Математические заметки

Том 92 выпуск 2 август 2012

УДК 517.9

Осреднение линейных операторов, адиабатическое приближение и псевдодифференциальные операторы

Й. Брюнинг, В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов

На примере уравнений Шрёдингера и Клейна–Гордона с быстроосциллирующими коэффициентами показано, что их осреднение может быть получено с помощью адиабатического приближения, основанного на операторном методе В. П. Маслова.

Библиография: 19 названий.

1. Введение

В линейных задачах для уравнений в частных производных методы осреднения работают в ситуациях, когда их коэффициенты – быстроосциллирующие функции. Имеется огромное количество публикаций, посвященных методам осреднения, содержащих как очень серьезные теоретические математические вопросы, так и приложения; мы упомянем здесь лишь монографии [1]–[4]. Как правило, они применяются для построения таких асимптотических решений исходного уравнения, главный член которых – уже достаточно гладкая (не быстро осциллирующая) функция. С другой стороны, во многих физических задачах интерес представляют ситуации, когда и главный член асимптотического решения – быстроизменяющаяся функция. В этом случае в исходной задаче содержится несколько различных масштабов, и в задаче разумно использовать адиабатическое приближение. Мы проиллюстрируем этот подход на примере двух уравнений в m-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m_x$ с координатами $x=(x_1,\dots,x_m)$ – уравнения типа уравнения Шрёдингера и уравнения Клейна–Гордона (в, частности, волнового уравнения), с быстроменяющейся скоростью и потенциалом, которые имеют вид

$$C=C\biggl(\frac{\Theta(x)}{\mu},x\biggr),\qquad V=V\biggl(\frac{\Theta(x)}{\mu},x\biggr). \tag{1.1}$$

Здесь $\Theta(x)=(\Theta,\dots,\Theta_n)$, $C(y,x)$, $V(y,x)$ – гладкие вещественные функции, $C(y,x)$ и $V(y,x)$ 2π-периодичны по каждой из переменных $y_1,\dots,y_n$, $n\leqslant m$, и предполагается, что фазы Θ_j локально не коллинеарны, т.е., что для всех x равен n ранг

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00973) и проекта DFG-РАН 436 RUS 113/990/0-1.

матрицы Θ_x, составленной из строк $((\Theta_1)_{x_k},\dots,(\Theta_n)_{x_k})$, $k=1,\dots,m$. Во многих физически интересных ситуациях m принимает значения 1, 2, 3, число “фаз” n может принимать значения от 1 до m. Нелинейная зависимость фаз Θ_j от x означает слабое изменение частот пространственных осцилляций скорости и потенциала. Рассмотрим в $\mathbb{R}^m_x$ оператор $-\langle\nabla, C^2(\Theta)\nabla\rangle+V$ и соответствующие ему два эволюционных уравнения:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\biggl(-\biggl\langle\nabla, C^2\biggl(\frac{\Theta(x)}{\mu},x\biggr)\nabla\biggr\rangle+V\biggr)\psi,\\
&\text{(b)}\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\biggl(-\biggl\langle\nabla, C^2\biggl(\frac{\theta(x)}{\mu},x\biggr)\nabla\biggr\rangle+V\biggr)\psi.
\end{aligned}\tag{1.2}$$

Разумеется, эти уравнения следует дополнить начальными условиями. Наша цель – построить некоторые асимптотические решения этих уравнений, точнее вывести некоторые новые “редуцированные осредненные” уравнения с гладкими коэффициентами, через которые выражаются решения исходных уравнений. Для этой цели, используя соображение [5], мы сначала (в п. 2) приводим уравнения (1.2) к виду уравнений с операторнозначным символом (см. [6]), а затем (в п. 3) применяем развитый в [7]–[10] вариант адиабатического приближения в операторной форме, основанной на псевдодифференциальных операторах (функций от некоммутирующих операторов) и операторных методах [11]. Таким образом, предлагаемый метод построения асимптотических решений уравнений (1.2) условно разбивается на две части: первую – редукцию к “осредненным уравнениям”, задаваемыми их символами, так называемыми эффективными гамильтонианами, и вторую – построение асимптотических, как медленно, так и быстроменяющихся решений этих “осредненных уравнений”. Предположение о характере поведения решений “осредненных уравнений” является существенным; они дают возможность использовать лишь разложения по (квази)импульсу эффективных гамильтонианов (см. п. 4), что позволяет достаточно эффективно описать редуцировантные уравнения (см. п. 5) (в том числе с так называемыми дисперсионными добавками). В этой работе мы, в основном, занимаемся реализацией первой части нашего подхода, имеющей “операторный”, даже в каком-то смысле “алгебраический” характер, и, кроме того, в п. 6 приводим оценки, обосновывающие применяемые нами методы, включая вывод осредненных уравнений и возможность их использования для различных решений.

2. Уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами и с операторнозначным символом

Будем искать [5] некоторые решения уравнений (1.2) в виде функций, периодически зависящих от Θ_j и также еще от x, t:

$$\psi=\Psi\biggl(\frac{\Theta}{\mu},x,t\biggr),\tag{2.1}$$

где $\Psi(y,x,t)$ – гладкая функция, 2π-периодическая по каждой переменной $y_1,\dots,y_n$. Введем обозначения: через $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ будем обозначать скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$, через $\nabla_x=\partial/\partial x$ будем обозначать вектор (столбец) – оператор градиента в $\mathbb{R}^m_x$, через $\nabla_y=\partial/\partial y$ будем обозначать вектор (столбец) – оператор градиента в $\mathbb{R}^n_y$, и через ∇_y^θ – вектор-оператор косого градиента $\nabla_y^\theta = \Theta_x(x)\nabla_y$. Подставляя функцию (2.1) в уравнения (1.2), получим, что функции ψ будут их решениями, если $\Psi(y,x,t)$ удовлетворяет соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} &(\mathrm{a}) \quad i\mu^2\Psi_t = \widehat{\mathcal{H}}\Psi,\\ &(\mathrm{b}) \quad \mu^2\Psi_{tt} = -\widehat{\mathcal{H}}\Psi, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\widehat{\mathcal{H}} = \langle(-i\mu\nabla_x - i\nabla_y^\Theta), C^2(y,x)(-i\mu\nabla_x - i\nabla_y^\Theta)\rangle + \mu^2 V(y,x). \tag{2.3}$$

Обозначим $\Delta_y^\theta = \langle\nabla_y^\theta, C^2(y,x)\nabla_y^\theta\rangle$, $D = \langle p, \nabla_y^\theta\rangle$. Тогда операторнозначный символ операторов в правой части по переменным x можно переписать в виде $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mu\mathcal{H}_1 + \mu^2\mathcal{H}_2$, где

$$\mathcal{H}_0 = \langle(p - i\nabla_y^\Theta), C^2(y,x)(p - i\nabla_y^\Theta)\rangle = -\Delta_y^\Theta - i(DC^2(y,x) + C^2(y,x)D) + C^2(y,x)p^2, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{H}_1 = -\langle\nabla_x, C^2(y,x)\nabla_y^\Theta\rangle - i\langle\nabla_x, C^2(y,x)p\rangle, \qquad \mathcal{H}_2 = V(y,x). \tag{2.5}$$

Уравнения (2.2) содержат на n больше переменных, чем исходные. Смысл введения новых переменных состоит в регуляризации коэффициентов: в (2.2) они зависят от μ при $\mu \to 0$ уже гладким образом. Цель методов усреднения-адиабатического приближения состоит в их исключении, т.е. понижении размерности уравнений (2.2). Хотя реального уменьшения числа переменных по отношению к исходным уравнениям в таких задачах не происходит, тем не менее, быстрые фазы можно до известной степени считать независимыми с переменными x, поэтому их исключение в дальнейших вычислениях тоже можно рассматривать как понижение размерности.

