Афанасьев В.Н.

УПРАВЛЕНИЕ РЕАКТОРОМ НА ТЯЖЕЛОЙ ВОДЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ, ПАРАМЕТРЫ КОТОРЫХ ЗАВИСЯТ ОТ СОСТОЯНИЯ

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Afanasiev V.N.

CONTROL OF THE HEAVY WATER REACTOR ON WITH USE OF THE STATE DEPENDING COEFFICIETS MODEL

Institute of Control Sciences V. A. Trapeznikov Academy of Sciences, Moscow, Russia

Введение

Применение уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJBE) для синтеза управляющих воздействий для нелинейных систем наталкивается, как правило, на сложности аналитического и вычислительного порядков. С другой стороны, использование уравнения HJBE дает возможность исследовать системы, параметры которых зависят от состояния (SDC) [1,2]. Для квадратичных функционалов качества в задаче стабилизации это позволяет осуществить переход от скалярного уравнения в частных производных (HJBE) к матричному уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния (SDRE). Следует отметить, что использование метода SDRE для решения HJBE наталкивается на проблему неоднозначного представления нелинейной системы в форме SDC [2]. Отметим что, аналитического решения SDRE в общем случае получить невозможно.

В работе используется метод синтеза гарантирующего управления нелинейным объектом, в качестве которого избран реактор на тяжелой воде [3]. Представление исходной системы в форме SDC и использование модели такого вида, но с постоянными параметрами, при которых полученная модель содержит наименее благоприятные параметры, позволяет синтезировать гарантирующее управление [5, 6].

1. Постановка задачи

Для описания математической модели ядерного реактора на тяжелой воде используются упрощенные уравнения динамики реактора, полученные из уравнений нейтронной диффузии. Реактор условно разделен на четырнадцать зон, рассматриваемых как четырнадцать маленьких ядер, каждое из которых связано с соседними ядрами посредствам уравнений нейтронной диффузии. В результате можно записать упрощенную математическую модель реактора в следующем виде [3]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dP_i}{dt} = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{14}(a_{ji}P_j - a_{ij}P_i) + \left(\frac{-K_i(H_i - H_{i0}) - \dfrac{\bar{\sigma}_{X_i} X_i}{\Sigma_{ai}} - \beta}{l_i} \right) P_i + \lambda C_i, \\
&\frac{dC_i}{dt} = -\lambda C_i + \frac{\beta}{l_i}P_i, \quad \frac{dI_i}{dt} = \gamma_I \Sigma_{fi} P_i - \lambda_I I_i, \qquad (1) \\
&\frac{dX_i}{dt} = \gamma_X \Sigma_{fi} P_i + \lambda_I I_i - (\lambda_X + \bar{\sigma}_{X_i} P_i) X_i, \\
&\frac{dH_i}{dt} = -m_i q_i, \quad (i = 1,2...,14).
\end{aligned}
$$

где i и j – номера соответствующих зон реактора; P_i - мощность i-ой зоны, *МВт*, C_i - концентрация ядер предшественников запаздывающих нейтронов в i-ой зоне, $моль/см^3$; I_i - концентрация йода в i-ой зоне, $моль/см^3$; X_i - концентрация ксенона в i-ой зоне, $моль/см^3$; H_i - уровень воды в i-ой зоне, *см*; l_i – время мгновенных нейтронов, *с*; β - доля запаздывающих нейтронов; λ - постоянная распада, $с^{-1}$; λ_I - постоянная распада йода, $с^{-1}$; λ_X - постоянная распада ксенона, $с^{-1}$; Σ_{ai} - коэффициент поглощения тепловых нейтронов, $см^{-1}$; Σ_{fi} - коэффициент деления тепловых нейтронов, $см^{-1}$; γ_I - количество йода, полученное при делении; γ_X - количество ксенона, полученное при делении; a_{ij} - коэффициент связи; σ_{X_i} - сечение поглощения тепловых нейтронов ксенона, $см^2$; $\bar{\sigma}_{X_i} = \dfrac{\sigma_{Xi}}{\Sigma_{eff}\Sigma_{fi}V_i}$; Σ_{eff} - энергия выделяемая при делении ядра, *МДж*; a_{ij} - коэффициент связи

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{Dvl\psi_{ij}}{d_{ij}V}, & если \quad i \neq j, \\ 0, & если \quad i = j; \end{cases}$$

ψ_{ij} - площадь перекрытия между *i*-ой и *j*-ой зоной, $см^2$; V_i – объем тяжелой воды в *i*-ой зоне, $см^3$; d_{ij} - расстояние между *i*-ой и *j*-ой зоной, *см*; D – коэффициент диффузии, *см*; v - скорость тепловых нейтронов, *см/с*.

