Математические заметки

Том 95 выпуск 3 март 2014

УДК 517.9

Осреднение в задаче о длинных волнах на воде над участком дна с быстрыми осцилляциями

В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов

Рассматривается система уравнений для гравитационных поверхностных волн в случае, когда дно бассейна представлено быстро осциллирующей функцией на фоне медленных изменений дна бассейна. В предположении, что изучаются волны, длины которых больше характерной длины осцилляций дна бассейна, но могут быть и много меньше характерных размеров области, где эти волны распространяются, с помощью адиабатического приближения производится переход к редуцированному осредненному уравнению типа волнового уравнения или линеаризованного уравнения Буссинеска с "аномальной" для теории поверхностных волн дисперсией (уравнения типа волнового с добавленными четвертыми производными). Быстроменяющиеся решения редуцированного уравнения могут находится (и были найдены, в том числе в работах авторов) с помощью асимпточеских методов, например, с помощью метода ВКБ, а при наличии фокальных точек с помощью канонического оператора Маслова и его обобщений.

Библиография: 29 названий.

DOI: 10.4213/mzm10426

1. Введение

В линейных задачах для уравнений в частных производных методы осреднения работают в ситуациях, когда их коэффициенты – быстроосциллирующие функции. Имеется огромное количество публикаций по методам осреднения, посвященные как очень серьезным теоретическим математическим вопросам, так и приложениям; мы упомянем здесь лишь [1]–[4]. Как правило, они применяются для построения асимптотических решений исходного уравнения, главный член которых – уже достаточно гладкая (не быстро осциллирующая) функция. С другой стороны, во многих физических задачах интерес представляют ситуации, когда и главный член асимптотического решения – быстроизменяющаяся функция. В этом случае в исходной задаче содержится несколько различных масштабов, и в задаче разумно использовать адиабатическое приближение. В настоящей статье эти методы применяются к изучению поверхностных волн в случае, когда дно бассейна представлено быстро осциллирующей функцией на фоне медленных изменений дна бассейна. При этом мы предполагаем, что изучаются решения, описывающие волны, длины которых больше характерной длины осцилляций дна бассейна, но могут быть и много меньше характерных размеров области, где эти волны распространяются.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00973) и проекта RITMARE (CINFAI, Italy).

Будем рассматривать несжимаемую идеальную безвихревую жидкость в гравитационном поле, пренебрегая температурными, молекулярно-диффузионными и диссипативными эффектами. Для простоты исключим из нашего рассмотрения эффекты, связанные с отражением волн от берегов бассейна. Для этого ограничим наше рассмотрение областью Ω в пространстве с горизонтальными $x = (x_1, x_2)$ и вертикальной z координатами, считая, что невозмущенная поверхность жидкости описывается уравнением $z = 0$, и свободная поверхность жидкости определяется уравнением $z = \eta(x,t)$. Пусть дно бассейна задается уравнением $z = -H(x)$, $H(x) > 0$. Задачи такого типа возникают, в частности, при исследовании волн цунами (см., например, [5]); тогда функция η – превышение свободной поверхности – описывает длинную волну на поверхности океана над быстро меняющимися областями дна.

Когда функция H зависит от x регулярным образом (в обезразмеренных переменных, которые будут введены ниже), то решение задачи определяется с помощью асимптотических формул, полученных в [6]–[8] и аппелирующих к гамильтоновой системе в четырехмерном фазовом пространстве с гамильтонианом $H|p|$. Мы здесь рассматриваем случай, когда H представляет собой быстро осциллирующую функцию на фоне медленных изменений дна бассейна. В рассматриваемой ситуации теория, развитая в указанных работах, становится неприменимой, и здесь сначала следует применять методы типа методов осреднения. Для таких ситуаций мы используем вариант осреднения, развитый в [9]–[11] (см. также [12]–[14]).

В разделе 2 исследуется система уравнений для потенциала скоростей Φ в линейном приближении волн малой амплитуды. В соответствующей обезразмеренной системе появляется параметр $h = d/l$, где d – характерная глубина бассейна, l – характерная длина по переменным x медленных изменений дна бассейна. В дальнейшем h считается малым параметром, что позволяет для решения задачи применять асимптотические методы. Затем производится сведение задачи к решению некоторого двумерного псевдодифференциального уравнения для функции $\psi = \Phi|_{z=0}$, где Φ – потенциал скоростей. В разделе 3 к уравнению, полученному для ψ, применяется вариант метода осреднения, развитый в [9], [11], что позволяет получить редуцированное уравнение, к которому можно применить метод ВКБ, а при наличии фокальных точек –канонический оператор Маслова и его обобщения. Это позволяет, как уже отмечалось, изучать волны, длина которых много меньше характерной длины медленных изменений дна бассейна, но больше характерной длины осцилляций дна бассейна. В разделе 4 получены приближенные формулы для коэффициентов редуцированного уравнения в случае малой осциллирующей части функции H.

2. Сведение задачи к решению двумерного псевдодифференциального уравнения

В линейном приближении волн малой амплитуды для потенциала скоростей имеем следующую систему [15]–[17]:

$$\Phi_{zz} + \Delta\Phi = 0 \qquad \text{для} \quad -H(x) < z < 0, \tag{2.1}$$

$$(\Phi_z + \nabla_x H \cdot \nabla_x \Phi)|_{z=-H(x)} = 0, \tag{2.2}$$

$$(\Phi_t + g\eta)|_{z=0} = 0, \qquad (\eta_t - \Phi_z)|_{z=0} = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $\nabla_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$, $\Delta = \nabla_x^2$, g – ускорение свободного падения.

Перейдем от переменных (x, z, t) к безразмерным переменным $x' = x/l$, $z' = z/d$, $t' = \sqrt{gd}\, t/l$ и обозначим

$$H' = \frac{H(lx')}{d}, \qquad \Phi'(x', z', t') = \frac{\Phi(lx', dz', lt'/\sqrt{gd})}{a\sqrt{gd}}, \qquad \eta'(x', t') = \frac{\eta(lx', lt'/\sqrt{gd})}{a},$$

где d – характерная глубина бассейна, l – характерная длина по переменным x, a – амплитуда волн. Тогда система (2.1)–(2.3) будет иметь вид (штрихи новых переменных опускаем):

$$\Phi_{zz} + h^2 \Delta \Phi = 0 \qquad \text{для} \quad -H(x) < z < 0, \tag{2.4}$$

$$\left(\Phi_z + h^2 \nabla_x H\left(x, \frac{\theta(x)}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x \Phi\right)\Big|_{z=-H(x)} = 0, \tag{2.5}$$

$$(h\Phi_t + \eta)|_{z=0} = 0, \qquad (h\eta_t - \Phi_z)|_{z=0} = 0, \tag{2.6}$$

где $h = d/l$. В дальнейшем мы будем считать h малым параметром и будем искать приближенное (асимптотическое при $h \to +0$) решение этой системы. Относительно поведения функции H, описывающей профиль дна бассейна (в обезразмеренных переменных), будем предполагать, что она имеет вид $H(x, \theta(x)/\varepsilon)$, где $H(x, y)$ – гладкая 2π-периодическая по переменным y_1 и y_2 ($y = (y_1, y_2)$) функция, $\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x))$ – гладкая векторная функция, фазы θ_j не коллинеарны, т.е. матрица θ_x, составленная из строк $((\theta_1)_{x_k}, (\theta_2)_{x_k})$, $k = 1, 2$, не вырождена. Нелинейная зависимость фаз Θ_x от x означает слабое изменение частот пространственных осцилляций профиля дна. Аналогичным образом с очевидными изменениями можно рассматривать и однофазовый случай, когда $\theta(x)$ – скалярная функция и y – одно переменное. Параметры h и ε предполагаются малыми, более того, мы будем считать их связанными соотношением $h = \varepsilon^2$.

Задачи такого типа возникают, в частности, при исследовании волн цунами (см., например, [5]), тогда функция η – превышение свободной поверхности описывает длинную волну на поверхности океана над быстро меняющимися областями дна. Условие $H(x, \eta) > 0$ означает, что мы не учитываем влияния береговых границ.