3. Обобщенный адиабатический принцип

К уравнениям (2.2) применим предложенный в [7]–[10], [12] подход (обобщенный адиабатический принцип). В общем виде исследуемые уравнения могут быть записаны в виде (2.2), где гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}$ – псевдодифференциальный оператор с операторнозначным символом, записанный с использованием обозначений из [11] в виде

$$\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\biggl(-i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{2}{x}, y, -i\frac{\partial}{\partial y}, \mu\biggr).$$

Под цифрами над операторами мы понимаем порядок действия этих операторов (см. [11]). Предполагается, что для символа оператора $\widehat{\mathcal{H}}$ справедливо асимптотическое разложение

$$\mathcal{H}\biggl(x, p, y, -i\frac{\partial}{\partial y}, \mu\biggr) = \mathcal{H}_0\biggl(x, p, y, -i\frac{\partial}{\partial y}\biggr) + \mu\mathcal{H}_1\biggl(x, p, y, -i\frac{\partial}{\partial y}\biggr) + \cdots. \tag{3.1}$$

В нашем случае оператор $\mathcal{H}(x,p,y,-i(\partial/\partial y),\mu)$ является дифференциальным и состоит всего из трех слагаемых.

Мы ищем некоторые решения Ψ уравнения (2.2) в виде действия некоторого (пока неизвестного) псевдодифференциального оператора на новую (также пока неизвестную) функцию

$$\Psi(x,y,t,\mu)=\widehat{\chi}w\equiv\chi\Bigl(\overset{2}{x},-i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},y,\mu\Bigr)w(x,t,\mu). \tag{3.2}$$

Здесь $\widehat{\chi}$ – “сплетающий” псевдодифференциальный оператор, допускающий разложение

$$\chi(x,p,y,\mu)=\chi_0(x,p,y)+\mu\chi_1(x,p,y)+\cdots. \tag{3.3}$$

Относительно функция w мы предполагаем, что она удовлетворяет “эффективному” (редуцированному) уравнению

$$i\mu w_t=L\Bigl(\overset{2}{x},-i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\mu\Bigr)w, \tag{3.4}$$

или

$$\mu^2w_{tt}=-L\Bigl(\overset{2}{x},-i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\mu\Bigr)w, \tag{3.5}$$

заданному оператором[1] $\widehat{L}$, символ L которого допускает регулярное разложение по μ:

$$L(x,p,\mu)=L_0(x,p)+\mu L_1(x,p)+\cdots. \tag{3.6}$$

Функция $H_{\mathrm{eff}}(p,x)=L_0(x,p)$ называется (классическим) *эффективным гамильтонианом*. Заметим также, что очевидной заменой заданный на периодических функциях оператор $\mathcal{H}_0$ приводится к виду оператора Δ_y^Θ, заданному на блоховских функциях, при этом переменные (параметры) p выражаются линейным образом через квазиимпульсы этих функций.

Лемма 1. *Для того чтобы функция Ψ вида* (3.2) *удовлетворяла уравнению* (2.2 a) (*уравнению* (2.2 b)) *достаточно, чтобы функция w удовлетворяла уравнению* (3.4) (*уравнению* (3.5)) *и чтобы символы $\chi(p,x,y,\mu)$ и $L(p,x,\mu)$ операторов $\widehat{\chi}$ и $\widehat{L}$ удовлетворяли уравнению*

$$\chi\Bigl(\overset{2}{x},p-i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},y,\mu\Bigr)L(x,p,\mu)=\mathcal{H}\Bigl(\overset{2}{x},p-i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},y,-i\frac{\partial}{\partial y},\mu\Bigr)\chi(x,p,y,\mu). \tag{3.7}$$

Доказательство. Подставляя функцию Ψ из (3.2) в уравнение (2.2), получим $i\mu^2\widehat{\chi}w_t=\widehat{\mathcal{H}}\widehat{\chi}w$. Используя (3.4), перепишем последнее равенство в виде

$$(\widehat{\chi}\widehat{L}-\widehat{\mathcal{H}}\widehat{\chi})w=0.$$

Достаточным условием выполнения последнего является следующее операторное соотношение: $\widehat{\chi}\widehat{L}-\widehat{\mathcal{H}}\widehat{\chi}=0$. Переходя в этом соотношении от операторов к их символам, приходим к уравнению (3.7). Вывод (3.7) из (3.2), (2.2 b) и (3.5) проводится полностью аналогично.

[1] В физической литературе (в физике твердого тела) построение оператора $L(\overset{2}{x},-i\mu(\overset{1}{\partial}/\partial x),\mu)$ по функции $L(p,x,\mu)$ называется *подстановкой Пайерлса*, см. [13] и более подробные объяснения в [8]–[10].

Замечание 1. Мы видим, уравнение (3.7) оказывается одинаковым для обоих случаев (2.2 a,b). Проведенная редукция, разумеется, годится и для гармонических по времени решений, т.е. решений вида $\Psi = e^{-iEt/\mu^2}\Psi'(x,y,\mu)$. Понятно, что утверждение леммы остается справедливым, если уравнения (2.2), (3.4) заменить соответственно на стационарные уравнения (штрих мы опускаем)

$$\widehat{\mathcal{H}}\Psi = E\Psi, \qquad L\Big(\overset{2}{x}, -i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, \mu\Big)\psi = E\psi.$$

Таким образом, задача редукции сводится к построению символов операторов $\widehat{\chi}$ и $\widehat{L}$. Наличие в (3.7) двух неизвестных объектов $\widehat{\chi}$ и $\widehat{L}$ аналогично ситуации, возникающей при нахождении собственных векторов и значений. Как и при нахождении собственных векторов, у уравнения (3.7) существует, вообще говоря, бесконечный набор $\widehat{\chi}^k$ и $\widehat{L}^k$, которые часто называют "модами" или "термами". При этом при каждом k $\widehat{\chi}^k$ и $\widehat{L}^k$ также определяются неоднозначно. Пусть $\mathbb{T}$ – тор, образованный $y_j \bmod 2\pi$, $j=1,\dots,n$. Для дальнейшего удобно ввести пространство $L_2(\mathbb{T})$ по переменным y с "нормированным" скалярным произведением, полагая для любых функций $g(y)$, $f(y)$

$$(g,f)_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}} \overline{g}(y) f(y)\, dy^n,$$

где черта означает комплексное сопряжение. Некоторую неоднозначность в определении $\widehat{\chi}^k$ и $\widehat{L}^k$можно снять, потребовав совпадения норм функций $\Psi(x,y,t)$ и w в соответствующих пространствах $L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^m)$ и $L_2(\mathbb{R}^m)$:

$$(\Psi,\Psi)_{L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^m)} \equiv (\widehat{\chi}w, \widehat{\chi}w)_{L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^m)} \equiv (\widehat{\chi}^*\widehat{\chi}w, w)_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^m)} = (w,w)_{L_2(\mathbb{R}^m)}.$$

Тогда, учитывая равенство

$$\widehat{\chi}^* = \chi\Big(-i\mu\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{x}, y, \mu\Big),$$

получим, что символ оператора $\widehat{\chi}^*\widehat{\chi}$ равен $\chi^*(p - i\mu(\overset{2}{\partial/\partial x}), \overset{1}{x}, y, \mu)\chi(p,x,y,\mu)$, где $\chi^*(p,x,y,\mu)$ – функция, комплексно сопряженная по отношению к $\chi(p,x,y,\mu)$. Если интегрирование этой функции по переменной y дает единицу, то нормы функций Ψ и w совпадут. Это условие "нормировки" можно записать в виде

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}} \chi^*\Big(p - i\mu\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{x}, y, \mu\Big)\chi(p,x,y,\mu)\, dy^n = 1. \tag{3.8}$$

Условие (3.8) не снимает полностью неоднозначность в определении χ и L, поскольку оператор $\widehat{\chi}$ всегда можно заменить на произведение $\widehat{\chi}U(-i\mu(\overset{1}{\partial/\partial x}), \overset{2}{x}, \mu)$, взяв в качестве $U(-i\mu(\overset{1}{\partial/\partial x}), \overset{2}{x}, \mu)$ унитарный (псевдодифференциальный) оператор. Такое изменение, очевидно, приведет к унитарному преобразованию оператора $\widehat{L}$, т.е. замене соответствующего оператора $\widehat{L}$ на псевдодифференциальный оператор

$$\widehat{L}' = U\Big(-i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{2}{x}, \mu\Big)\widehat{L}\Big[U\Big(-i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{2}{x}, \mu\Big)\Big]^{-1}.$$

При этом, как будет видно из дальнейшего, старшие части (по параметру μ) символов $\widehat{L}'$ и $\widehat{L}$ совпадут. На конечный результат – функцию Ψ – указанная неоднозначность в выборе χ не сказывается; тем не менее, в конкретных задачах удачный выбор χ может сильно упростить вычисления.