Задача управления заключается в построении воздействий, которые остановит работу реактора. В качестве управляющих воздействий являются уровни тяжелой воды в каждой зоне реактора. Опишем общую методику синтеза гарантирующего управления нелинейными объектами [5, 6].

2. Синтез оптимального управления

Пусть объект описывается уравнением вида

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + Gu(t), \\ &y(t) = h(x),\ x(t_0) = x_0,\ f, g : T \times \Omega \to R^n. \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $T-$ интервал $[0,T]$; $\Omega-$область (открытое связанное множество) R^n, содержащая начало; $x \in R^n$ $-$состояние системы; $x_0 \in X_0$, X_0- область возможных начальных состояний системы; $u \in R^r-$управление, подлежащее нахождению; $y \in R^m, m \leq n$ $-$ выход системы; матрицы $f(x)$, G действительны и непрерывны. Предполагается, что при всех x пара $\langle f(x), G \rangle$ является управляемой, пара $\langle f(x), h(x) \rangle$ наблюдаемой. Кроме того, вектор функция $f(x)$

будем предполагать достаточно гладкая, чтобы через любые $(0, x_0) \in T \times \Omega$ проходило одно и только одно решение (2).

Задан функционал качества

$$J(x,u) = \frac{1}{2} y^T(t) F y(t) + \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right\} dt \ , \tag{3}$$

матрицы F, Q положительно полуопределенные; матрица R − положительно определенная. Задача заключается в построении управления минимизирующего функционал (3) на объекте (2), реализуемого в темпе функционирования объекта.

Дадим вначале некоторые комментарии по вопросу существования решения задачи. Предполагая, что функция $f(x)$ достаточно гладкая, $t \in [0, T]$, введем функцию стоимости игры

$$V(t,x) = J(x,u) \ , \tag{4}$$

где $V(t,x)$ дифференцируемая функция при любых допустимых стратегиях $u \in L_2(t_0, T)$. Уравнение Гамильтона-Якоби будет иметь вид

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + H\left(x, u, \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}, t \right) = 0, \ V(T, x(T)) = \frac{1}{2} h^T(x(T)) F\, h(x(T)). \tag{5}$$

Здесь H − гамильтониан

$$H\left(x, u, w, \frac{\partial V(t,x)}{\partial x(t)}, t \right) = \frac{1}{2}\left[h^T(x) Q\, h(x) + u^T(t) R\, u(t) \right] + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x(t)} \left[f(x) + G u(t) \right]. \tag{6}$$

Учитывая (5) и (6), будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x(t)} \left[f(x) + \frac{1}{2} G u(t) \right] + \frac{1}{2} h^T(x) Q\, h(x) + \\ &+ \frac{1}{2} u^T(t) \left[G \left\{ \frac{\partial V(t,x)}{\partial x(t)} \right\}^T + R\, u(t) \right] = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Определим управление $u(t)$ с точностью до вектора $\{\partial V(t,x) / \partial x(t)\}^T$ так, чтобы последнее слагаемое (7) равнялось нулю, т.е.

$$u(t) = -R^{-1}(x) G \left\{ \frac{\partial V(t,x)}{\partial x(t)} \right\}^T . \tag{8}$$

Тогда уравнение Гамильтона-Якоби примет вид

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x(t)}f(x)+\frac{1}{2}h^T(x)Q\,h(x)+\frac{1}{2}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x(t)}\left[GR^{-1}G^T\right]\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x(t)}\right\}^T=0, \qquad (9)$$
$$V(T,x(T))=\frac{1}{2}h^T(T,x)F\,h(T,x)$$

и исходная система (2) с управлениями (8) определяется выражением

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(t,x)-GR^{-1}G^T\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x(t)}\right\}^T,\ x(t_0)=x_0, \qquad (10)$$
$$y(t)=h(t,x).$$

Учитывая сделанные предположения о свойствах уравнения (2), это уравнение путем координатного преобразования [2] может быть представлено в форме SDC

$$\frac{d}{dt}x(t)=A(x)x(t)+Gu(t),\ \ x(t_0)=x_0, \qquad (11)$$
$$y(t)=H(x)x(t).$$

Предполагается, что пара $\langle A(x),G\rangle$ управляема и пара $\langle A(x),H(x)\rangle$ наблюдаема при $\forall x(t)\in X$.