Для построения решений системы (2.4)–(2.6) будем использовать соображения из [18], [19] и технику упорядоченных операторов [20]–[22]. Ниже мы покажем, что система (2.4)–(2.6) может быть сведена к одному уравнению для функции $\psi(x, t) = \Phi(x, z, t)|_{z=0}$, которое оказывается уже псевдодифференциальным. После того, как это уравнение будет выведено, для нахожендия его конкретных физически интересных решений можно непосредственно использовать процедуру осреднения и асимптотический метод Маслова.

Псевдодифференциальным уравнениям (с параметром), технике упорядоченных операторов, асимптотической теории Маслова и их приложениям посвящено обширное количество монографий и статей (см., например, [20]–[22]) и приведенную там библиографию. Однако, чтобы не отсылать читателя к этим монографиям, мы приведем необходимые определения и формулы этой теории.

Напомним, что в двумерном случае h-псевдодифференциальный оператор $\widehat{L}$ с символом $L(x, p, h)$ определяется формулой

$$\widehat{L}\psi = L\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, h\right)\psi = \frac{1}{(-2\pi ih)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ipx/h} L(x, p, h) \widetilde{\psi}(p)\, dp, \tag{2.7}$$

где $\widetilde{\psi}$ – преобразование Фурье от функции $\psi(x)$:

$$\widetilde{\psi}(p) = \frac{1}{(2\pi ih)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ipx/h} \psi(x)\, dx, \qquad p = (p_1, p_2).$$

Индекс над аргументом показывает порядок применения соответствующего оператора. Существование таких операторов гарантирует, например, выполнение следующих оценок [22]:

$$\left| \frac{\partial^{|m|+|l|} L(x,p,h)}{\partial x^m \partial p^l} \right| \leqslant C_{m,l} (1+|x|)^M (1+|p|)^M$$

для некоторого целого M и произвольных мультииндексов m, l.

Обобщая [18], [19], будем искать решение уравнений (2.4), (2.5) в виде

$$\Phi = \widehat{R}\psi, \qquad \psi = \Phi|_{z=0}, \qquad \widehat{R} = R\biggl(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, \frac{\theta(\overset{2}{x})}{\varepsilon}, z, \varepsilon\biggr), \tag{2.8}$$

где функция $R(x,p,y,z,\varepsilon)$ периодична по y_1 и y_2 с периодом 2π. Функцию $R(x,p,y,z,\varepsilon)$ будем называть *символом* оператора R. Смысл введения новых переменных y состоит в регуляризации коэффициентов уравнения (2.5): они зависят от ε при $\varepsilon \to +0$ уже гладким образом.

Подставляя Φ в виде (2.8) в уравнение (2.4), получаем

$$\biggl(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - (ih\nabla_x)^2\biggr) R\biggl(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, \frac{\theta(\overset{2}{x})}{\varepsilon}, z, \varepsilon\biggr)\psi(x) = 0. \tag{2.9}$$

Найдем символ оператора, стоящего в левой части равенства (2.9). Равенство нулю этого символа будет достаточным условием выполнения (2.4). Для этого нам нужно "протащить" оператор $-ih\partial/\partial x$ через $\widehat{R}$. Дадим объяснение этой операции. В общем случае h-псевдодифференциального оператора $\widehat{L}$ с символом $L(x,p,h)$ с помощью дифференцирования под знаком интеграла (2.7) получим

$$\biggl(-ih\frac{\partial}{\partial x}\biggr)\widehat{L}\psi = \frac{1}{(-2\pi ih)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ipx/h} \biggl(p - ih\frac{\partial}{\partial x}\biggr) L(x,p,h)\widetilde{\psi}(p)\, dp.$$

Таким образом, символ оператора $(-ih\partial/\partial x)\widehat{L}$ будет иметь вид $(p - ih\partial/\partial x)L(x,p,h)$. Заметим, что полученная формула является частным случаем известных формул композиции h-псевдодифференциальных операторов, но нам понадобится только этот частный случай. "Протаскивая" в (2.9) $(-ih\partial/\partial x)$ через $\widehat{R}$ дважды, получим, что символ оператора $(-ih\partial/\partial x)^2\widehat{R}$ имеет вид

$$\biggl(p - ih\nabla_x - i\frac{h}{\varepsilon}\theta_x\nabla_y\biggr)^2 R(x,p,y,z,\varepsilon).$$

В результате мы находим, что символ оператора, стоящего в левой части (2.9), имеет вид

$$R_{zz} - \biggl(p - ih\nabla_x - i\frac{h}{\varepsilon}\theta_x\nabla_y\biggr)^2 R(x,p,y,z,\varepsilon).$$

Равенство нулю этого символа, а также символа оператора уравнения (2.5) с очевидным условием $R|_{z=0} = 1$ в случае $h = \varepsilon^2$ дает краевую задачу (ср. [18], [19])

$$R_{zz} - (p - \varepsilon^2\nabla_x - i\varepsilon\theta_x\nabla_y)^2 R = 0 \qquad \text{для} \quad -H(x,y) < z < 0, \quad R|_{z=0} = 1, \tag{2.10}$$

$$R_z + i\langle(\varepsilon^2\nabla_x + \varepsilon\theta_x\nabla_y)H, (p - i\varepsilon^2\nabla_x - i\varepsilon\theta_x\nabla_y)R\rangle|_{z=-H(x,y)} = 0. \tag{2.11}$$

Через $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ мы обозначаем вещественное скалярное произведение векторов. Представив R в виде асиптотического ряда $R = R^0 + \varepsilon R^1 + \varepsilon^2 R^2 + \cdots$ и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим из (2.10), (2.11) для R^j цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений по z. Переменные (x, p, y) будут входить в эти уравнения как параметры, в частности, для R^0 и R^1 будем иметь

$$R^0_{zz} - p^2 R^0 = 0 \qquad \text{для} \quad -H(x,y) < z < 0, \quad R^0|_{z=0} = 1, \quad R^0_z|_{z=-H(x,y)} = 0, \tag{2.12}$$

$$R^1_{zz} - p^2 R^1 = -2i\langle p, \theta_x\nabla_y H\rangle R^0 \qquad \text{для} \quad -H(x,y) < z < 0, \tag{2.13}$$

$$R^1|_{z=0} = 0, \qquad (R^1_z + i\langle p, \theta_x\nabla_y H\rangle R^0)|_{z=-H(x,y)} = 0. \tag{2.14}$$

Решая (2.12)–(2.14), получим

$$R^0 = \frac{\cosh[(z+H)|p|]}{\cosh(H|p|)}\,, \tag{2.15}$$

$$R^1 = \frac{i\langle p, \theta_x\nabla_y H\rangle}{\cosh^3(H|p|)}[H\sinh(z|p|)\sinh(H|p|) - z\cosh(z|p|)\cosh(H|p|)]. \tag{2.16}$$

Решение соответствующих уравнений для R^2 имеет достаточно громоздкий характер, однако, для дальнейших вычислений нам достаточно будет найти R^2 с точностью до $O(p^2)$ при $p \to 0$. Учитывая соотношение $R^0 = 1 + O(p^2)$, систему для определения R^2 можно переписать в виде

$$R^2_{zz} = O(p^2) \qquad \text{для} \quad -H(x,y) < z < 0,$$
$$R^2|_{z=0} = 0, \qquad R^2_z|_{z=-H(x,y)} = -i\langle p, \nabla_x H\rangle + O(p^2),$$

так что с точностью до $O(p^2)$ для R^2 получается достаточно простая формула

$$R^2 = -i\langle p, \nabla_x H\rangle z + O(p^2). \tag{2.17}$$

Нетрудно заметить из аналогичных соображений, что $R^j = O(|p|)$ для всех $j \geqslant 2$.