Если $\widehat{\chi}$ и $\widehat{L}$ найдены, то уравнение (2.2 a) (или (2.2 b) сводится к более простому (редуцированному) уравнению (3.4) (или (3.5)) для функции w. Найдя некоторое решение редуцированного уравнения (3.4) (или (3.5)), мы можем восстановить соответствующие решения Ψ исходного уравнения с помощью действия сплетающего оператора по формуле (3.2).

При исследовании уравнений (2.4), (2.5) возникают различные ситуации, вопросы и трудности, присущие уравнениям с операторнозначным символом. Сделаем несколько важных замечаний, связанных с этим обстоятельством.

Замечание 2. Здесь может возникнуть и, как правило, возникает "резонансная" ситуация, известная в математической литературе как "смена кратности характеристик", а в физической – как "пересечение термов". В этом случае функции L^k и $L^{k'}$ с разными k, k' совпадают при некоторых значениях p, x, при этом здесь возможно бесконечное количество различных ситуаций, и лишь небольшое их число изучено (см., например, [14]). С другой стороны, попадание на такие ситуации до известной степени носит "локальный по (x,p) характер", и при соответствующих условиях на решения редуцированных уравнений (3.4), (3.5) их удается избежать; вопрос состоит в том, насколько широк класс решений, в которых эффекты "смены кратности характеристик" отсутствуют (на разумных временах). Фактически в этой работе мы предполагаем, что решения исходного уравнения устроены таким образом (принадлежат такому классу), что при соответствующих временах эти эффекты практически не сказываются на их асимптотиках.

Замечание 3. Также сразу возникает вопрос о построении решений задачи (3.7). Точно ее решение удается найти в крайне редких случаях, поэтому речь может идти о нахождении коэффициентов разложения функций χ и L с помощью регулярной теории возмущений по параметру μ. При этом под (3.3), (3.6) естественно понимать *асимптотические* ряды по параметру μ. Более того, на практике вычисление уже первых коэффициентов оказывается нетривиальной задачей, и в разложениях (3.3), (3.6) следует ограничиться минимально разумным числом слагаемых. Это число можно определить исходя из следующих "асимптотических" соображений. Для нестационарных задач, например, для специальных задач Коши, изложенная процедура должна дать возможность построить главный член асимптотики решения Ψ. Для стационарных (спектральных) задач она должна дать возможность построить асимптотику некоторой части спектра ("спектральную серию"), причем ошибка приближения собственных значений такой асимптотикой должна быть много меньше, чем расстояние между ближайшими собственными значениями.

Замечание 4. Введение цифр над операторами связано с тем, что операторы $\widehat{p} = -i\mu(\partial/\partial x)$ и x не коммутируют, и цифры определяют способ их упорядочения при построении функции от операторов. Конструкция функций от этих операторов не единственна и зависит от способа упорядочения. Два способа упорядочения (или "квантования") используются существенно чаще других. В первом случае имеем уже использованное нами упорядочение Фейнмана–Маслова $\widehat{\chi} = \chi(\overset{1}{\widehat{p}}, \overset{2}{x}, \mu)$, $\widehat{L} = L(\overset{1}{\widehat{p}}, \overset{2}{x}, \mu)$, во втором – упорядочение по Вейлю $\widehat{\chi} = \chi_W((\overset{1}{\widehat{p}}+\overset{3}{\widehat{p}})/2, \overset{2}{x}, y, \mu)$, $\widehat{L} = L_W((\overset{1}{\widehat{p}}+\overset{3}{\widehat{p}})/2, \overset{2}{x}, \mu)$ с вейлевскими символами $\chi_W(p, x, t, \mu)$ и $L_W((p, x, \mu)$. Подчеркнем, что операторы одни и те же, но их символы, вообще говоря, различны из-за различного упорядочения. С "теоретической точки зрения" вейлевское квантование более удобно, поскольку оно автоматически дает, по-крайней мере, симметричные операторы $\widehat{L}$, если имеется равенство $L^* = L$. Но практический опыт решения многих задач показывает, что упорядочение Фейнмана–Маслова существенно более удобно для получения явных формул, и прагматичный путь состоит в нахождении сначала символов соответствующих упорядочению Фейнмана–Маслова, и затем к переходе (пересчете) вейлевских символов. Такие формулы хорошо известны (см. [11], а также [8], [10]), в частности $L_W(p, x, \mu) = L_0(p, x) + \mu(L_1(p, x) + (i/2)\langle\partial/\partial p, \partial/\partial x\rangle L_0) + O(\mu^2)$. Поскольку исходные задачи задаются самосопряженными операторами, то и оператор $\widehat{L}$ (при правильном выборе $\widehat{\chi}$) тоже будет самосопряженным. Но тогда $L_W(p, x, \mu)$ вещественнозначна, а, следовательно, вещественнозначны L_0 и коэффициент при μ в правой части последнего равенства. Это соображение следует иметь в виду при вычислениях.

Замечание 5. Наконец отметим, что класс символов псевдодифференциальных уравнений с параметром, рассматриваемых здесь и вообще в адиабатических задачах, отличается от класса символов, рассматриваемых, например, в [15], [16]. Мы, в частности, не требуем уменьшения роста с номером k по переменным p от членов разложения (3.3), (3.6). Кроме того, конечно, используемые нами функции от операторов могут быть записаны с помощью преобразования Фурье, что и дает их строгое определение. В наших вычислениях такие определения не понадобятся, при желании их можно найти в [11], [17], а также в [9], [10].

4. Вычисление символа редуцированного уравнения с помощью теории возмущений по параметру μ

Воспользуемся известной формулой композиции псевдодифференциальных операторов. Используя формулу Тейлора, по крайней мере формально, левую часть в (3.7) можно записать в виде

$$\chi(x, p, y, \mu)L(x, p, \mu) + \sum_{|\nu|=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}(-i)^{|\nu|}\mu^{|\nu|}\frac{\partial^{|\nu|}\chi}{\partial p^{\nu}}(x, p, y, \mu)\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x^{\nu}}L(x, p, \mu). \tag{4.1}$$

Здесь $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ – мультииндекс, $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_m$, $\nu! = \nu_1! \cdots \nu_m!$. Аналогичное равенство имеет место и для правой части в (3.7), но оно содержит конечное число слагаемых. Подставляя эти выражения в (3.7) и учитывая разложения (3.1). (3.3) и (3.6), после приравнивания коэффициентов перед разными степенями μ к нулю, получим систему рекуррентных уравнений для определения $\chi_j(x, p, y)$, $L_j(x, p, \mu)$:

$$\mathcal{H}_0\chi_0 - \chi_0 L_0 = 0, \tag{4.2}$$
$$\mathcal{H}_0\chi_j - \chi_j L_0 = \chi_0 L_j + \mathcal{F}_j, \qquad j = 1, 2, \dots, \tag{4.3}$$

