диффузии или температуропроводности, упругость среды.

Граничное условие (1.11) в перечисленных задачах означает соответственно изопотенциальность границы, нулевую концентрацию примеси, нулевую температуру, отсутствие отклонения мембраны.

Если рассматривается не плоская, а объемная трехмерная задача электростатики, диффузии, теплопроводности и т.п., то обе функции (и правая часть уравнения, и его решение) зависят уже от трех переменных, а в оператор Лапласа добавляется $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Во всех этих задачах предполагается, что речь идет о стационарном решении. Если функции u и f в момент времени $t = 0$ не удовлетворяют уравнению (1.10), то начнется динамический процесс «приспособления» функции u к правой части f . Искомое решение $u = u(t, x, y)$ зависит от времени, и уравнение Пуассона (1.10) нужно заменить на другое, содержащее и производную решения по времени t . Для перечисленных выше физических явлений динамические процессы различны.

Замечание К. Произвольное (не обязательно стационарное) течение вязкой несжимаемой жидкости в области $G \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей ∂G задается векторным полем скоростей жидкости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ во всех точках $\mathbf{x} \in G$.

На границе жидкости и твердого тела векторное поле должно удовлетворять условию прилипания:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial G} = \mathbf{0}. \quad (1.12)$$

Для рассмотренного выше течения в трубе две компоненты скорости тождественно нулевые, а на компоненту вдоль оси трубы накладывают условие (1.11). Для винтового течения в трубе с круглым течением радиальная компонента скорости тождественно равна нулю, а компонента скорости вдоль оси трубы и угловая компонента на границе между жидкостью и трубой обращаются в нуль. Это следствия векторного граничного условия (1.12).

Рассмотрим течение жидкости по трубе с бесконечным сечением — в виде полосы S : $y \in \mathbb{R}$, $x \in [0, H]$ (течение в плоском слое). Разумеется, труб с таким сечением не бывает, но для труб с сильно вытянутым сечением S_L : $y \in [0, L]$, $L \gg H$ такая постановка может быть неплохим приближением. Мы также будем предполагать, что и перепад давлений постоянен: $f = f_0 = \text{const}$.

Преимущество постановки задачи, использующей сечение S , — ни форма области, ни граничное условие (1.11), ни само уравнение (1.10) не зависят от переменной y . Следует ли отсюда, что и решение задачи $u(x, y)$ будет зависеть только от переменной x ?

Если функция $u_*(x, y)$ удовлетворяет и дифференциальному уравнению, и граничному условию, т.е. является решением задачи (1.10)–(1.11) в такой области S , то и функция $u_*(x, y + h)$ при произвольном $h \in \mathbb{R}$ — тоже решение. Для задачи в весьма широком классе ограниченных областей, например в областях S_L , можно доказать теорему единственности — двух разных решений быть не может.

Но для неограниченной по переменной y полосы S теорема единственности решения задачи (1.10)–(1.11) в такой постановке уже неверна. Действительно, рассмотрим функции

$$u_k(x, y) = \exp(ky/H) \sin(k\pi x/H), \quad k \in \mathbb{Z} \setminus 0.$$

Такие функции отличны от тождественного нуля и дают решение задачи (1.10)–(1.11) в полосе S при нулевой правой части $f \equiv 0$. Значит, любую из них можно прибавить к решению $u_*(x, y)$ задачи (1.10)–(1.11) — такая функция $u_* + u_k$ также будет решением задачи.

Введем дополнительное ограничение: функция $u_*(x, y)$ остается ограниченной при $y \rightarrow \infty$. Тогда функции u_k оказываются «запрещенными». В таком классе функций решение u задачи (1.10)–(1.11) в полосе S единственно — это можно доказать. А значит, это единственное решение не может зависеть от переменной y .

Уравнение (1.10) в этом случае — не уравнение в частных производных, а более простое обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x),$$

которое решается двумя интегрированиями с точностью до линейной функции $C_0 + C_1 x$. При $f = f_0 = \text{const}$ получаем решение задачи:

$$u(x) = f_0 x(x - H)/2,$$

легко проверить, что функция удовлетворяет и уравнению, и граничным условиям.