Перейдем теперь к уравнениям (2.6), из которых следует, что

$$(h^2\Phi_{tt} + \Phi_z)|_{z=0} = 0.$$

Представив Φ в виде $\Phi = \widehat{R}\psi$ (смотри формулу (2.8)), получим псевдодифференциальное уравнение

$$h^2\psi_{tt} + \widehat{L}\psi = 0, \tag{2.18}$$

где h-псевдодифференциальный оператор $\widehat{L} = \widehat{R}_z|_{z=0}$ имеет символ $L = L^0 + \varepsilon L^1 + \varepsilon^2 L^2 + \cdots$, причем

$$L^j(x,p,y) = R^j_z(x,p,y,z)|_{z=0}.$$

Учитывая соотношения (2.15), (2.16), (2.17), $R^j = O(|p|)$ для $j \geqslant 2$, $|p|\tanh(H|p|) = Hp^2 + O(p^4)$ получим, что символ L имеет вид

$$L(x,p,y,\varepsilon) = Hp^2 - i\varepsilon\langle\theta_x\nabla_y H, p\rangle - i\varepsilon^2\langle\nabla_x H, p\rangle + V_0(x,p,y)p^4 \\ + \varepsilon\langle\theta_x\nabla_y H, p\rangle p^2 V_1(x,p,y) + \varepsilon^2\langle V_2(x,p,y,\varepsilon)p,p\rangle + \varepsilon^3\langle V_3(x,p,y,\varepsilon),p\rangle,$$

где V_2 – матричнозначный, V_3 – векторнозначный, V_0 и V_1 – скалярные символы. Если мы теперь перейдем от операторов $\widehat{p} = -ih\partial/\partial x = -i\varepsilon^2\partial/\partial x$ к операторам $\widehat{p_\varepsilon} = -i\varepsilon\partial/\partial x$, так что $p = \varepsilon p_\varepsilon$, то уравнение (2.18) запишется в виде

$$\psi_{tt} = \left\langle \nabla_x, H\left(x, \frac{\theta(x)}{\varepsilon}\right)\nabla_x\right\rangle\psi - V\left(\overset{2}{x}, -i\varepsilon\overset{1}{\nabla}_x, \frac{\theta(\overset{2}{x})}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\psi, \tag{2.19}$$

где

$$V(x,p_\varepsilon,y,\varepsilon) = V_1(x,\varepsilon p_\varepsilon,y,\varepsilon)p_\varepsilon^4 + \langle V_2(x,\varepsilon p_\varepsilon,y,\varepsilon)p_\varepsilon,p_\varepsilon\rangle + \langle V_3(x,\varepsilon p_\varepsilon,y,\varepsilon),p_\varepsilon\rangle. \tag{2.20}$$

Тем самым установлено следующее утверждение.

Лемма 1. *Решение системы* (2.4)–(2.6) *сводится к решению уравнения* (2.19) *для функции* $\psi = \Phi(x,z,t)|_{z=0}$, *причем символ* $V(x,p_\varepsilon,y,\varepsilon)$ *имеет вид* (2.20).

Мы не можем найти явный вид символов V_j, хотя и могли бы найти конечное число членов их асимптотических разложений, решив соответствующее число уравнений для R^j, что привело бы к громоздким формулам. Однако, мы в дальнейшем увидим, что конкретный вид этих символов не влияет на главный член асимптотических разложений решений уравнения (2.19), которые будут рассматриваться дальше.

В уравнение (2.19) входит дифференциальный оператор с быстроосциллирующим коэффициентом $H(x,\theta(x)/\varepsilon)$. Как уже отмечалось во введении, методы осреднения, как правило, применяются для построения таких асимптотических решений, главный член которых – уже достаточно гладкая (не быстро осциллирующая) функция. С другой стороны, во многих физически интересных задачах возникают ситуации, когда и главный член асимптотического решения – быстроизменяющаяся функция. Для таких ситуаций мы используем вариант осреднения, развитый в [9], [11]. Цель последующих вычислений – получение таких уравнений $\varepsilon^2 w_{tt} = -\mathcal{L}(\overset{2}{x}, -i\varepsilon\overset{1}{\nabla}_x, \varepsilon)w$ (или их символов $\mathcal{L}(x,p,\varepsilon)$) с коэффициентами, уже регулярно зависящими от параметра ε, по решениям w которых могут быть выражены некоторые асимптотические решения уравнения (2.19), а тем самым и исходной системы (2.4)–(2.6). Эти уравнение мы будем назвать *осредненными*, а процедуру их вывода – *осреднением*.

3. Осредненные уравнения

3.1. Общая схема вывода осредненных уравнений. Кратко изложим подход к получению осредненных уравнений, развитый в [12], [14], [9]. Сначала решение задачи представляется в виде

$$\psi = \Psi\left(x, \frac{\theta(x)}{\varepsilon}, t, \varepsilon\right), \tag{3.1}$$

где 2π-периодическая по y_1 и y_2 функция $\Psi(x,y,t,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^2\Psi_{tt} = -\widehat{\mathcal{H}}\Psi, \tag{3.2}$$

$$\widehat{\mathcal{H}} = \langle(-i\varepsilon\nabla_x - i\nabla_y^\theta), H(x,y)(-i\varepsilon\nabla_x - i\nabla_y^\theta)\rangle + \varepsilon^2 V(\overset{2}{x}, \overset{1}{-i\varepsilon\nabla_x - i\nabla_y^\theta}, \overset{2}{y}, \varepsilon), \tag{3.3}$$

через ∇_y^θ здесь и далее будем обозначать $\theta_x\nabla_y$.

Оператор V в правой части уравнения (3.3) будем понимать следующим образом. Разложим символ $V_j(x,\varepsilon p_\varepsilon,y,\varepsilon)$ в формальные степенные ряды по p_ε и ε, после чего поставим вместо p_ε операторы $-i\varepsilon\nabla_x - i\theta_x\nabla_y$. Произведя соответствующие упрощения, запишем оператор V в виде суммы слагаемых

$$V(\overset{2}{x}, \overset{1}{-i\varepsilon\nabla_x - i\nabla_y^\theta}, \overset{2}{y}, \varepsilon) = \sum b_{j,k,m}(x,y)\varepsilon^j(-i\varepsilon\nabla_x)^k(-i\nabla_y)^m,$$

где k и m – мультииндексы, $k=(k_1,k_2)$, $m=(m_1,m_2)$ причем $n+4 \geqslant |k|+|m|$ ($|k|=k_1+k_2$, $|m|=m_1+m_2$). Тем самым мы сможем записать оператор V в правой части (3.3) в виде ε-псевдодифференциального оператора

$$V(\overset{2}{x}, \overset{1}{-i\varepsilon\nabla_x - i\nabla_y^\theta}, \overset{2}{y}, \varepsilon) = \widetilde{V}(\overset{2}{x}, -i\overset{1}{\varepsilon}\nabla_x, y, -i\nabla_y, \varepsilon)$$

с операторнозначным символом, допускающим асимптотическое разложение

$$\widetilde{V}(\overset{2}{x}, p_\varepsilon, y, -i\nabla_y, \varepsilon) = \widetilde{V}_0(\overset{2}{x}, p_\varepsilon, y, -i\nabla_y) + \varepsilon\widetilde{V}_1(\overset{2}{x}, p_\varepsilon, y, -i\nabla_y) + \cdots,$$

где

$$\widetilde{V}_j(\overset{2}{x}, p_\varepsilon, y, -i\nabla_y) = \sum_{k,m} b_{j,k,m}(x,y)p_\varepsilon^k(-i\nabla_y)^m.$$

Соответственно этому мы сможем записать оператор $\widehat{\mathcal{H}}$ в (3.3) в виде ε-псевдодифференциального оператора

$$\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\overset{2}{x}, -i\overset{1}{\varepsilon}\nabla_x, y, -i\nabla_y, \varepsilon).$$

с операторнозначным символом, допускающим асимптотическое разложение

$$\mathcal{H}(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y,\varepsilon) = \mathcal{H}_0(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y) + \varepsilon\mathcal{H}_1(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y) + \cdots, \tag{3.4}$$

причем $\mathcal{H}_j(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y)$ являются дифференциальными операторами по y.

Это уравнение относится к уравнениям, известным в математической литературе (см. [20], [23]) как уравнения с операторнозначным символом. Смысл введения новых переменных y состоит в регуляризиции коэффициентов уравнения (2.19), они зависят от ε при $\varepsilon\to 0$ уже регулярным образом.