где каждая функция $\mathcal{F}_j$ выражается только через χ_s и L_s, с $0 \leqslant s \leqslant j-1$. В частности,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= -\mathcal{H}_1\chi_0 + i\langle\nabla_p\mathcal{H}_0, \nabla_x\chi_0\rangle - i\langle\nabla_p\chi_0, \nabla_x L_0\rangle,\\
\mathcal{F}_2 &= \chi_1 L_1 - \mathcal{H}_1\chi_1 - \mathcal{H}_2\chi_0 + i\langle\nabla_p\mathcal{H}_1, \nabla_x\chi_0\rangle - i\langle\nabla_p\chi_1, \nabla_x L_0\rangle + i\langle\nabla_p\mathcal{H}_0, \nabla_x\chi_1\rangle\\
&\quad - i\langle\nabla_p\chi_0, \nabla_x L_1\rangle + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left(\frac{\partial^2\mathcal{H}_0}{\partial p_j\partial p_k}\,\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x_j\partial x_k} - \frac{\partial^2\chi_0}{\partial p_j\partial p_k}\,\frac{\partial^2 L_0}{\partial x_j\partial x_k}\right).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Теперь перейдем к анализу уравнений (4.2), (4.3) для случая, когда символ $\mathcal{H}_0$ задается формулой (2.4). Уравнение (4.2) означает, что χ_0 при фиксированных значениях параметров x и p является собственной функцией эллиптического оператора $\mathcal{H}_0$ на компактном многообразии $\mathbb{T}$. Из общей теории эллиптических операторов на компактных многообразиях следует, что $\mathcal{H}_0$ с областью определения $C^\infty(\mathbb{T})$ в существенном самосопряжен в $L_2(\mathbb{T})$ и имеет полную систему собственных функций χ_0^k, $k = 0, 1, \ldots$, с вещественными собственными значениями $L_0^k(x,p)$ (см., например, [16]). Заметим, что при $p = 0$ оператор $\mathcal{H}_0$ превращается в $-\Delta_y^\Theta$ – эллиптический оператор на торе $\mathbb{T}$, причем его минимальное собственное значение и соответствующая нормированная собственная функция легко находятся и хорошо известны:

$$L_0^0(x,0) = 0, \qquad \chi_0^0(x,0,y) = 1, \tag{4.5}$$

при этом собственное значение $L_0^0(x,0) = 0$ невырождено и, следовательно, отделено от других собственных значений. Эти утверждения устанавливаются стандартным образом исходя из “энергетического равенства”

$$(-\Delta_y^\Theta u, u)_{L^2(\mathbb{T})} = (\nabla_y^\Theta u, C^2\nabla_y^\Theta u)_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Поскольку всюду в дальнейшем мы ограничимся лишь минимальным собственным значением и соответствующей ему собственной функцией, то во избежании громоздкости в обозначениях индекс 0 будем опускать и писать

$$L_0^0 = L_0, \qquad \chi_0^0 = \chi_0.$$

Как показано в [18], при x из комактного множества K в $\mathbb{R}^3$ и достаточно малых p собственное значение L_0 оператора $\mathcal{H}_0$ невырождено и аналитично по p, функцию $\chi_0^0(x,p,y)$ можно выбрать гладкой по (x,p) и аналитичной по p (простое доказательство этих утверждений имеется также в [19]).

Далее будем считать, что x и p выбираются именно таким образом. Выберем в качестве χ_0 и L_0 в (4.2) χ_0 и L_0 соответственно. Будем решать уравнения (4.3) последовательно. Если решены уже все уравнения с номерами, меньшими j, то для определения L_j^0 достаточно в смысле скалярного произведения в $L_2(\mathbb{T})$ скалярно умножить левую и правую части на χ_0, воспользоваться условием самосопряженности оператора $\mathcal{H}_0 - L_0$ и перенести этот оператор на второй сомножитель χ_0. Так как выполнено (4.2) и функция χ_0 нормирована, то получим, что

$$L_j(x,p) = -(\mathcal{F}_j(x,p,y), \chi_0(x,p,y))_{L^2(\mathbb{T})}. \tag{4.6}$$

После этого существование решения χ_j уравнения (4.3) вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть $F(y)$ – гладкая функция на торе $\mathbb{T}$, ортогональная в $L_2(\mathbb{T})$ функции $\chi^0(x,p,y)$ (при фиксированных (x,p)). Для $x \in K$ и достаточно малых p существует и притом единственное решение $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ уравнения*

$$(\mathcal{H}_0 - L_0)f = F \tag{4.7}$$

с условием ортогональности f функции $\chi_0(x,p,y)$.

Если F – гладкая функция переменных $x \in K$, $y \in \mathbb{T}$, p (при малых p) и некоторых дополнительных параметров z, то решение $f(x,p,y,z)$ также будет гладкой функцией. Любое другое гладкое решение $f_1(x,p,y,z)$ на торе $\mathbb{T}$ уравнения (4.7) выражается через f с помощью формулы $f_1 = f + g\chi_0$, где $g(x,p,z)$ – некоторая гладкая функция параметров (x,p,z).

Доказательство. Из общей теории эллиптических уравнений на компактных многообразиях следует, что $\mathcal{H}_0 - L_0$ как оператор из соболевского пространства $H^2(\mathbb{T})$ в $L^2(\mathbb{T})$ является фредгольмовым. Поэтому условие разрешимости уравнения (4.7) состоит в ортогональности правой части решению однородного уравнения χ_0, причем решение f, ортогональное χ_0, определяется единственным образом.

Бесконечную дифференцируемость присутствующих в них функций несложно доказать с помощью общей теории эллиптических операторов на компактных многообразиях (см., например, [16]). Для этого рассмотрим задачу: при фиксированных (x,p) по заданной функции $F(y)$ и числу d нужно найти функцию $u(y)$ и число g, удовлетворяющие уравнениям

$$(\mathcal{H}_0 - L_0)u(y) - g\chi_0(x,p,y) = F(y), \qquad (u(y),\chi_0)_{L^2(\mathbb{T})} = d. \tag{4.8}$$

Так как отвечающий этой задаче оператор $A(x,p)\colon \mathcal{H}^{s+2}(\mathbb{T}) \times C^1 \to \mathcal{H}^s(\mathbb{T}) \times C^1$, где C^1 – одномерное комплексное пространство, обратим и $A(x,p)$ гладко зависит от параметров (x,p), то обратный оператор $A^{-1}(x,p)$ также гладко зависит от параметров (x,p). Взяв за F функцию $F(x,p,y,z)$, мы получим, что решение $u(x,p,y,d,z)$ задачи (4.8) гладко зависит от параметров (x,p,z). Но $f(x,p,y,z)$ как раз и является решением задачи (4.8) при $d=0$ и $g=0$; следовательно, $f(x,p,y,z)$ является гладкой функцией от параметров (x,p,z) со значениями в пространстве $\mathcal{H}^{s+2}(\mathbb{T})$ при любом s. Теперь из стандартных теорем вложения соболевских пространств вытекает, что $f(x,p,y,z)$ будет бесконечно дифференцируемой функцией по совокупности переменных.

5. Теория возмущений для эффективных гамильтонианов по импульсным переменным

5.1. Эвристические соображения о минимальном количестве слагаемых L_j и их разложении по p при упрощении редуцированных уравнений для различных решений. Мы уже отмечали, что написать L_j в достаточно простом виде в общей ситуации не легко даже для $j=0,1,2$. Представляется, однако, что, как правило, L_j с номерами $j \geqslant 3$ не особенно интересны для физических приложений. Кроме того, в зависимости от поведения C^2, V и дополнительных условий, определяющих решения редуцированных уравнений (и исходных уравнений), сами редуцированные уравнения (3.4) могут быть упрощены. Основанные на методе ВКБ соображения о таком упрощении изложены в [8], [10] на примере задачи Коши

$$i\mu\frac{\partial w}{\partial t} = \widehat{L}w, \qquad w|_{t=0} = a^0(x)e^{iS^0(x)/h}$$

с быстро осциллирующими начальными данными, характеризуемыми параметром $h = \mu^\kappa$, $\kappa \leqslant 1$ – неотрицательное число. Мы здесь изложим лишь выводы.