Ведем функционал качества, назначив в (3) $F=0\ \ T\to\infty$, т.е.

$$J(x,u)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^T\left\{y^T(t)Q\,y(t)+u^T(t)R\,u(t)\right\}dt \qquad (12)$$

Учитывая, что $V(x)$ в этом случае в явном виде не зависит от времени, будем иметь

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}A(x)x(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}GR^{-1}G^T\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\right\}^T+\frac{1}{2}x^T(t)H^T(x)Q(x)H(x)x(t)=0. \qquad (13)$$

Если искать $\partial V(x)/\partial x(t)$ в виде

$$\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\right\}^T=S(x)x(t), \qquad (14)$$

то из (13) получим уравнение Риккати с параметрами, зависящими от состояния (SDRE) [2,5],

$$S(x)A(x)+A^T(x)S(x)-S(x)GR^{-1}G^TS(x)+H^T(x)Q(x)H(x)=0 \qquad (15)$$

и выражение для управления (8) перепишется

$$u(t) = -R^{-1}(x)g_2^T(x)S(x)x(t). \tag{16}$$

Уравнение объекта (2) с управлением (16) принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + GR^{-1}G^T S(x)x(t),\ x(t_0) = x_0, \\ &y(t) = h(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Как видно, основная проблема реализации управляющего воздействия (8) заключается в отыскании решения уравнения типа Риккати (15) в темпе функционирования объекта (2). Для этого можно привлекать методы символьных вычислений или поточечное решение алгебраического уравнения (15) с постоянными параметрами. Для практических задач и то и другое чаще всего не подходит. Реализуемое решение задачи управления нелинейным объектом (2) с приемлемыми переходными характеристиками может быть получено с использованием метода гарантирующего управления.

3. Гарантирующее управление

Отметим, что оптимальное управление $u(t)$ обеспечивает устойчивость исходной системе. В силу этого $x \in \Omega_x$, где $\Omega_x -$ замкнутое ограниченное множество, и значения параметров матриц $A(x),\ H(x)$ системы (11) принадлежат замкнутому ограниченному множеству $a(x) = \{A(x),\ H(x)\} \in D_a$.

Пусть $a^* = \{A^*,\ H^*\} \in D_a -$ матрицы системы (11) имеющие наименее благоприятные для решения задачи управления значения параметров. Введем определение «наименее благоприятных значений» матриц.

Так как параметры матрицы зависят от $x(t)$, т.е. $A(x)$, то ее собственные значения непрерывно завися от элементов матрицы, а корни многочлена непрерывно зависят от матричных элементов, которые, в свою очередь, зависят от $x(t)$, т.е. $\lambda_i(x),\ i = 1,...,n$ и $\lambda_1(x) \geq \lambda_1(x) \geq,...,\geq \lambda_n(x)$.

Определение 1. Под «наименее благоприятным значением матрицы $A(x)$» принимается матрица с постоянными элементами x^*, имеющая наибольшее собственное значение λ_1^* (правый корень характеристического уравнения), т.е. $\lambda_1^* = \lambda_1(x^*)$ и $A^* = A(x^*)$.

Для нахождения матрицы H^* введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(x) = x^T(t)S(x)x(t).$$

Тогда, учитывая (11) и (16), условие устойчивого движения будут иметь вид

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}V(x) =\\&= x^T(t)\left[A(x)S(x) + S(x)A^T(x) - 2S(x)GR^{-1}G^TS(x)\right]x(t) < 0,\\&x \neq 0\end{aligned}$$

или, учитывая (15),

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}V(x) =\\&= -x^T(t)\left\{H^T(x)QH(x) + S(x)S(x)GR^{-1}G^TS(x)S(x)\right\}x(t) < 0,\ x \neq 0.\end{aligned}$$

Используя полученное условие устойчивости можно ввести понятия «наименее благоприятного значения матрицы» $H(x)$.