Использование адиабатического приближения в операторной форме [14], [23], [9] позволяет найти некоторые решения уравнения (3.2). Мы ищем решения Ψ уравнения (3.2) в виде действия некоторого (пока неизвестного) псевдодифференциального оператора на новую (также пока неизвестную) функцию

$$\Psi(x,y,t,\varepsilon) = \widehat{\chi}w \equiv \chi(\overset{2}{x}, -i\overset{1}{\varepsilon}\nabla_x, y, \varepsilon)w(x,t,\varepsilon). \tag{3.5}$$

Здесь $\widehat{\chi}$ – "сплетающий" псевдодифференциальный оператор с символом, допускающим асимптотическое разложение:

$$\chi(x,p_\varepsilon,y,\varepsilon)=\chi_0(x,p_\varepsilon,y)+\varepsilon\chi_1(x,p_\varepsilon,y)+\cdots. \tag{3.6}$$

Относительно функции w мы предполагаем, что она удовлетворяет "эффективному" (редуцированному или "осредненному") уравнению[1]:

$$\varepsilon^2 w_{tt}=-\mathcal{L}(\overset{2}{x},-i\overset{1}{\varepsilon}\nabla_x,\varepsilon)w, \tag{3.7}$$

символ $\mathcal{L}$ которого допускает регулярное разложение по ε:

$$\mathcal{L}(x,p_\varepsilon,\varepsilon)=\mathcal{L}_0(x,p_\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{L}_1(x,p_\varepsilon)+\cdots. \tag{3.8}$$

Функция $H_{\text{eff}}(p_\varepsilon,x)=\mathcal{L}_0(x,p_\varepsilon)$ называется (классическим) *эффективным гамильтонианом*. Если $\mathcal{L}(x,p_\varepsilon)$ найдено, то построение (некоторых) решений уравнения (3.2), а тем самым и исходной системы уравнений (2.1)–(2.3), сводится к нахождению решений уравнения (3.7). Точно найти как $\mathcal{L}(x,p_\varepsilon)$, так и решения w уравнения (3.7), не представляется возможным и речь может идти только о соответствующих асимптотиках. Наши рассмотрения приспособлены к асимптотикам, основанным на квазиклассическом приближении или его обобщениях. Если иметь в виду реальные приложения, то в этом случае достаточно ограничиться (см. ниже и [9]–[11], [23]–[26]) лишь нахождением $\mathcal{L}_j(x,p_\varepsilon)$, и даже их разложениями по p_ε, при этом алгоритм нахождения быстроменяющихся асимптотических решений основывается лишь на работе с $\mathcal{L}_j(x,p_\varepsilon)$; соответствующее дифференциальное уравнение в вычислениях участвует постольку, поскольку по символу $\mathcal{L}(x,p_\varepsilon)=\mathcal{L}_0(x,p_\varepsilon)+\cdots+O(\varepsilon^3)$ оно восстанавливается.

Операторы $\widehat{\chi}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ должны быть связаны соотношением

$$\widehat{\mathcal{H}}\widehat{\chi}=\widehat{\chi}\widehat{\mathcal{L}}, \tag{3.9}$$

которое приводит к уравнению

$$\chi(\overset{2}{x},p_\varepsilon-\overset{1}{i}\varepsilon\nabla_x,y,\varepsilon)\mathcal{L}(x,p_\varepsilon,\varepsilon)=\mathcal{H}\Big(\overset{2}{x},p_\varepsilon-\overset{1}{i}\varepsilon\nabla_x,y,-i\frac{\partial}{\partial y},\varepsilon\Big)\chi(x,p_\varepsilon,y,\varepsilon) \tag{3.10}$$

для их символов (см. лемму 1 в [9]), где

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y,\varepsilon)&=\mathcal{H}_0(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y,\varepsilon)\\&\qquad+\varepsilon\mathcal{H}_1(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y,\varepsilon)+\varepsilon^2\widetilde{V}(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y,\varepsilon),\\ \mathcal{H}_0(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y,\varepsilon)&=\langle(p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta),H(y,x)(p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta)\rangle,\\ \mathcal{H}_1(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y,\varepsilon)&=-\langle\nabla_x,H(y,x)\nabla_y^\theta\rangle-i\langle\nabla_x,H(y,x)p_\varepsilon\rangle.\end{aligned}$$

3.2. Вычисление символов с помощью теории возмущений по параметру ε и малым импульсным переменным. Уравнение (3.10) решается методами теории возмущений. Для задач, которые рассматриваются в данной статье, решение

[1] Замена $p\to -i\varepsilon\nabla_x$ в функции $\mathcal{L}(x,p,\varepsilon)$ в физической литературе называется *подстановкой Пайерлса* [27].

находится в виде разложения по малому параметру ε и (малой) переменной p_ε, причем, как уже отмечалось, для построения главного члена асимптотики достаточно ограничится конечным числом членов соответствующих разложений.

Сначала мы применяем теорию возмущений по параметру ε. Для главных членов χ_0 и $\mathcal{L}_0(x, p_\varepsilon)$ разложений (3.6) и (3.8) получается семейство зависящих от x и p_ε 2π-периодических по y_1 и y_2 задач

$$\mathcal{H}_0\chi_0(x, p_\varepsilon, y) = \mathcal{L}_0(x, p_\varepsilon)\chi_0(x, p_\varepsilon, y), \qquad \mathcal{H}_0 = \langle (p_\varepsilon - i\nabla_y^\theta), H(y, x)(p_\varepsilon - i\nabla_y^\theta)\rangle. \tag{3.11}$$

Задача (3.11) имеет бесконечный набор решений – “мод” (собственных функций и собственных значений). Нас будет интересовать решение с минимальным собственным значением. Для такого решения справедливы следующие разложения по импульсным переменным p_ε

$$\mathcal{L}_0(x, p_\varepsilon) = \mathcal{L}_0^{(2)}(x, p_\varepsilon) + \mathcal{L}_0^{(4)}(x, p_\varepsilon) + O(|p_\varepsilon|^6), \qquad \mathcal{L}_1(x, p_\varepsilon) = \mathcal{L}_1^{(1)}(x, p_\varepsilon) + O(p_\varepsilon^2), \tag{3.12}$$

где $\mathcal{L}_j^{(k)}$ – однородные полиномы по p_ε k-й степени. Приведем соответствующие формулы из работ [9], [10].

Для любой 2π-периодической по переменным y_1 и y_2 функции $f(x, p_\varepsilon, y)$, т.е. функции, заданной на торе $\mathbb{T} = \{y_1 \in [0, 2\pi],\ y_2 \in [0, 2\pi]\}$, обозначим среднее

$$\langle f\rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x, p_\varepsilon, y)\, dy_1\, dy_2. \tag{3.13}$$

Для дальнейшего удобно ввести пространство $L_2(\mathbb{T})$ по переменным y с “нормированным” скалярным произведением, полагая для любых функций $g(y)$, $f(y)$

$$(g, f)_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}} \overline{g}(y) f(y)\, dy, \tag{3.14}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Для однофазового случая интегрирование в (3.13), (3.14) производится по окружности $y \in [0, 2\pi]$, а множитель $(2\pi)^{-2}$ заменяется на $(2\pi)^{-1}$.

Далее введем операторы

$$\Delta_y^\theta = \langle \nabla_y^\theta, H(x, y)\nabla_y^\theta\rangle, \qquad D = \langle p_\varepsilon, \nabla_y^\theta\rangle$$

и рассмотрим уравнение (задача на ячейке)

$$\Delta_y^\theta F = f, \tag{3.15}$$

где $f(x, p_\varepsilon, y)$ – гладкая 2π-периодическая по переменным y_j функция с нулевым средним. У этого уравнения существует единственное (гладкое) решение с нулевым средним. Это решение обозначим $F(x, p_\varepsilon, y) = f(x, p_\varepsilon, y)/\Delta_y^\theta$. Пусть $H_0(x) = \langle H(x, y)\rangle_{\mathbb{T}}$, $\widetilde{a}(x, y) = H(x, y) - H_0(x)$, и дополнительно к оператору D введем оператор $Q = DH - HD$. Обозначим через $g_0(x, y)$, $g_1(x, p_\varepsilon, y)$, $g_2(x, p_\varepsilon, y)$ решения с нулевым средним задачи на ячейке

$$g_0 = \frac{1}{\Delta_y^\theta}\widetilde{a}, \qquad g_1 = \frac{1}{\Delta_y^\theta}(D\widetilde{a}), \qquad g_2 = \frac{1}{\Delta_y^\theta}(Qg_1 - \langle Qg_1\rangle_{\mathbb{T}}), \qquad \langle g_{0,1,2}\rangle_{\mathbb{T}} = 0. \tag{3.16}$$

Заметим, что $g_1(x, p_\varepsilon, y)$ – линейная однородная функция p_ε, $g_2(x, p_\varepsilon, y)$ – однородный многочлен второго порядка по p_ε.