Представим при малых p $L_j(x,p)$ и $\chi_j(x,p,y)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_j(x,p) &= \sum_{|k|\leqslant K} L_j^{(k)}(x,p) + O(|p|^{K+1}), \\ \chi_j(x,p,y) &= \sum_{|k|\leqslant K} \chi_j^{(k)}(x,p,y) + O(|p|^{K+1}), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $L_j^{(k)}(x,p)$, $\chi_j^{(k)}(x,p,y)$ – однородные полиномы по p степени k. Разложения (5.1) фактически представляют собой ряды Тейлора для правых частей, поэтому они допускают почленное дифференцирование по параметрам x, p, y.

Сразу скажем, что для рассматриваемых задач $L_0 = L_0^{(2)} + O(|p|^4)$. В силу этого факта при $\kappa = 0$ (“длинноволновый” режим) решение слабо осциллирует и для описания главного члена асимптотики нужно вычислить $L_0^{(2)}$, $L_1^{(1)}$ и $L_2^{(0)}|_{p=0}$, что приводит к хорошо известным в “классической” теории осреднения [1]–[4] предельным уравнениям. Для построения главного члена асимптотики при $0 < \kappa < 2/3$ (“средневолновый режим”) достаточно вычислить $L_0^{(2)}$, $L_1^{(1)}$. Когда κ близко к $2/3$, т.е. h близко к $\mu^{3/2}$, к этим функциям следует добавить $L_0^{(4)}$, для которого еще можно написать конструктивные формулы, приводящие в случае волнового уравнения к так называемой “слабой дисперсии” и редуцированному уравнению типа Буссинеска. При дальнейшем увеличении κ коэффициенты L_0 и L_1 следует находить точно и мы имеем “коротковолновый” режим. Дальнейшее увеличение параметра κ приводит к разрушению адиабатического приближения, хотя для некоторых задач параметр κ можно еще увеличить до $3/2$, тогда метод ВКБ переходит в Борновское приближение. В этой работе мы ограничимся длинноволновым и средневолновым режимами. Вывод уравнения типа Буссинеска требует больших вычислений и места, мы посвятим ему другую работу, приведя здесь лишь окончательные формулы для $L_0^{(4)}$. Отметим, что приведенные соображения переносятся и на случай, когда рассматриваются быстроубывающие функции, а также когда в асимптотике решения появляются фокальные точки и каустики: развитый вариант адиабатического приближения охватывает все эти случаи.

5.2. Формулы теории возмущений для эффективных гамильтонианов по импульсным переменным. Перейдем к выводу формул для разложений L_k по малым p, что позволит построить “средневолновые” и “длинноволные” асимптотические решения редуцированных уравнений. Для их нахождения достаточно решать уравнения (4.2) и (4.3) при малых p.

Пусть $G(y)$ – 2π-периодическая по каждой переменной y_j функция, возможно, зависящая от некоторых других переменных. Обозначим через $\langle G\rangle_{\mathbb{T}}$ среднее от этой функции на торе $\mathbb{T}$:

$$\langle G\rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}} G(y)\,dy. \tag{5.2}$$

Нам понадобится следующее простое полезное утверждение. Пусть $F(y,z)$ – некоторая гладкая функция на торе $\mathbb{T}$ с нулевым средним $\langle F\rangle_{\mathbb{T}}=0$, гладко зависящая также от параметров $z=(z_1,\dots,z_l)$, принадлежащих некоторому компакту. Рассмотрим на торе $\mathbb{T}$ уравнение (так называемую "задачу на ячейке") относительно функции $f(y,z)$ (см. [1]–[4])

$$\Delta_y^\Theta f=F, \qquad \langle f\rangle_{\mathbb{T}}=0. \tag{5.3}$$

Лемма 3. *Гладкое решение задачи* (5.3) *на торе* $\mathbb{T}$ *существует и единственно. Любое другое гладкое решение* $f_1(y,z)$ *на торе* $\mathbb{T}$ *уравнения* $\Delta_y^\Theta f_1=F$ *выражается через* f *с помощью формулы* $f_1=f+q$, *где* $q(z)$ *– некоторая гладкая функция параметров* z.

Доказательство следует из утверждения леммы 2 при $p=0$.

В дальнейшем указанное решение f с нулевым средним задачи на ячейке (5.3) обозначим

$$f(y,z)=\frac{1}{\Delta_y^\Theta}F(y,z), \qquad \langle f\rangle_{\mathbb{T}}=0. \tag{5.4}$$

Эта лемма позволяет не только доказать утверждение о поведении L_0 и χ_0 при малых p, но и получить достаточно явные формулы первых членов разложения этих функций по p. Для ее формулировки введем следующие обозначения. Положим

$$\widetilde{C}^2(y,x)=C^2(y,x)-\langle C^2\rangle_{\mathbb{T}}, \tag{5.5}$$

и дополнительно к зависящему линейно от p оператору $D=\langle p,\Theta_x(x)\nabla_y\rangle$, также линейно зависящий от p оператор

$$Q=DC^2+C^2D. \tag{5.6}$$

Обозначим через $g_0(y,x)$, $g_1(y,x,p)$ решения с нулевым средним задачи на ячейке

$$g_0=\frac{1}{\Delta_y^\Theta}\widetilde{C}^2(y,x), \qquad g_1=\frac{1}{\Delta_y^\Theta}(D\widetilde{C}^2(y,x)), \qquad \langle g_{1,2}\rangle_{\mathbb{T}}=0. \tag{5.7}$$

Заметим, что $g_1(y,x,p)$ – линейная функция p.

Лемма 4. *При* x, *принадлежащих компакту* K, *и достаточно малых* p *минимальное собственное значение* $L_0(x,p)$ *оператора* $\mathcal{H}_0$ *невырождено. Функции* $L_0(x,p)$, L_1, L_2 *аналитичны по* p, *функции* $\chi_0(x,p,y)$, $\chi_1(x,p,y)$, $\chi_1(x,p,y)$ *можно так же выбрать аналитическими по* p, *так что справедливы равенства*

$$\begin{aligned} &L_0(x,p)=p^2\langle C^2\rangle_{\mathbb{T}}-\langle Qg_1\rangle_{\mathbb{T}}+O(|p|^4)\equiv p^2\langle C^2\rangle_{\mathbb{T}}-\langle C^2Dg_1\rangle_{\mathbb{T}}+O(|p|^4),\\ &\chi_0(x,p)=1-ig_1(y,x,p)+O(|p|^2), \end{aligned} \tag{5.8}$$

где $\|1-ig_1(y,x,p)\|_{L_2(\mathbb{T})}=1+O(|p|^2)$,

$$L_1(x,p)=-\frac{i}{2}\langle\nabla_x,\nabla_p\rangle L_0+O(p^2)\equiv i\langle\langle\nabla_x,C^2\nabla_y^\Theta g_1\rangle\rangle_{\mathbb{T}}-i\langle\nabla_x,p\langle C^2\rangle_{\mathbb{T}}\rangle+O(p^2), \tag{5.9}$$

$$L_2(x,p)=\langle V(y,x)\rangle_{\mathbb{T}}+O(p). \tag{5.10}$$

Следствие. *Для вейлевского символа оператора $\widehat{L}$ справедливо равенство*

$$L_W(p,x,\mu) = L_0 + \mu^2\langle V(y,x)\rangle_{\mathbb{T}} + O(|p|^3) + \mu^2 O(|p|) + O(\mu^3). \tag{5.11}$$