Максимальная скорость, естественно, наблюдается в середине слоя — при $x = H/2$:

$$u_{\max} = -f_0 H^2/8.$$

Объем жидкости, протекающей за единицу времени через единичный участок плоской трубы (щели), вычисляется по формуле

$$V = \int_0^H u(x) dx = -\frac{f_0 H^3}{12}.$$

Средняя скорость в такой щели

$$u_{\text{cp}} = V/H = -\frac{f_0 H^2}{12}$$

больше средней скорости в круглой трубе (1.6), если приравнять ширину H к диаметру круглой трубы $D = 2R$.

Если сечение трубы G не круглое и не плоское, например это прямоугольник S_H , то решение уравнения (1.10) можно легко построить:

$$u_1(x, y) = f_0(x^2 + y^2)/2, \tag{1.13}$$

однако для него граничное условие (1.11) не выполняется. Чтобы получить решение задачи (1.10)–(1.11), нужно из функции u_1 вычесть решение задачи уже для уравнения Лапласа, но с неоднородным граничным условием:

$$u_2(x, y)|_{\partial G} = u_1(x, y).$$

К.IV. Проверьте, что для трубы с эллиптическим сечением формула (1.9) задает скорость течения, удовлетворяющую и уравнению (1.10), и граничному условию прилипания.

Эта функция $u(x, y)$ удовлетворяет и граничным условиям, и дифференциальному уравнению (1.10). А как решать более сложную задачу для функции $f = f(x, y)$ в правой части уравнения (1.10), отличной от константы? Ответы на подобные вопросы дает теория уравнений в частных производных.

Пусть сечение цилиндрической трубы G имеет конечную площадь. *Среднюю скорость течения* в трубе определим формулой:

$$U_{\text{ср}} = \frac{\int_G u(x, y) dx dy}{\int_G dx dy}.$$

К.V. Как соотносятся между собой средняя и максимальная скорости течения стационарного ламинарного течения в бесконечной трубе эллиптического сечения с заданным эксцентриситетом?

К.VI. Пусть жидкость под действием перепада давления течет стационарно и ламинарно вдоль оси z в цилиндрическом слое $R_1 < r < R_2$. Докажите, что функция

$$u = u(r) = \frac{p_0 - p_l}{4\mu l} \left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln(r/R_2) \right]$$

задает скорость течения, удовлетворяющую и уравнению (1.10), и граничному условию прилипания (1.11). Здесь граница области G состоит из двух окружностей радиусов R_1 и R_2 . Оцените полный поток через такую цилиндрическую трубу. При каком r скорость u максимальна?

К.VII. Пусть внутри заполненной жидкостью круглой трубы радиуса R_2 движется вдоль оси z со скоростью V коаксиальный цилиндр радиуса $R_1 < R_2$. Тогда жидкость при $r = R_1$ «прилипает» к движущемуся цилиндру, и граничное условие (1.11) нужно модифицировать:

$$u(R_2) = 0, \quad u(R_1) = V.$$

Определите скорость $u(r)$, ее максимальное значение и среднюю величину.

К.VIII. Пусть сечение трубы G — равносторонний треугольник со стороной a . Обозначим $h_j = h_j(x, y)$ функцию — расстояние от точки $\langle x, y \rangle$ до j -й стороны треугольника. Докажите последовательно утверждения: i) $\Delta h_j \equiv 0$; ii) $\Delta h_1 h_2 h_3 = -a\sqrt{3}/2$. Из них следует, что функция

$$u(x, y) = \frac{-2f_0 h_1 h_2 h_3}{\sqrt{3}a}$$

решение задачи (1.10)–(1.11) для равностороннего треугольника, когда правая часть $f = f_0$ — константа.

К. IX. Докажите, что для такого сечения трубы средняя скорость составляет $f_0 a^2/80$, а максимальная — $f_0 a^2/36$. Как соотносятся пропускная способность круглой трубы и пропускная способность трубы с треугольным сечением и той же плоскостью сечения? С тем же периметром?

Во всех перечисленных примерах труб ламинарное течение, следуя рассуждению Ньютона, можно условно разбить на неперемешивающиеся друг с другом цилиндрические слои. Однако эти цилиндры будут отличаться от изображенных на рис. 1.3. Их основаниями на плоскости $\langle x, y \rangle$ будут служить полосы, заключенные между изолиниями $u(x, y)$, — решения уравнения (1.10) с граничным условием прилипания на ∂G .

Можно доказать, что решение уравнения (1.10), удовлетворяющее условию Дирихле (1.11), существует и единственно. И не только для постоянной функции f , но и для любой кусочно-непрерывной в области G функции. Относительно области G при доказательстве достаточно предположить, что ее граница ∂G — кусочно-гладкая.