Лемма 2. *При x, принадлежащих компакту K, и достаточно малых p_ε минимальное собственное значение $\mathcal{L}_0(x,p_\varepsilon)$ оператора $\mathcal{H}_0$ невырождено и аналитично по p_ε. Функции $\chi_0(x,p_\varepsilon,y)$, $\chi_1(x,p_\varepsilon,y)$ можно также выбрать аналитическими по p_ε, так что справедливы равенства (3.12), где*

$$\mathcal{L}_0^{(2)}(x,p_\varepsilon)=p_\varepsilon^2H_0-\langle HDg_1\rangle_{\mathbb{T}},\qquad \mathcal{L}_1^{(1)}(x,p_\varepsilon))=i\langle\langle\nabla_x,H\nabla_y^\theta g_1\rangle\rangle_{\mathbb{T}}-i\langle\nabla_x,H_0p_\varepsilon\rangle, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{L}_0^{(4)}(p_\varepsilon,x)=p_\varepsilon^4\langle g_0\widetilde{a}\rangle_{\mathbb{T}}+2p_\varepsilon^2\langle g_1Qg_0\rangle_{\mathbb{T}}+\langle g_1^2\rangle_{\mathbb{T}}\langle Qg_1\rangle_{\mathbb{T}}+p_\varepsilon^2\langle g_1^2\widetilde{a}\rangle_{\mathbb{T}}+\langle g_2Qg_1\rangle_{\mathbb{T}}, \tag{3.18}$$

$$\chi_0=1-ig_1(y,x,p_\varepsilon)+p_\varepsilon^2g_0(y,x)-g_2(x,p_\varepsilon,y)-\frac{1}{2}\langle g_1^2\rangle_{\mathbb{T}}+O(|p_\varepsilon|^3), \tag{3.19}$$

$$\left\|1-ig_1(y,x,p_\varepsilon)+p_\varepsilon^2g_0(y,x)-g_2(x,p_\varepsilon,y)-\frac{1}{2}\langle g_1^2\rangle_{\mathbb{T}}\right\|_{L_2(\mathbb{T})}=1+O(|p_\varepsilon|^3). \tag{3.20}$$

Доказательство формул (3.17) имеется в работе [9], а доказательство формул (3.18)–(3.20) в [10]. Для волн, длина которых больше характерной длины осцилляций дна бассейна, будем искать решение редуцированного уравнения (3.7) методом ВКБ.

3.3. ВКБ-решения осредненных уравнений. Пусть w имеет вид

$$w=A(x,t)e^{iS(x,t)/\mu},\qquad \mu=\varepsilon^k,\quad 1>k>0. \tag{3.21}$$

Для применения метода ВКБ удобно перейти от операторов $\widehat{p}_\varepsilon=-i\varepsilon\nabla_x$ к операторам $\widehat{p}_\mu=-i\mu\nabla_x$, так что $p_\varepsilon=(\varepsilon/\mu)p_\mu$. В случае $0<k\leqslant 2/3$ ограничимся рассмотрением $\mathcal{L}_0^{(2)}(x,p_\varepsilon)$, $\mathcal{L}_0^{(4)}(x,p_\varepsilon)$ и $\mathcal{L}_1^{(1)}(x,p_\varepsilon)$ из разложения символа $\mathcal{L}$, записав уравнение (3.7) в виде

$$\mu^2w_{tt}=-\mathcal{L}_0^{(2)}(\overset{2}{x},-i\mu\overset{1}{\nabla}_x)w-\frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\mathcal{L}_0^{(4)}(\overset{2}{x},-i\mu\overset{1}{\nabla}_x)w-\mu\mathcal{L}_1^{(1)}(\overset{2}{x},-i\mu\overset{1}{\nabla}_x)w. \tag{3.22}$$

Множитель ε^2/μ^2 при $\mathcal{L}_0^{(4)}$ в (3.22) равен $\mu^{(2-2k)/k}$, причем $(2-2k)/k\geqslant 1$ для $0<k\leqslant 2/3$. Поэтому второе слагаемое в правой части (3.22) можно учесть в уравнении переноса для A, записав его в виде

$$\begin{aligned}2S_tA_t+S_{tt}A=\langle(\mathcal{L}_0^{(2)})_p(x,\nabla_xS),\nabla_xA\rangle+\frac{1}{2}\,ASp((\mathcal{L}_0^{(2)})_{pp}(x,\nabla_xS)S_{xx})\\ +i\mathcal{L}_1^{(1)}(x,\nabla_xS)+i\mu^{2/k-3}\mathcal{L}_0^{(4)}(x,\nabla_xS),\end{aligned}$$

т.е. в стандартное уравнение переноса, учитывающее только $\mathcal{L}_0^{(2)}$, добавляется слагаемое, отвечающее $\mathcal{L}_0^{(4)}$, при этом A будет зависеть от x, t, μ. Для фазы S получается стандартное уравнение Гамильтона–Якоби

$$S_t^2=\mathcal{L}_0^{(2)}(x,\nabla_xS).$$

Порядки по отношению к параметру μ членов разложения $\mathcal{L}$ по p_ε и ε, не вошедших в правую часть (3.22), больше единицы, так что они не учитываются при вычислении главного члена ВКБ-приближения.

Если второе слагаемое в правой части уравнения (3.22) не учитывать в уравнении переноса, а учесть в уравнении для фазы, записав уравнение для фазы S в виде

$$S_t^2 = \mathcal{L}_0^{(2)}(x, \nabla_x S) + \mu^{2/k-2}\mathcal{L}_0^{(4)}(x, \nabla_x S),$$

то получим ВКБ-приближение (3.21) при всех $0 < k < 4/5$ (при этом A, S будут зависеть от x, t, μ). Для $1 > k \geqslant 4/5$ уже нельзя пользоваться приближенным уравнением (3.22), поскольку для таких k начинают играть роль члены с $j \geqslant 6$ разложения (3.12) символа $\mathbb{L}_0$ по однородным полиномам от p (чем ближе k к единице, тем больше членов разложения нужно учитывать). Таким образом, для волн с $\mu = \varepsilon^k$, $0 < k \leqslant 4/5$ для приближенного решения редуцированного уравнения (3.7) можно применять метод ВКБ, пользуясь уравнением (3.22).

Отметим, что в работе [11] (см. также [6], [8]) подобный подход применялся для изучения волн, порожденных локализованным источником в начальных данных вида

$$w|_{t=0} = W\left(\frac{x}{\mu}\right), \qquad w_t|_{t=0} = 0,$$

где $W(z)$ – достаточно быстро убывающая функция при $x \to \infty$.

3.4. Гладкие решения (длинные волны) и стандартное "осредненное" уравнение. Для "длинных" волн, когда решение $w(x,t,\varepsilon)$ уравнения (3.7) представляет собой гладкую функцию, регулярно зависящую от ε (то есть представляется асимптотическим рядом по степеням ε с гладкими по x и t коэффициентами), наш подход приводит к обычным осредненным уравнениям (см. [9]). Для главного члена соответствующего разложения w по степеням ε в осредненном уравнении учитываются только $\mathcal{L}_0^{(2)}(x,p_\varepsilon)$, $\mathcal{L}_1^{(1)}(x,p_\varepsilon)$ и $\mathcal{L}_2^{(0)}(x)$. В работе [9] было рассмотрено уравнение (2.19) в случае, когда V есть оператор умножения на функцию $V(x,\theta(x)/\varepsilon)$, тогда для $\mathcal{L}_2^{(0)}(x)$ получается формула

$$\mathcal{L}_2^{(0)}(x) = \langle V(x,y)\rangle_{\mathbb{T}}. \tag{3.23}$$

Как показано в [9], осредненное уравнение имеет вид

$$w_{tt} = -\mathcal{L}_0^{(2)}(\overset{2}{x}, -i\overset{1}{\nabla}_x)w - \mathcal{L}_1^{(1)}(\overset{2}{x}, -i\overset{1}{\nabla}_x)w - \mathcal{L}_2^{(0)}(x)w. \tag{3.24}$$