Замечание 6. Приведем без доказательства формулы для следующих поправок разложения L_0 и χ_0:

$$\begin{gathered}
L_0(p,x) = p^2\langle C^2\rangle_{\mathbb{T}} - \langle Qg_1\rangle_{\mathbb{T}} + p^4\langle g_0\widetilde{C}^2\rangle_{\mathbb{T}} + 2p^2\langle g_1Qg_0\rangle_{\mathbb{T}} + \langle g_1^2\rangle_{\mathbb{T}}\langle Qg_1\rangle_{\mathbb{T}} + p^2\langle g_1^2\widetilde{C}^2\rangle_{\mathbb{T}} \\
+ \left\langle (Qg_1 - \langle Qg_1\rangle_{\mathbb{T}})\frac{1}{\Delta_y^\Theta}(Qg_1 - \langle Qg_1)\right\rangle_{\mathbb{T}} + O(|p|^6), \\
\chi_0 = 1 - ig_1(y,x,p) + p^2 g_0(y,x) - \frac{1}{\Delta_y^\Theta}(Qg_1 - \langle Qg_1\rangle_{\mathbb{T}}) - \frac{1}{2}\langle g_1^2\rangle_{\mathbb{T}} + O(|p|^3), \\
\left\| 1 - ig_1(y,x,p) + p^2 g_0(y,x) - \frac{1}{\Delta_y^\Theta}(Qg_1 - \langle Qg_1\rangle_{\mathbb{T}}) - \frac{1}{2}\langle g_1^2\rangle_{\mathbb{T}}\right\|_{L_2(\mathbb{T})} = 1 + O(|p|^3).
\end{gathered}$$

Доказательство леммы 4. Как уже отмечалось выше, первая часть этого утверждения следует из общих теорем в [18], поэтому остается показать, что первые коэффициенты разложения L_0, χ_0, L_1 и т.д. в степенные ряды (5.1) имеют вид такой, как в (5.8)–(5.10).

1. *Вычисление коэффициентов разложения* L_0, χ_0. Подставляя (5.1) в (4.2) $\mathcal{H}$ и приравнивая однородные полиномы одинакового порядка по p к нулю, получим систему рекуррентных уравнений на $L_0^{(k)}$, $\chi_0^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
-\Delta_y^\Theta\chi_0^{(0)} - L_0^{(0)}\chi_0^{(0)} &= 0, \\
(-\Delta_y^\Theta - L_0^{(0)})\chi_0^{(1)} - L_0^{(1)}\chi_0^{(0)} &= i(DC^2(y,x) + C^2(y,x)D)\chi_0^{(0)}, \\
(-\Delta_y^\Theta - L_0^{(0)})\chi_0^{(2)} - L_0^{(2)}\chi_0^{(0)} &= i(DC^2(y,x) + C^2(y,x)D)\chi_0^{(1)} \\
&\qquad - p^2C^2(y,x)\chi_0^{(0)} + L_0^{(1)}\chi_0^{(1)}, \\
(-\Delta_y^\Theta - L_0^{(0)})\chi_0^{(k)} - L_0^{(k)}\chi_0^{(0)} &= F_k, \qquad k = 3,4,\dots,
\end{aligned}$$

где F_k выражается через $\chi_0^{(j)}$ и $L_0^{(j)}$ с $j = 0,\dots,k-1$.

Первое соотношение вместе с условием нормировки дает $L_0^{(0)} = 0$, $\chi_0^{(0)} = 1$. Все последующие соотношения имеют общий вид: в левой части неизвестные $L_0^{(k)}$, $\chi_0^{(k)}$ (если учесть, что $L_0^{(0)}$, $\chi_0^{(0)}$ уже определены), а в правой части стоит функция, определенная с помощью предыдущих соотношений. Тогда для определения $L_0^{(k)}$ достаточно в смысле скалярного произведения в $L_2(\mathbb{T})$ скалярно умножить левую и правую части на функцию $\chi_0^{(0)}$, воспользоваться условием самосопряженности оператора $-\Delta_y^\Theta - L_0^{(0)}$ и перенести этот оператор на второй сомножитель $\chi_0^{(0)}$ в скалярном произведении, что по первому равенству равно нулю, а также воспользоваться нормированностью χ_0, т.е. равенством 1 полученного коэффициента перед $L_0^{(k)}$. Таким образом, $L_0^{(k)}$ однозначно определяется по предыдущим $\chi_0^{(j)}$, $L_0^{(j)}$, $j = 0,\dots,k-1$. Поэтому второе равенство дает $L_0^{(1)} = -i\langle DC^2\rangle = 0$, так как среднее от дифференцированной функции равно нулю. С учетом равенств $L_0^{(0)} = L_0^{(1)} = 0$, $\chi_0^{(0)} = 1$ уравнение для $\chi_0^{(1)}$ можно переписать в виде $\Delta_y^\Theta\chi_0^{(1)} = -i(D\widetilde{C}^2(y,x))$. Отсюда следует равенство (5.8).

Для определения $\chi_0^{(k)}$ нужно перенести $L_0^{(k)}\chi_0^{(k)}$ в правую часть, заметить, что среднее правой части станет равным нулю в силу определения $L_0^{(k)}$, и воспользоваться леммой 3. Из этой леммы следует, что $\chi_0^{(k)}$ определяется не однозначно, а с точностью до постоянной (по y) $q_k = O(p^k)$. Можно рассматривать только задачу на ячейке, т.е. отбирать решения с нулевым средним (как это сделано для $\chi_0^{(1)}$), но тогда не гарантируется условие нормировки $(\chi_0, \chi_0) = 1$. Отметим сразу, что нормировка $\chi_0^{(0)} + \chi_0^{(1)}$ выполнена с нужной точностью $O(p^2)$, так как

$$(\chi_0^{(0)} + \chi_0^{(1)}, \chi_0^{(0)} + \chi_0^{(1)}) = 1 + ((\chi_0^{(0)}, \chi_0^{(1)}) + (\chi_0^{(1)}, \chi_0^{(0)})) + (\chi_0^{(1)}, \chi_0^{(1)}),$$

среднее слагаемое равно нулю по свойству ячеистости $\chi_0^{(1)}$, а третье слагаемое – однородный полином второй степени $(\chi_0^{(1)}, \chi_0^{(1)}) = O(p^2)$.

Легко также понять, что $\chi_0^{(k)}$ не определяются однозначно и условием нормировки (как и вся функция $\chi_0^{(0)}$ определена с точностью до умножения на фазовый множитель $e^{i\theta(x,p)}$ с вещественным $\theta(x,p)$). Определение слагаемого $L_0^{(2)}$ не зависит от выбора постоянной q_1, что легко проверяется из второго равенства, как и то, что

$$L_0^{(2)} = p^2\langle C^2\rangle - \langle C^2 D\chi_0^{(1)}\rangle.$$

Но от этого выбора, в принципе, может зависеть аналитичность дальнейшего продолжения ряда $\sum \chi_0^{(k)}$. Но это не так: аналитическую функцию χ_0 можно подкрутить аналитическим фазовым множителем $e^{i\theta} = 1 + i\theta_1 + \cdots$, не изменив аналитичности. А подбором первого слагаемого можно добиться нашего $\chi_0^{(1)}$, так как в силу условия нормировки $\operatorname{Re} q_1 = 0$.

Отметим, что систему рекуррентных соотношений для $L_0^{(k)}$, $\chi_0^{(k)}$ можно решать и не зная явного вида собственной функции χ_0. Например, будем решать уравнение для нахождения $\chi_0^{(1)}$ методом неопределенных коэффициентов, представив $\chi_0^{(1)}$ в виде

$$\chi_0^{(1)} = \langle b, p\rangle = b_1(x,y)p_1 + b_2(x,y)p_2 + b_3(x,y)p_3$$

с неизвестными коэффициентами $b_j(x,y)$, $j = 1, 2, 3$. Тогда для определения каждого коэффициента $b_j(x,y)$ нужно будет решать свою ячеистую задачу вида (5.3). Точно так же можно свести нахождение каждого из $\chi_0^{(k)}$ к решению нескольких ячеистых задач вида (5.3) для коэффициентов соответствующего однородного полинома от переменных p.