При таких предположениях, располагая явной формулой для решения $u(x, y)$, можно не опасаться, что найдется еще одно. Кроме того, можно доказать, что при малом (в каком смысле понимается малость следует еще уточнить) изменении правой части решение (1.10), удовлетворяющее условию Дирихле, также изменится мало. Эти важные теоремы теории уравнений в частных производных имеют многочисленные обобщения.

1.3. СЕРДЦЕ И ДРУГИЕ НАСОСЫ. БЕЗРАЗМЕРНОЕ ЧИСЛО УОМЕРСЛИ

Течение по нефтепроводам, водопроводам, газопроводам и другим аналогичным техническим сооружениям, большую часть времени стационарно — скорость почти не меняется со временем. Разумеется, иногда происходят переключения режима (например, повышается или понижается напор в трубе) или аварии¹.

В течение какого-то времени наблюдается переходный процесс: скорость течения меняется. Постепенно течение снова выходит на стационарный режим (тот, что был прежде, или иной). Однако многие насосы работают иначе: периодически (с периодом T) изменяя подачу жидкости или газа в трубу. Пример такого насоса — сердце, выбрасывающее «свежую» кровь в аорту

¹ Течение во время таких переходных процессов описать намного труднее, чем стационарное. Все варианты пытаются предусмотреть (а для этого рассчитать) заранее. Эти практически очень важные, но и сложные расчеты выходят за круг вопросов, рассматриваемых в этой книге.

и принимающее кровь из вен. У разных животных *пульс*¹ — количество ударов в минуту — сильно различается².

Замечание Л. Зависимость продолжительности жизни различных видов от среднего периода сокращения сердечной мышцы можно было бы считать линейной, если человек не «портил» бы этот замечательный закон (см. рис. 1.4).

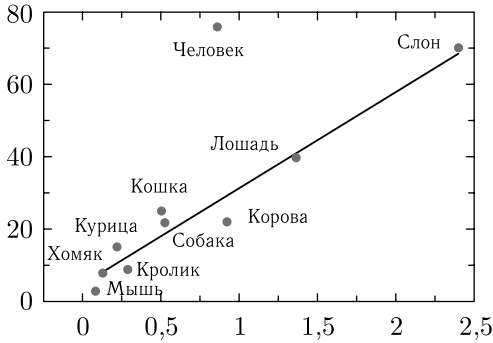


Рис. 1.4. Соотношение между средним периодом сокращения сердечной мышцы в секундах и средней длительностью жизни в годах, согласно работе [McMahon, Bonner, 1983]

Безразмерное число Уомерсли³ задается формулой

$$Wo = L \sqrt{\frac{2\pi}{\nu T}}.$$

В аорте человека $Wo = 20$, а крысы — 3. Подробнее см. табл. 1.1.

Таблица 1.1

Характерные значения (согласно [Charm, Kurland, 1974]) для средней скорости крови человека, диаметра его кровеносных сосудов, сдвига скорости и чисел Рейнольдса и Уомерсли. Здесь характерный размер задачи $L = d$

Сосуды	$\bar{u}$ (м/с)	d (мм)	$\bar{\gamma}$ (с ⁻¹)	Re	Wo
Аорта	0,40	2	130	2500	260
Артерии	0,45	4	900	450	40
Артериолы	0,50	0,05	8000	0,5	0,5
Капилляры	0,001	0,008	1000	0,002	0,1
Венулы	0,002	0,02	800	0,01	0,2
Вены	0,10	5	160	125	50
Вена Кава	0,38	30	100	2800	310

¹ От латинского слова *pulsus* — удар, толчок.

² Среди людей пульс также различен. Да и у одного человека в разных ситуациях — тоже. Средним пульсом человека полагают от 60 до 90 ударов в минуту.

³ Дж.Р. Уомерсли (1907–1958).

К.Х. Оцените вязкость крови в каждом типе сосудов, используя данные табл. 1.1:
i) $\bar{u}$, d , **Re**; ii) $\bar{u}$, d , **Wo** при кардиологическом периоде $T = 1$ с.

К.ХI. Используя полученные оценки вязкости, определите относительный перепад давления $(p_0 - p_l)/l$ для каждого из типов кровеносных сосудов, используя i) среднюю скорость $\bar{u}$; ii) средний сдвиг скорости $\bar{\gamma}$.