Из доказательства формулы (3.23), приведенном в [9], видно, что для V из (2.19) аналогичным образом получается формула

$$\mathcal{L}_2^{(0)}(x) = \langle \widetilde{V}(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y,\varepsilon)1\rangle_{\mathbb{T}}. \tag{3.25}$$

Из определения оператора V в (3.3), приведенном выше, следует, что для его операторнозначного символа $\widetilde{V}(x,p_\varepsilon,y,-i\nabla_y,\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ и $p_\varepsilon = 0$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(x,0,y,-i\nabla_y,0) = V_1(x,0,y,0)(-i\nabla_y^\theta)^4 \\ + \langle V_2(x,0,y,0)(-i\nabla_y^\theta), -i\nabla_y^\theta\rangle + \langle V_3(x,0,y,0), -i\nabla_y^\theta\rangle,\end{aligned}$$

поэтому в нашем случае из (3.25) получаем, что $\mathcal{L}_2^{(0)}(x) = 0$, а осредненное уравнение будет иметь вид

$$w_{tt} = -\mathcal{L}_0^{(2)}(\overset{2}{x}, -i\overset{1}{\nabla}_x)w - \mathcal{L}_1^{(1)}(\overset{2}{x}, -i\overset{1}{\nabla}_x)w. \tag{3.26}$$

Из формул (3.17) для $\mathcal{L}_0^{(2)}$ и $\mathcal{L}_1^{(1)}$ следует, что операторы в правой части (3.26) имеют вид

$$\mathcal{L}_0^{(2)}(\overset{2}{x}, -i\overset{1}{\nabla}_x) = -H_0 \sum_k \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + \sum_{k,j} \langle H \nabla_y^\theta b_j \rangle_{\mathbb{T}}^k \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_j}\,,$$

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(\overset{2}{x}, -i\overset{1}{\nabla}_x) = -\sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} H_0\right) \frac{\partial w}{\partial x_k} + \sum_{k,j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \langle H \nabla_y^\theta b_j \rangle_{\mathbb{T}}^k\right) \frac{\partial w}{\partial x_j}\,.$$

Поэтому осредненное уравнение (3.26) можно записать в виде

$$w_{tt} = \sum_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left((\delta_{i,j} H_0 - \langle H \nabla_y^\theta b_j \rangle_{\mathbb{T}}^k) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right). \tag{3.27}$$

где

$$b_j(x,y) = \frac{1}{\Delta^\theta} (\theta_{1x_j} H_{y_1} + \theta_{2x_j} H_{y_2}),$$

$\langle H \nabla_y^\theta b_j \rangle_{\mathbb{T}}^k$ – компонента вектора $\langle H \nabla_y^\theta b_j \rangle_{\mathbb{T}}$ с номером k, $H_0 = \langle H(x,y) \rangle_{\mathbb{T}}$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Осреднение уравнения* (2.19) *в случае гладких решений* (*длинных волн*) *дает уравнение* (3.27).

4. Теория возмущений по малой осциллирующей части функции H

Формулы, полученные в лемме 2, содержат обращение оператора Δ_y^θ, например, чтобы найти g_1, нужно на торе $\mathbb{T}$ решить уравнение

$$\Delta_y^\theta g_1 = D\widetilde{a}, \qquad \langle g_1 \rangle_{\mathbb{T}} = 0. \tag{4.1}$$

Такое обращение оператора Δ_y^θ в явном виде если и возможно, то только в исключительных случаях. В однофазовом случае полученные формулы в принципе можно реализовать в квадратурах, однако они оказываются достаточно громоздкими (см. [10]). Поэтому с точки зрения асимптотических методов речь может идти только о теории возмущений. Эффективные асимптотические формулы можно получить в том случае, когда осциллирующая часть $\widetilde{a}$ не очень большая по сравнению со средней неосциллирующей частью $H_0(x)$, поэтому введем еще один параметр δ и положим $\widetilde{a} = \delta a$. Напомним, что $\widetilde{a} = H(x,y) - H_0(x)$, $H_0(x) = \langle H(x,y) \rangle_{\mathbb{T}}$, причем $H_0(x) > 0$. В ряде задач можно ограничиться только первыми нетривиальными поправками в разложениях по параметру δ функций $\mathcal{L}_0^{(2)}$ и $\mathcal{L}_0^{(4)}$. Такие формулы были получены в [10]. Здесь мы предлагаем другой способ вывода этих формул. В [10] сначала получались формулы для разложений g_j по степеням δ с точностью до $O(\delta^2)$, а затем эти разложения подставлялись в формулы (3.17), (3.18). Здесь мы сначала получим разложение $\mathcal{L}_0$ по степеням δ:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{0,0} + \delta \mathcal{L}_{0,1} + \delta^2 \mathcal{L}_{0,2} + O(\delta^3), \tag{4.2}$$

потом в этой формуле перейдем к соответствующим разложениям по p_ε. Формула (3.18) при таком подходе не используется.

В рассматриваемой ситуации разложение по параметрам δ и импульсам p_ε можно находить применяя теорию возмущений к уравнению (3.11). Воспользуемся следующими известными элементарными формулами теории возмущений самосопряженных операторов (см., например, [28]). Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – самосопряженные операторы в пространстве $\mathbf{H}$ со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, λ, ϕ – невырожденное собственное значение и нормированная собственная функция оператора $\mathcal{A}+\delta\mathcal{B}$:

$$(\mathcal{A}+\delta\mathcal{B})\phi=\lambda\phi, \qquad (\phi,\phi)=1. \tag{4.3}$$

Если λ и ϕ аналитичны по δ в окрестности $\delta=0$ и

$$\phi=\phi_0+\delta\phi_1+\delta^2\phi_2+(\delta^3), \qquad \lambda=\lambda_0+\delta\lambda_1+\delta^2\lambda_2+O(\delta^3),$$

то

$$\lambda_1=(\phi_0,\mathcal{B}\phi_0), \qquad \lambda_2=(\phi_1,(\mathcal{B}-\lambda_1)\phi_0), \tag{4.4}$$

где

$$\phi_1=-(\mathcal{A}-\lambda_0)^{-1}(\mathcal{B}-\lambda_1)\phi_0, \tag{4.5}$$

$(\mathcal{A}-\lambda_0)^{-1}$ – обращение оператора $\mathcal{A}$ в ортогональном к ϕ_0 подпространстве пространства $\mathbf{H}$. В нашем случае

$$\mathcal{A}=\langle(p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta),H_0(x)(p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta)\rangle, \qquad \mathcal{B}=\langle(p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta),a(x,y)(p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta)\rangle, \qquad \lambda=\mathcal{L}_0. \tag{4.6}$$

В качестве пространства $\mathbf{H}$ выберем пространство $L_2(\mathbb{T})$ с “нормированным” скалярным произведением (3.14). Все собственные функции оператора $\mathcal{A}$ легко угадываются и равны $\exp(i\langle\nu,y\rangle)$, где ν – вектор-столбец с целочисленными компонентами (ν_1,ν_2). Нас интересует только $\phi_0=\chi_{0,0}=1$. Тогда соответствующее собственное значение $\lambda_0=\mathcal{L}_{0,0}=H_0(x)p_\varepsilon^2$. Поэтому

$$\lambda_1=\mathcal{L}_{0,1}=(1,\langle(p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta),a(x,y)(p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta)\rangle 1)=p_\varepsilon^2\langle a\rangle_{\mathbb{T}}=0. \tag{4.7}$$

Из (4.4), (4.5) следует, что

$$\lambda_2=\mathcal{L}_{0,2}=-((\mathcal{A}-\lambda_0)^{-1}(\mathcal{B}-\lambda_1)\phi_0,(\mathcal{B}-\lambda_1)\phi_0).$$

Так как $(\mathcal{B}-\lambda_1)\phi_0=\langle p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta,p_\varepsilon\rangle a$, то

$$\lambda_2=\mathcal{L}_{0,2}=-((\mathcal{A}-\lambda_0)^{-1}\langle p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta,p_\varepsilon\rangle^2 a,a). \tag{4.8}$$

Здесь мы воспользовались тем, что операторы $\mathcal{A}$ и $\langle p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta,p_\varepsilon\rangle$ коммутируют, а следовательно, коммутируют операторы $(\mathcal{A}-\lambda_0)^{-1}$ и $\langle p_\varepsilon-i\nabla_y^\theta,p_\varepsilon\rangle$.