2. *Вычисление коэффициентов разложения L_1, L_2.* Аналогичным образом с помощью рядов (5.1) можно решать и остальные уравнения (4.3). Однако, можно сразу воспользоваться формулами (4.4), (4.6). Учитывая эти формулы и (2.4), (2.5), получим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= i\langle\nabla_x, C^2(y,x)p\rangle + \langle\nabla_x, C^2(y,x)\nabla_y^\theta\rangle(-ig_1) + i\langle\nabla_p(-iQ), \nabla_x(-ig_1)\rangle + O(p^2)\\ &\equiv i\langle\nabla_x, C^2(y,x)p\rangle - i\langle\nabla_x, C^2(y,x)\nabla_y^\theta\rangle g_1 - i\langle\nabla_p Q, \nabla_x g_1\rangle + O(p^2).\end{aligned} \tag{5.12}$$

Отсюда с учетом определения Q следует

$$L_1 = -i\langle\langle\nabla_x, C^2(y,x)p\rangle\rangle_{\mathbb{T}} + i\langle\nabla_p Q, \nabla_x g_1\rangle_{\mathbb{T}} + O(p^2), \qquad \chi_1 = O(p). \tag{5.13}$$

Учитывая последние равенства и равенства для L_0 и χ_0, получим

$$\nabla_x\chi_0 = O(p), \quad \nabla_x L_0 = O(p), \quad \nabla_x\chi_1 = O(p), \quad \nabla_x L_1 = O(p),$$
$$\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x_j\partial x_k} = O(p), \quad \frac{\partial^2 L_0}{\partial x_j\partial x_k} = O(p^2).$$

Отсюда немедленно следует

$$\mathcal{F}_2 = -\mathcal{H}_2\chi_0 + O(p) = -V(y,x) + O(p), \qquad L_2 = \langle V(y,x)\rangle_{\mathbb{T}} + O(p). \tag{5.14}$$

Для доказательства леммы осталось записать по-другому слагаемое $\nabla_p\langle Qg_1\rangle_{\mathbb{T}}$. Имеем

$$\nabla_p\langle Qg_1\rangle_{\mathbb{T}} = \langle\nabla_p Qg_1\rangle_{\mathbb{T}} + \langle Q\nabla_p g_1\rangle_{\mathbb{T}} = \langle C^2\nabla_y^\theta g_1\rangle_{\mathbb{T}} + \left\langle C^2 D\frac{1}{\Delta_y^\theta}\nabla_y^\theta C^2\right\rangle_{\mathbb{T}}$$
$$= \langle C^2\nabla_y^\theta g_1\rangle_{\mathbb{T}} + \left\langle \nabla_y^\theta\frac{1}{\Delta_y^\theta}DC^2C^2\right\rangle_{\mathbb{T}} = 2\langle C^2\nabla_y^\theta g_1\rangle_{\mathbb{T}}.$$

Применяя теперь оператор ∇_y и внося его под операцию осреднения, получаем первые из равенств (5.9).

6. Осредненные уравнения

Напомним, что мы решаем операторное уравнение $\widehat{\chi}\widehat{L} = \widehat{\mathcal{H}}\widehat{\chi}$, эквивалентное (3.7), с помощью теории возмущений. Сначала раскладываем соответствующие символы L, χ в асимптотические степенные ряды по параметру μ и получаем уравнения (4.2), (4.3), затем для L_j, χ_j переходим к разложениям по однородным полиномам по переменным p и для каждого j получаем соответствующую систему рекуррентных соотношений для $L_j^{(k)}$, $\chi_j^{(k)}$, как это было проделано при доказательстве леммы 4.

Введем некоторое целое число $N \geqslant 2$ и будем под $(L_j)_N$, $(\chi_j)_N$ понимать соответствующие суммы слагаемых $L_j^{(k)}$, $\chi_j^{(k)}$ с $k \leqslant N-j$, а под $(L)_N$, $(\chi)_N$ будем понимать суммы слагаемых $\mu^j L_j$, $\mu^j\chi_j$ при $j \leqslant N$, т.е. $(L)_N$ и $(\chi)_N$ – это полиномы степени N по переменным (p,μ). Учитывая, что для таких символов формулы композиции вида (4.1) содержат только конечное число слагаемых, мы получим операторное соотношение

$$(\widehat{\chi})_N(\widehat{L})_N = \widehat{\mathcal{H}}(\widehat{\chi})_N + \widehat{r}_N, \tag{6.1}$$

где $r_N(x,p,y,\mu)$ – это полином по переменным (p,μ)), причем $r_N = O(|p|+|\mu|)^{N+1}$. Заменив p на ξ, запишем $r_N(x,p,y,\mu)$ в виде $r_N(x,p,y,\mu) = \mu^{N+1}R_N(x,\xi,y,\mu)$, где $R_N(x,\xi,y,\mu)$ – это полином по переменным (ξ,μ); следовательно, $\widehat{r}_N$ в (6.1) можно заменить на

$$\widehat{r}_N = \mu^{N+1}R_N\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}, y, \mu\right). \tag{6.2}$$

Вместо (3.4), (3.5) за редуцированные уравнения мы возьмем

$$i\mu^2 w_t = (\widehat{L}^{(0)})_N w, \tag{6.3}$$

$$\mu^2 w_{tt} = -(\widehat{L}^{(0)})_N w. \tag{6.4}$$

Рассмотрим сначала случай $N = 2$. Тогда

$$(L)_2 = L_0^{(0)} + L_0^{(1)} + L_0^{(2)} + \mu(L_1^{(0)} + L_1^{(1)}) + \mu^2 L_2^{(0)},$$
$$(\chi)_2 = \chi_0^{(0)} + \chi_0^{(1)} + \chi_0^{(2)} + \mu(\chi_1^{(0)} + \chi_1^{(1)}) + \mu^2 \chi_2^{(0)},$$

причем отдельные слагаемые находятся из соответствующих рекуррентных соотношений, полученных при доказательстве леммы 4, так что для них выполнены утверждения этих лемм, в частности, $L_0^{(0)} = L_0^{(1)} = L_1^{(0)} = 0$. Редуцированное уравнение (6.3) теперь имеет вид

$$i\mu^2 w_t = (L_0^{(2)}(x,\widehat{p}) + \mu L_1^{(0)}(x,\widehat{p}) + \mu^2 L_2^{(0)}(x,\widehat{p}))w, \qquad \widehat{p} = -i\mu\nabla_x. \tag{6.5}$$

Представим $\chi_0^{(1)} = -ig_1$ в виде

$$\chi_0^{(1)} = -i(b_1(y,x)p_1 + b_2(y,x)p_2 + b_3(y,x)p_3)$$

и воспользуемся формулами (5.8), после чего сможем записать символ $L_0^{(2)}$ в виде

$$L_0^{(2)} = \langle C^2\rangle_{\mathbb{T}} + \sum_{k,j}\langle C^2\nabla_y^{\Theta} b_j\rangle_{\mathbb{T}}^k p_j p_k,$$

где $\langle C^2\nabla_y^{\Theta} b_j\rangle_{\mathbb{T}}^k$ – компонента вектора $\langle C^2\nabla_y^{\Theta} b_j\rangle_{\mathbb{T}}$ с номером k. Аналогичным образом из (5.9) и (5.10) получаем

$$L_1^{(1)} = i\sum_{k,j}\frac{\partial\langle C^2\nabla_y^{\Theta} b_j\rangle_{\mathbb{T}}^k}{\partial x_k}p_j - i\sum_k\frac{\partial\langle C^2\rangle_{\mathbb{T}}}{\partial x_k}p_k, \qquad L_{2\,0}^{0} = \langle V\rangle_{\mathbb{T}}.$$

Учитывая, что

$$\langle C^2\rangle_{\mathbb{T}}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}w + (\langle C^2\rangle_{\mathbb{T}})_{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\langle C^2\rangle_{\mathbb{T}}\frac{\partial}{\partial x_k}\,,$$