1.4. ТЕЧЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Мы предполагали, что давление на входе в трубу с круглым сечением и на выходе из нее не меняется вдоль сечения: $p_0, p_l = \text{const}$. Выполнение этого предположения зависит от подробностей течения на входе в трубу и на выходе из нее. Применяв специальные насосы, можно реализовать разнообразные функции $p_0(r)$ и $p_l(r)$.

Также предполагалось, что $\mu = \text{const}$. Выполнение этого предположения может зависеть от свойств жидкости. Например, при стационарном течении крови по кровеносным сосудам важно распределение эритроцитов $e(r)$ по радиусу. Эта функция может определяться и радиусом кровеносного сосуда R , и размерами эритроцитов¹, и их упругими свойствами, и свойствами их поверхности (как они взаимодействуют). От этой функции — концентрации эритроцитов — зависит вязкость. Там, где эритроцитов больше, больше и величина вязкости смеси (которую мы также будем рассматривать как жидкость) $\mu(r)$. Будем, по-прежнему, предполагать, что течение стационарно, и направлено вдоль оси цилиндрической трубы.

Строго говоря, следует одновременно определять все эти функции радиуса $u(r)$, $p_0(r)$, $p_l(r)$, $e(r)$, $\mu(r)$, которые описывают стационарное течение в круглой трубе из единой модели². Предположим, однако, что функцию $\mu(r)$ можно определить из эксперимента независимо от других функций. Тогда из (1.4) получаем (поскольку $\left(r \frac{du}{dr}\right)\big|_{r=0} = 0$; см. Замечание Г):

$$r \frac{du}{dr} = \int_0^r \frac{(p_l - p_0)y}{l\mu(y)} dy = \frac{p_l - p_0}{l} \int_0^r \frac{y dy}{\mu(y)}. \quad (1.14)$$

¹ Нормальный диаметр эритроцитов взрослого человека лежит в диапазоне 7–8 мкм; форма их — средняя между шаром и бубликом, внутренность которого затянута пленкой. Если эритроциты меньше нормы, они переносят меньше кислорода из легких на периферию, если эритроциты больше нормы — они плохо проходят по кровеносным сосудам. При необходимости эритроциты могут вытягиваться, чтобы проходить по кровеносным сосудам с диаметром до 2 мкм. В данном примере обсуждается течение эритроцитов по кровеносным сосудам существенно большего диаметра.

² Помимо эритроцитов в плазме крови присутствуют и другие частички, более мелкие. Их наличие в потоке также может влиять на вязкость смеси.

При $\mu = \text{const}$ получаем формулу (1.4). Для простейшей осесимметричной гладкой функции, убывающей по мере удаления от оси трубы: $\mu(r) = (A + Br^2)^{-1}$, где $A, B = \text{const}$, причем $A, B > 0$, получаем из (1.14)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{(p_l - p_0)}{2lr} \int_0^{r^2} A + By^2 d(y^2) = \frac{(p_l - p_0)}{2lr} \left(Ar^2 + \frac{1}{2} Br^4 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow u(r) &= \frac{p_0 - p_l}{l} \left[\left(\frac{1}{4} AR^2 + \frac{1}{16} BR^4 \right) - \left(\frac{1}{4} Ar^2 + \frac{1}{16} Br^4 \right) \right]. \end{aligned}$$

К.ХП. Определите среднюю скорость такого течения. Как она связана с максимальной?

Замечание М. Если рассмотреть течение с переменной вязкостью $\mu = A - Br^2$, $A, B > 0$, $A - BR^2 > 0$, то последний интеграл в элементарных функциях не берется (проверьте!). Это, впрочем, не мешает построить графики с помощью компьютера, вычисляя соответствующий интеграл приближенно.

К.ХП. Определите скорость течения $u(r)$, если вязкость кусочно-постоянна: $\mu(r) = \mu_1$ при $r \in [0, R_1]$ и $\mu(r) = \mu_2$ при $r \in [R_1, R]$, где $\mu_1 > \mu_2 > 0$. Нужно предположить, что скорость $u(r)$ и поток $\mu(r)r \frac{du}{dr}$ непрерывны в точке R_1 . Иначе предел в (1.4) не существует. Поскольку r непрерывна, можно предполагать непрерывность функции $\mu(r) \frac{du}{dr}$ — здесь производная скорости по радиусу терпит скачок при $r = R_1$.