Перейдем теперь к разложению правой части (4.8) по однородным полиномам от p_ε. Представим оператор $\mathcal{A}-\lambda_0$, где $\mathcal{A}$ задается формулой (4.6), в виде

$$\mathcal{A}-\lambda_0=-H_0\langle\nabla_y^\theta,\nabla_y^\theta\rangle+2H_0\langle -i\nabla_y^\theta,p_\varepsilon\rangle=-H_0\langle\nabla_y^\theta,\nabla_y^\theta\rangle(1-S), \qquad S=2\frac{\langle -i\nabla_y^\theta,p_\varepsilon\rangle}{\langle\nabla_y^\theta,\nabla_y^\theta\rangle}.$$

Пользуясь стандартным рядом Неймана для обращения оператора $(1-S)$ и тем, что операторы $\langle\nabla_y^\theta,\nabla_y^\theta\rangle$ и S коммутируют, получим разложение оператора $(\mathcal{A}-\lambda_0)^{-1}$ по однородным полиномам переменных p_ε:

$$(\mathcal{A}-\lambda_0)^{-1}=-H_0^{-1}\langle\nabla_y^\theta,\nabla_y^\theta\rangle(1+S+S^2+\cdots).$$

Подставим это разложение и выражение

$$\langle p_\varepsilon - i\nabla_y^\theta, p_\varepsilon\rangle^2 = (p_\varepsilon^2 + \langle -i\nabla_y^\theta, p_\varepsilon\rangle)^2 = p_\varepsilon^4 + 2p_\varepsilon^2\langle -i\nabla_y^\theta, p_\varepsilon\rangle + \langle -i\nabla_y^\theta, p_\varepsilon\rangle^2 \tag{4.9}$$

в формулу (4.8) и раскроем скобки в получившемся произведении ряда $1 + S + S^2 + \cdots$ и полинома в правой части (4.9), после чего получим искомое разложение $\lambda_2 = \mathcal{L}_{0,2}$ по однородным полиномам от p_ε. Так как любая производная нечетного порядка по y является антисимметрическим оператором, то в разложении для λ_2 останутся только члены, содержащие p в четных степенях. Таким образом, получаем

$$\lambda_2 = \mathcal{L}_{0,2} = H_0^{-1}(\langle\nabla_y^\theta, \nabla_y^\theta\rangle^{-1}(\langle -i\nabla_y^\theta, p_\varepsilon\rangle^2 + (p_\varepsilon^2 + S\langle -i\nabla_y^\theta, p_\varepsilon\rangle)^2)a, a) + O(|p_\varepsilon|^6). \tag{4.10}$$

Подставим найденные ранее значения $\mathcal{L}_{0,0} = H_0(x)p_\varepsilon^2$, $\mathcal{L}_{0,1} = 0$ (см. формулу (4.7)) и выражение для $\mathcal{L}_{0,2}$ из (4.10) в разложение (4.2). Отделяя в (4.10) однородные компоненты второй и четвертой степени, получим, что для $\mathcal{L}_0^{(2)}$ и $\mathcal{L}_0^{(4)}$ имеют место приближенные формулы

$$\mathcal{L}_0^{(2)} = H_0 p_\varepsilon^2 - \delta^2 R(x,p) + O(\delta^3), \qquad R = -H_0^{-1}(\langle\nabla_y^\theta, \nabla_y^\theta\rangle^{-1}\langle -i\nabla_y^\theta, p_\varepsilon\rangle^2 a, a), \tag{4.11}$$

и

$$\mathcal{L}_0^{(4)} = -\delta^2 M(x,p) + O(\delta^3), \qquad M = -H_0^{-1}\left(\langle\nabla_y^\theta, \nabla_y^\theta\rangle^{-1}\left(p_\varepsilon^2 + 2\frac{\langle -i\nabla_y^\theta, p_\varepsilon\rangle^2}{\langle\nabla_y^\theta, \nabla_y^\theta\rangle}\right)^2 a, a\right), \tag{4.12}$$

где $O(\delta^3)$ означает однородный полином по p соответствующей степени с коэффициентами порядка $O(\delta^3)$. Если ограничиться слагаемыми порядка δ^2, то можно достаточно просто выразить $\mathcal{L}_0^{(2)}$ и $\mathcal{L}_0^{(4)}$ через коэффициенты Фурье функции a. Разложим функцию a в ряд Фурье и подставим в (4.11), (4.12). Учитывая, что экспоненты $\exp(i\langle\nu, y\rangle)$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, получим следующее утверждение.

Лемма 3. *Предположим, что* $H(x,y) = H_0(x) + \delta a(x,y)$, $H_0(x) > 0$ *при* x, *принадлежащих компакту* K, *и* $a(x,y)$ *– гладкая вещественная* 2π*-периодическая по переменным* y_j *функция с нулевым средним значением, т.е.* $\langle a\rangle_{\mathbb{T}} = 0$, *имеющая следующее разложение в ряд Фурье*:

$$a(x,y) = \sum_{\nu\neq 0} a_\nu(x)\exp(i\langle\nu, y\rangle). \tag{4.13}$$

Здесь вектор-столбец (мультииндекс) $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ *принимает значения на целочисленной решетке. Тогда*

$$\mathcal{L}_0^{(2)} = H_0 p_\varepsilon^2 - \delta^2 R(x,p) + O(\delta^3), \qquad R = \frac{1}{H_0}\sum_{\nu\neq 0}\frac{\langle\theta_x\nu, p_\varepsilon\rangle^2}{\langle\theta_x\nu, \theta_x\nu\rangle}|a_\nu|^2, \tag{4.14}$$

и

$$\mathcal{L}_0^{(4)} = -\delta^2 M(x,p) + O(\delta^3), \qquad M = \frac{1}{H_0}\sum_{\nu\neq 0}\left(p_\varepsilon^2 - 2\frac{\langle\theta_x\nu, p_\varepsilon\rangle^2}{\langle\theta_x\nu, \theta_x\nu\rangle}\right)^2\frac{|a_\nu|^2}{\langle\theta_x\nu, \theta_x\nu\rangle}. \tag{4.15}$$

В "однофазовом" случае, когда θ – скалярная функция, y – скалярная переменная, ν – индекс, формулы несколько упрощаются:

$$R = \frac{1}{H_0}\frac{\langle\theta_x, p_\varepsilon\rangle^2}{\theta_x^2}\sum_{\nu\neq 0}|a_\nu|^2, \quad M = \frac{1}{H_0\theta_x^2}\left(p_\varepsilon^2 - 2\frac{\langle\theta_x, p_\varepsilon\rangle^2}{\theta_x^2}\right)^2\sum_{\nu\neq 0}\frac{|a_\nu|^2}{\nu^2}\,.$$

Теперь перейдем к приближенному вычислению символа $\mathcal{L}_1^{(1)}$ из (3.17) и коэффициентов осредненного уравнения (3.27).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда символ $\mathcal{L}_1^{(1)}$ допускает разложение*

$$\mathcal{L}_1^{(1)} = i\delta^2\left\langle\nabla_x, \frac{1}{H_0}\sum_{\nu\neq 0}\frac{\theta_x\nu\langle\theta_x\nu, p_\varepsilon\rangle}{\langle\theta_x\nu, \theta_x\nu\rangle}|a_\nu|^2\right\rangle - i\langle\nabla_x, H_0p_\varepsilon\rangle + O(\delta^3), \tag{4.16}$$

где $O(\delta^3)$ – линейная однородная функция по p с коэффициентами порядка $O(\delta^3)$. Коэффициенты осредненного уравнения (3.27) допускают разложение

$$\langle H\nabla_y^\theta b_j\rangle_{\mathbb{T}}^k = \delta^2 B_{k,j}(x) + O(\delta^3), \tag{4.17}$$