Определение 2. Под «наименее благоприятным значением матриц $H(x)$» понимаем матрицу H^* с постоянными элементами, для которой выполняется следующее соотношение $\min\limits_{\mu} \operatorname{tr}\left[H(x)H^T(x)\right] = \min\limits_{\mu} \sum\limits_{k=1}^{r} \eta_{kk}(x),\ x(t) \in \Omega_x$, где η_{kk} – элемент главной диагонали симметрической матрицы $H(x)H^T(x)$.

Управляемая и наблюдаемая модель системы, содержащая наименее благоприятные параметры, будет иметь вид

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x^*(t) = A^*x^*(t) + Gu_M(t),\ x^*(t_0) = x_0,\\&y^*(t) = H^*x^*(t).\end{aligned} \qquad (18)$$

Запишем функционал качества для синтеза управляющих воздействий с использованием модели (18)

$$J(y^*, u_M) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\left(y^*(t)\right)^T Q\, y^*(t) + u_M^T(t)Ru_M(t)\right]dt \qquad (19)$$

Для стационарной системы (18) с функционалом (19) вектор $\left\{\partial V(x^*)/\partial x^*\right\}^T = S^*x^*(t)$, где положительно определенная матрица S^* находится решением уравнения Риккати

$$S^* A^* + \left(A^*\right)^T S^* + S^* G R^{-1} G^T S^* + \left(H^*\right)^T Q H^* = 0. \qquad (20)$$

Управление для модели системы (18) определяются следующим соотношением $u_M(t) = -R^{-1} g_2^* S^* x^*(t)$. Исходная система управления (2) с гарантирующим управлением $u(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} x(t) = f(x) - G R^{-1} G^T S^* x(t),\ x(t_0) = x_0, \\ &y(t) = h(x), \end{aligned} \qquad (21)$$

4. Гарантирующее управление реактором на тяжелой воде

Запишем физические данные, использованные при моделировании системы, для всех зон реактора на тяжелой воде [4]:

$l = 7{,}9 \times 10^{-4}$, *с*; $\beta = 7{,}5 \times 10^{-3}$; $\lambda = 9{,}1 \times 10^{-2}$, c^{-1}; $\lambda_I = 2{,}878 \times 10^{-5}$, c^{-1};

$\lambda_X = 2{,}1 \times 10^{-5}$, c^{-1}; $\Sigma_a = 3{,}2341 \times 10^{-3}$, $см^{-1}$; $\Sigma_f = 1{,}262 \times 10^{-3}$, $см^{-1}$; $\gamma_I = 6{,}18 \times 10^{-2}$;

$\gamma_X = 6 \times 10^{-3}$; $\sigma_X = 1{,}2 \times 10^{-18}$, $см^2$; $\Sigma_{eff} = 3{,}2 \times 10^{-17}$, *МДж*; $D = 0{,}9328$, *см*;

$\nu = 3{,}19 \times 10^5$, *см/с*; $K = -3{,}5 \times 10^{-5}$; $m = 2$; $H_0 = 100, см$.

В этом разделе рассматривается модель объекта с пятью рабочими зонами.

Начальные условия для модели реактора

Зона	Мощность, МВт	Объем, $м^3$
1,6,8,13	132,75	14,7
2,7,9,14	135,99	14,7
3,10	123,30	17,6
4,11	98,55	8,8
5,12	123,30	17,6

При синтезе гарантирующего управления системой (1) использовалась методология, изложенная выше и в [5, 6]. Уравнения управляющих воздействий $u_i(t) = -R^{-1} G^T S_i x(t),\ i = 1,\ldots,5$ будут содержать постоянные параметры, где матрицы S_i является решениями соответствующих алгебраических уравнений Риккати:

$$S_i A_,^* + \left(A_,^*\right)^T (x_0) S_i(t) - S_i G R^{-1} G^T S_i + Q = 0.$$