1.5. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ИЗМЕРЕНИЯ

Турбулентность возникает, когда основной стационарный ламинарный поток перестает быть устойчивым по отношению к малым мелкомасштабным (т.е. быстро меняющимся по пространственным переменным) возмущениям, и начинают образовываться и развиваться вихри с маленьким диаметром.

Уже в простейшей задаче с круглой трубой возникновение турбулентности представляет практический интерес. Например, чем ограничивается скорость подачи воды в пожарном брандспойте? Важная техническая задача — поддержание ламинарного режима при возможно больших скоростях, так как переход к турбулентности резко понижает пропускную способность¹.

¹ В нефтепроводах оказывается полезен так называемый *эффект Б.А. Томса* (1948) — введение малых (сотые доли процента) добавок специально подобранных полимеров (сам Томс работал с полиметилметакрилатом, растворенным в моноклорбензоле, но потом были найдены и другие вещества с подобным свойством) позволяет избегать турбулентности потока при сравнительно больших скоростях — полимеры образуют в потоке нефти «упорядоченные структуры». Позднее этот эффект использовался для снижения сопротивления движению подводных лодок в морях, воды в ирригационных системах и крови в артериях. Возможно, он объясняет упомянутый выше эффект Грея.

А как проводить измерения давления внутри течения, не слишком это течение искажая?

Давления движущейся со скоростью u жидкости на стенку трубы и на пластинку, жестко поставленную поперек течения в трубе, не равны друг другу. В первом случае *давление* называется *статическим*, а во втором — *полным*. Их разность называется *напором течения*. Напор может быть измерен *трубкой Пито*¹–*Прандтля*² (см. рис. 1.5).

Скорость вычисляется по наблюдаемому перепаду h уровней в трубках:

$$u = a \sqrt{2gh \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 1 \right)},$$

где γ_1, γ_2 — удельные веса исследуемой жидкости и жидкости манометра соответственно; g — ускорение свободного падения; a — поправочный коэффициент, который зависит от точности изготовления трубки Пито–Прандтля и ее размеров (диаметр может составлять доли миллиметра), причем обычно $1 < a < 1,04$.

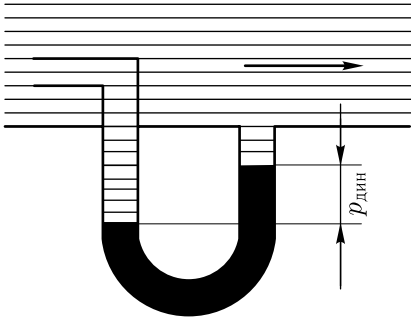


Рис. 1.5. Перепад давления $p_{\text{дин}}$ в трубке Пито–Прандтля равен разности полного и статического давлений и называется напором течения. В трубке он компенсируется столбиком рабочей жидкости высотой h . Удельный вес рабочей жидкости в манометре больше удельного веса жидкости в трубе. Результат измерения зависит и от того, в какую часть сечения поместить левую часть трубки. Около оси трубы и рядом с трубой скорости разные. Разумеется, в таких деликатных трубочках, как кровенос-

ные сосуды *in vivo*, методы измерения параметров течения совершенно другие — используются эффект Допплера, ядерный магнитный резонанс и т.п. (см., например: обзор [Vennemann et al., 2007])

*Вейсбах*³ (1845) и *Дарси*⁴ (1857) вывели эмпирическую *формулу* для падения напора W (который измеряется разностью высот Δh жидкости в вертикальных трубках, установленных на расстоянии l друг за другом) для стационарного течения со средней скоростью u в круглой трубе диаметром d :

$$W = hl = \lambda l \frac{u^2}{2dg}.$$

¹ А. Пито (1695–1771). Свою трубку он использовал для исследования скорости течения воды в Сене.

² Л. Прандтль (1875–1953).

³ Ю. Вейсбах (1806–1871).

⁴ А.П.Г. Дарси (1803–1858).

Это напор, который «пропихивает» воду по трубе на расстояние l . Безразмерный коэффициент гидравлического трения λ существенно различен для ламинарного и турбулентного режимов. Эмпирические формулы для этого коэффициента соответственно:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \lambda = 0,11 \cdot \left(\frac{K_d}{d} + \frac{64}{\text{Re}} \right)^{1/4},$$

где K_d — эквивалентная шероховатость стенок трубы; $d \equiv L$ — диаметр трубы, входящий в определение числа Рейнольдса; скорость U в определении числа Рейнольдса берется средней по сечению трубы.