где

$$B_{k,j}(x) = \frac{1}{H_0}\sum_{\nu\neq 0}\frac{(\theta_x\nu)^k(\theta_x\nu)^j}{\langle\theta_x\nu, \theta_x\nu\rangle}|a_\nu|^2, \tag{4.18}$$

верхний индекс k или j означает соответствующую компоненту вектора. Таким образом, с точностью до $O(\delta^3)$ осредненное уравнение (3.27) записывается в виде

$$w_{tt} = \sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(H_0(x)\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) - \delta^2\sum_{k,j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(B_{k,j}(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right). \tag{4.19}$$

Доказательство. Формулу (4.16) можно получить непосредственно из второй формулы в (3.17), подставив в нее вместо g_1 разложение g_1 по степеням δ (см. [10]). Как ясно из (4.1) в первом приближении

$$g_1 = \delta H_0^{-1}\langle\nabla_y^\theta, \nabla_y^\theta\rangle^{-1}Da + O(\delta^2), \tag{4.20}$$

где $O(\delta^2)$ – линейная однородная по p функция с коэффициентами порядка $O(\delta^2)$. После очевидных преобразований получим

$$\mathcal{L}_1^{(1)} = i\delta^2\langle\nabla_x, H_0^{-1}\langle a\nabla_y^\theta\langle\nabla_y^\theta, \nabla_y^\theta\rangle^{-1}Da\rangle_{\mathbb{T}}\rangle - i\langle\nabla_x, H_0p_\varepsilon\rangle + O(\delta^3). \tag{4.21}$$

Теперь, как и в доказательстве леммы 1, перейдем к разложению функции a в ряд Фурье, после чего из (4.21) получаем формулу (4.16). Уравнение (4.19) получается из (4.14) и (4.16) с помощью рассуждений, аналогичных тем, с помощью которых уравнение (3.27) было получено из формул (3.17). Можно также получить формулы (4.17), (4.18), подставив в левую часть равенства (4.17) вместо b_j разложение

$$b_j = \delta H_0^{-1}\langle\nabla_y^\theta, \nabla_y^\theta\rangle^{-1}(\nabla_y^\theta a)^j + O(\delta^2),$$

которое вытекает из (4.20) и равенства $g_1 = b_1p_1 + b_2p_2$. В результате получим

$$B_{k,j} = -\delta^2\langle a(\nabla_y^\theta)^k\langle\nabla_y^\theta, \nabla_y^\theta\rangle^{-1}(\nabla_y^\theta)^j a\rangle_{\mathbb{T}}. \tag{4.22}$$

Чтобы получить формулу (4.18), теперь достаточно перейти в (4.22) к разложению a в ряд Фурье.

Особенно эффективны формулы из леммы 3 в случае когда a имеет вид конечной суммы вида (4.13). Формулы (4.14), (4.15), (4.16), (4.18) также имеют конечное число слагаемых, поэтому вычисление правых частей этих формул в таких случаях сводится к конечному числу чисто алгебраических операций с коэффициентами Фурье для a и элементами матрицы θ_x.

Если включить в осредненное уравнение слагаемые, соответствующие $\mathcal{L}_0^{(4)}$, то получится линеаризованное уравнение Буссинеска с переменными коэффициентами, учитывающее так называемые дисперсионные эффекты. Уравнение такого типа получается при изучении решений системы (2.4)–(2.6) с медленно меняющимся дном и при определенных длинах волн. При этом знак, у слагаемого, содержащего четвертые степени p (или четвертые производные) аналогичного $\mathcal{L}_0^{(4)}$, оказывается положительным, в отличие от знака $L_0^{(4)}$. Поэтому с точки зрения теории волн на воде дисперсионные эффекты, вызванные быстрыми осцилляциями дна, оказываются аномальными. Этот вопрос и следствия проявления аномальной дисперсии для локализованных решений линеаризованного уравнения Буссинеска обсуждается в работах [11], [29].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*, Наука, М., 1984.

[2] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[3] В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов, *Усредненные модели микронеоднородных сред*, ФТИНТ им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, 2003.

[4] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Stud. Math. Appl., **5**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1978.

[5] Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, 1996.

[6] S. Yu. Dobrokhotov, A. I. Shafarevich, B. Tirozzi, “Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 192–221.

[7] S. Yu. Dobrokhotov, B. Tirozzi, C. A. Vargas, “Behavior near the focal points of asymptotic solutions to the Cauchy problem for the linearized shallow water equations with initial localized perturbations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:2 (2009), 228–245.

[8] S. Yu. Dobrokhotov, R. V. Nekrasov, B. Tirozzi, “Localaized Asymptotic solutions of the linear shallow-water equations with localized initial data”, *J. Engrg. Math.*, **69**:2-3 (2011), 225–242.

[9] Й. Брюнинг, В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов, “Осреднение линейных операторов, адиабатическое приближение и псевдодифференциальные операторы”, *Матем. заметки*, **92**:2 (2012), 163–180.

[10] J. Bruning, V. V. Grushin, S. Yu. Dobrokhotov, “Approximate formulas for eigenvalues of the Laplace operator on a torus arising in linear problems with oscillating coefficients”, *Russ. J. Math. Phys.*, **19**:3 (2012), 261–272.

[11] В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов, С. А. Сергеев, “Осреднение и дисперсионные эффекты в задаче о распространении волн, порожденных локализованным источником”, *Современные проблемы механики*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Андрея Геннадьевича Куликовского, Тр. МИАН, **281**, МАИК, М., 2013, 170–187.

[12] С. Ю. Доброхотов, “Приложение теории Маслова к двум задачам для уравнений с операторнозначным символом: электрон-фононное взаимодействие и уравнение Шрёдингера с быстроосциллирующим потенциалом”, *УМН*, **39**:4 (1984), 125.

[13] В. С. Буслаев, “Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами”, *УМН*, **42**:6 (1987), 77–98.

[14] Л. В. Берлянд, С. Ю. Доброхотов, ““Операторное разделение переменных” в задаче о коротковолновой асимптотике для дифференциальных уравнений с быстроменяющимися коэффициентами”, *Докл. АН СССР*, **296**:1 (1987), 80–84.

[15] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*. Т. 6. *Гидродинамика*, Наука, М., 1986.

[16] J. J. Stoker, *Water Waves. The Mathematical Theory with Applications*, Pure Appl. Math., **4**, Intersci. Publ., New York, 1957.

[17] C. C. Mei, *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, Adv. Ser. Ocean Engrg., **1**, World Sci., Singapore, 1989.

[18] С. Ю. Доброхотов, “Методы Маслова в линеаризованной теории гравитационных волн на поверхности жидкости”, *Докл. АН СССР*, **269**:1 (1983), 76–80.

[19] S. Yu. Dobrokhotov, P. N. Zhevandrov, “Asymptotic expansions and the Maslov canonical operator in the linear theory of water waves. I. Main constructions and equations for surface gravity waves”, *Russ. J. Math. Phys.*, **10**:1 (2003), 1–31.

[20] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965.

[21] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.

[22] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.

[23] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, T. Ya. Tudorovskiy, “Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics”, *J. Engrg. Math.*, **55**:1-4 (2006), 183–237.

[24] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, Т. Я. Тудоровский, “Обобщенный адиабатический принцип для описания динамики электрона в искривленных наноструктурах”, *УФН*, **175**:9 (2005), 1004–1010.

[25] В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов, “Подстановка Пайерлса и операторный метод Маслова”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 554–571.

[26] Й. Брюнинг, В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, “Обобщенное преобразование Фолди–Вутхайзена и псевдодифференциальные операторы”, *ТМФ*, **167**:2 (2011), 171–192.

[27] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*. Т. 9. *Статистическая физика*. Ч. 2. *Теория конденсированного состояния*, Наука, М., 1978.

[28] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[29] S. Yu. Dobrokhotov, S. A. Sergeev, B. Tirozzi, “Asymptotic solutions of the Cauchy problem with localized initial conditions for linearized two-dimensional Boussinesq-type equations with variable coefficients”, *Russ. J. Math. Phys.*, **20**:2 (2013), 155–171.

В. В. Грушин
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
E-mail: vvgrushin@mail.ru

Поступило
07.07.2013
Исправленный вариант
08.11.2013

С. Ю. Доброхотов
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского
РАН, г. Москва ,
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: dobr@ipmnet.ru