Результаты моделирования

График изменения концентрации ^{135}I *в реакторе*

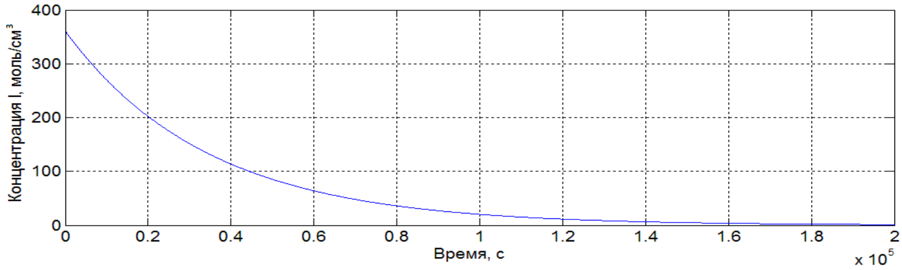


График изменения концентрации ^{135}Xe *в реакторе*

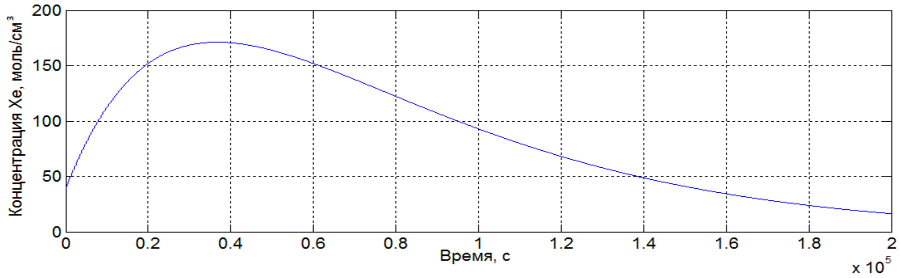
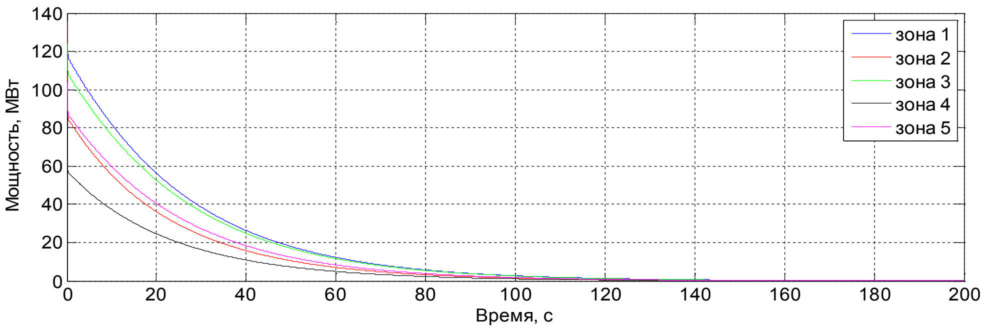


График изменения мощности по зонам



Как видно из графиков концентраций ^{135}Xe и ^{135}I, после остановки реактора, количество вещества ксенона продолжает расти продолжительное время, что в свою очередь не позволяет произвести запуск реактора сразу после его остановки вследствие того, что ^{135}Xe обладает большим сечением поглощения тепловых нейтронов и его высокая концентрация мешает работе реактора в нормальном режиме. Концентрация ^{135}Xe растет до тех пор, пока не станет равной концентрации ^{135}I, после чего начинает убывать вместе с концентрацией йода. Вследствие зашлаковывания ксеноном реактор не может быть запущен вновь в течение определенного периода (от 1 суток).

Графики изменения мощности в каждой зоне имеют схожее поведение и немногим отличаются друг от друга. Такое свойство характеризуется небольшим отличием значением параметров в каждой зоне. Как видно из графика мощность в пяти зонах падает до 0 примерно за 150 секунд, что примерно совпадает с результатами, полученными в [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 10-08-00677.

Литература

1.Van der Schaft A.J. L_2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control // IEEE. Trans. On Automatic Control. 1992. V.37. P. 770 – 784.

2.Sakayanagi Y., Nakayama D., Shigeki N. et al. Clarification of Free Parameters of State-dependent Coefficient Form: Effect on Solving State-dependent Riccati Inequality // 17th WC IFAC. Seoul, 2008. P. 182-187.

3.G. Datatreya Reddy, Y. J. Park, B. Bandyopadhaya, A. P. Tiwari. Discrete time output feedback sliding mode control of a large pressurized heavy water reactor. // 17th WC IFAC. Seoul, 2008.

4. Nifisah Khan. Decentralized State-Space Controller Design of a Large PHWR, University of Ontario Institute of Technology, 2009.

5. Афанасьев В.Н. Концепция гарантированного управления в задачах управления неопределенными объектами. Известия РАН. ТиСУ. №1, 2010.

6. Afanasiev V.N. Control of Linear Plants with State Dependent Coefficients. Automation and Remote Control. 2011. V.72, №3, P.713-726