К.XIV. Пусть левая часть трубки Пито находится на расстоянии $R/2$ от оси круглой трубы, $a = 1$, $h = 20$ см и $\gamma_2/\gamma_1 = 2$. Определите максимальную и среднюю скорости течения.

К.XV. Предположим, что в условиях предыдущей задачи погрешность определения скорости трубкой Пито равна 10 см/с. Оцените абсолютную и относительную погрешности оценок максимальной и средней скоростей.

К.XVI. Тот же вопрос, если известна не абсолютная, а относительная погрешность трубки Пито, равная 10%.

К.XVII. Предположим, что от нас зависит выбор расстояния левой части трубки Пито от оси трубы. Как будут меняться погрешности оценки скоростей в зависимости от этого выбора?

В турбулентном течении можно выделить две области: тонкую, около стенки трубы — так называемый *пограничный слой*, где скорость резко изменяется, и внешнюю (по отношению к погранслою), где изменения сравнительно малы. Для турбулентного течения средняя¹ скорость составляет 1/1,23 от максимальной на оси трубы.

При больших возмущениях потока жидкости на входе в прямую круглую трубу турбулентность возникает уже при $\text{Re}_{\text{кр}} \approx 2300$, но, уменьшая возмущения скорости жидкости на входе в трубу, можно сохранить ламинарный режим вплоть до $\text{Re}_{\text{кр}} \approx 50\,000$.

К.XVIII. Постройте графики зависимости коэффициента гидравлического трения $\lambda = \lambda(\text{Re})$ в идеально гладкой ($K_d = 0$) трубе для обоих вариантов возмущений на входе.

Турбулентность возникает там, где имеется большая скорость, и, конечно, ее необходимо учитывать при аэродинамическом расчете самолетов и ракет. По своему вкладу в уравнения движения турбулентность напоминает молекулярную вязкость (только вклад этот на несколько порядков больше).

Влияют на режим течения и граничные условия. На рис. 1.6, полученном с помощью электронного микроскопа [Berg et al., 2003], представлено сечение

¹ Осреднение по сечению трубы, в которой погранслоем составляет малую часть.

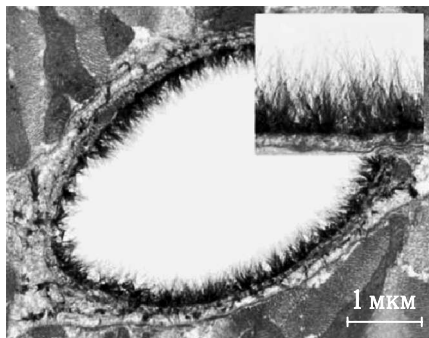


Рис. 1.6. Граница капилляра покрыта волосками из глюконата калия

капилляра в желудочке миокарда. Видимо, эти волоски препятствуют возникновению турбулентности в капилляре. Во всяком случае они существенно влияют на свойства погранслоя в таком течении.

Здесь рассматривались стационарные течения. Мы предполагаем, что когда по трубе начинает двигаться вода, течение будет иным. Но оно постепенно станет стационарным. Отклонения от стационарного течения со временем будут убывать и затухнут. Подразумевалась единственность и устойчивость стационарного течения. Но эти «естественные» предположения не всегда оказываются верными. При сверхзвуковом обтекании тела могут существовать несколько стационарных решений (на какое из них выйдет со временем решение, зависит от начального течения). Если при каких-то параметрах стационарные течения неустойчивы, возможны периодические по времени устойчивые решения (см., например: [Ван-Дайк, 1986]).

Учебное издание

Серия «Учебники Высшей школы экономики»

Владимир Александрович Гордин

**Дифференциальные и разностные уравнения:
Какие явления они описывают и как их решать**

Зав. редакцией *Е.А. Бережнова*

Редактор *Н.М. Дмуховская*

Художественный редактор *А.М. Павлов*

Компьютерная верстка и графика: *Д.В. Горбачев*

Корректор *Н.М. Дмуховская*

Подписано в печать 01.12.2015. Формат 70×100/16.

Печать офсетная. Усл.-печ. л. 43,5. Уч.-изд. л. 34,3

Тираж 1000 экз. Изд. № 1700

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

101000, Москва, ул. Мясницкая, 20

Тел./факс: (499) 611-15-52

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография». Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
www.chpd.ru, e-mail: sales@chpd.ru, тел.: 8 (495) 988-63-76, тел./факс: 8 (496) 726-54-10