и такое же равенство имеет место для $\langle C^2\nabla_y^{\Theta} b_j\rangle_{\mathbb{T}}^k$, мы сможем записать редуцированное уравнение (6.5) после сокращения множителя μ^2 в виде

$$i\frac{\partial}{\partial t}w = -\sum_{k,j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(\langle C^2\nabla_y^{\Theta} b_j\rangle_{\mathbb{T}}^k + \langle C^2\rangle_{\mathbb{T}}\right)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + \langle V\rangle_{\mathbb{T}} w, \tag{6.6}$$

а уравнение (6.4) при $N = 2$ после сокращения множителя μ^2 – в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}w = \sum_{k,j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(\langle C^2\nabla_y^{\Theta} b_j\rangle_{\mathbb{T}}^k + \langle C^2\rangle_{\mathbb{T}}\right)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) - \langle V\rangle_{\mathbb{T}} w. \tag{6.7}$$

Это и есть осредненные уравнения по терминологии из [1]. Изменяя соответствующим образом рассуждения из доказательства леммы 1 с учетом (6.1), (6.3), (6.4), приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Если функция $w(x,t)$ является решением (6.6) (или (6.7)), то $\Psi = (\widehat{\chi}^0)_2 w$ удовлетворяет уравнению*

$$i\mu^2\Psi_t = \widehat{H}\Psi + \mu^3 R_2\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\,, y, \mu\right)w \tag{6.8}$$

или

$$\mu^2\Psi_{tt} = -\widehat{H}\Psi - \mu^3 R_2\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}, y, \mu\Big)w. \tag{6.9}$$

Таким образом, функция Ψ удовлетворяет соответственно уравнениям (2.2 a,b) с точностью до $O(\mu^3)$.

Доказательство теоремы 1. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 1, из (6.1), (6.2), (6.3) и (6.6) будем иметь

$$i\mu^2\Psi_t = i\mu^2(\widehat{\chi})_2 w_t = (\widehat{\chi})_2(\widehat{L})_2 w = (\widehat{\mathcal{H}}(\widehat{\chi})_2 + \widehat{r}_2)w = \widehat{\mathcal{H}}\Psi + \mu^3 R_2\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}, y, \mu\Big)w.$$

Доказательство соотношения (6.9) производится аналогичным образом.

Перейдем теперь к рассмотрению случая произвольного $N \geqslant 2$. Оператор $(\widehat{L})_N$, который получается заменой p на $\widehat{p} = -i\mu\nabla_x$ (считая, что оператор $\widehat{p}$ действует первым, а x – вторым), будет иметь

$$(\widehat{L})_N = \mu^2 A_2\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \mu^3 A_3\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \dots + \mu^N A_N\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big),$$

$$A_s(x,\xi) = \sum_{j=0}^{s} L_j^{(s-j)}(x,\xi),$$

где $A_s(x, -i\partial/\partial x)$ – дифференциальные операторы порядка s. Редуцированное уравнение (6.3) после сокращения на μ^2 теперь имеет вид

$$iw_t = \Big(A_2\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \mu A_3\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \dots + \mu^{N-2} A_N\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big)w, \tag{6.10}$$

а уравнение (6.4) после сокращения на μ^2 имеет вид

$$w_{tt} = -\Big(A_2\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \mu A_3\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \dots + \mu^{N-2} A_N\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big)w. \tag{6.11}$$

Допустим, что мы имеем функцию $w(y,x,t)$, удовлетворяющую при фиксированном μ уравнению (6.10) (или (6.11) с "невязкой" в правой части

$$iw_t = \Big(A_2\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \mu A_3\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \dots + \mu^{N-2} A_N\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big)w + F(y,x,t) \tag{6.12}$$

или

$$w_{tt} = -\Big(A_2\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \mu A_3\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \dots + \mu^{N-2} A_N\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big)w - F(y,x,t); \tag{6.13}$$

тогда $i\mu^2 w_t = (L^0)_N w + \mu^2 F$ или $\mu^2 w_{tt} = -(L^0)_N w - \mu^2 F$ соответственно. В таком случае мы сможем с помощью сплетающего оператора $(\widehat{\chi}^0)_N$ построить функцию $\Psi = (\widehat{\chi}^0)_N w$, для которой уравнение (2.2 a) (или (2.2 b)) также будет выполняться с некоторой "невязкой" в правой части.

Теорема 2. *Если функция* $w(x,t)$ *является решением* (6.12) (*или* (6.13)), *то* $\Psi = (\widehat{\chi}^0)_N w$ *удовлетворяет уравнению*

$$i\mu^2\Psi_t = \widehat{H}\Psi + \mu^{N+1}R_N\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}, y, \mu\Big)w + \mu^2(\widehat{\chi})_N F \tag{6.14}$$

или

$$\mu^2\Psi_{tt} = -\widehat{H}\Psi - \mu^{N+1}R_N\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}, y, \mu\Big)w - \mu^2(\widehat{\chi})_N F. \tag{6.15}$$

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, из (6.1), (6.2) и (6.12) будем иметь

$$\begin{aligned} i\mu^2\Psi_t &= i\mu^2(\widehat{\chi})_N w_t = (\widehat{\chi})_N(\widehat{L})_N w + \mu^2(\widehat{\chi})_N F = (\widehat{\mathcal{H}}(\widehat{\chi})_N + \widehat{r}_N)w + \mu^2(\widehat{\chi})_N F \\ &= \widehat{\mathcal{H}}\Psi + \mu^{N+1}R_N\Big(x, -i\frac{\partial}{\partial x}, y, \mu\Big)w + \mu^2(\widehat{\chi})_N F. \end{aligned}$$

Доказательство соотношения (6.15) производится аналогичным образом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*, Наука, М., 1984.

[2] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[3] В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов, *Усредненные модели микронеоднородных сред*, ФТИНТ им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, 2003.

[4] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis of Periodic Structures*, Stud. Math. Appl., **5**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1978.

[5] С. Ю. Доброхотов, "Приложение теории Маслова к двум задачам с операторно-значным символом", *УМН*, **39**:4 (1984), 125.

[6] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965.

[7] Л. В. Берлянд, С. Ю. Доброхотов, ""Операторное разделение переменных" в задаче о коротковолновой асимптотике для дифференциальных уравнений с быстроменяющимися коэффициентами", *ДАН СССР*, **296**:1 (1987), 80–84.

[8] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, T. Ya. Tudorovskiy, "Operator separation of variablrs for adiabatic problems in quantum and wave mechanics", *J. Engrg. Math.*, **55**:1-4 (2006), 183–237.

[9] В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов, "Подстановка Пайерлса и операторный метод Маслова", *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 554–571.

[10] Й. Брюнинг, В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, "Обобщенное преобразование Фолди–Вутхайзена и псевдодифференциальные операторы", *ТМФ*, **167**:2 (2011), 171–192.

[11] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.

[12] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, Т. Я. Тудоровский, "Обобщенный адиабатический принцип для описания динамики электрона в искривленных наноструктурах", *УФН*, **175**:9 (2005), 1004–1010.

[13] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*. Т. 9. *Статистическая физика*. Ч. 2. *Теория конденсированного состояния*, Наука, М., 1978.

[14] В. В. Кучеренко, “Асимптотика решения системы $A(x, -ih\frac{\partial}{\partial x})$ при $h \to 0$ в случае характеристик переменной кратности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:3 (1974), 625–662.

[15] Л. Хермандер, “Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными Т. 3. Псевдодифференциальные операторы”, 1987.

[16] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Наука, М., 1978.

[17] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.

[18] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[19] В. В. Грушин, “Применение многопараметрической теории возмущений фредгольмовых операторов к блоховским функциям”, *Матем. заметки*, **86**:6 (2009), 819–828.

Поступило
28.12.2011

Й. Брюнинг
Humboldt University, Germany
E-mail: bruening@mathematik.hu-berlin.de

В. В. Грушин
Московский государственный институт электроники
и математики,
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: vvgrushin@mail.ru

С. Ю. Доброхотов
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: dobr@ipmnet.ru