# Робастная стабилизация нелинейного объекта с использованием SDC параметризации

Афанасьев В.Н., Титов Д.В.

Сравнительно недавно теория $H_\infty$ робастных систем пополнилась новыми инструментами синтеза регуляторов. Для линейных неопределенных систем это матричное алгебраическое неравенство Риккати (ARI), для нелинейных – матричное неравенство Гамильтона-Якоби (HJI). HJI является неравенством с частными производными, что затрудняет применение этого метода. К тому же ARI и HJI невозможно использовать для решения терминальных задач управления неопределенными объектами. В работе предлагается метод синтеза управления для нелинейного неопределенного объекта с параметрами, зависящими от его состояния (SDC), с использованием его линейной робастной модели.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Сравнительно недавно теория $H_\infty$ робастных систем пополнилась новыми инструментами синтеза регуляторов. Для линейных неопределенных систем это алгебраическое неравенство Риккати (ARI), для нелинейных – матричное неравенство Гамильтона-Якоби (HJI) [4]. HJI является неравенством с частными производными, что затрудняет применение этого метода. Одним из возможных способов нахождения робастного управления с использованием HJI является метод, основанный на аппроксимации HJI рядом Тейлора вокруг точки равновесия [5]. Однако метод, основанный на представлении неравенства с частными производными с использованием аппроксимации возле точки равновесия, не позволяет получить более общие решения. С другой стороны, использование нелинейных матричных неравенств дает возможность исследовать системы, параметры которых зависят от состояния (SDC) [6]. Этот тип нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет перейти при синтезе робастного управления от использования неравенства Гамильтона-Якоби к неравенству Риккати с параметрами, зависящими от состояния объекта (SDRI). Другим словами, если существует положительно определенная матрица *P(x)*, параметры которой зависят от состояния объекта, и которая удовлетворяет неравенству Риккати (SDRI) и существует положительно определенная скалярная функция *V(x)*, удовлетворяющая решению *dV/dt=2P(x)x*, тогда эта функция удовлетворяет неравенству Гамильтона-Якоби (HJI).

Следует отметить, что использование метода SDRI для решения HJI наталкивается на проблему неоднозначного представления нелинейной системы в форме SDC [7]. Таким образом, решение SDRI может дать различные положительно определенные матрицы $P(x)$. Добавим, что ARI и HJI невозможно использовать для решения терминальных задач управления неопределенными объектами. В работе предлагается метод синтеза управления для нелинейного неопределенного объекта с использованием его линейной (SDC) робастной модели.

## 2. РОБАСТНЫЕ СИСТЕМЫ

### 2.1. Линейные робастные системы

Рассмотрим следующую линейную систему $S_l$

$$S_l \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t),\ x(0) = x_0\,, \\ z(t) = C_1(t)x(t) + D_{12}(t)u(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $w(t)-$ неизвестное возмущение, $z(t)-$ управляемый выход системы, $u(t)-$ управление, подлежащее нахождению. Предположим, что параметры системы имеют интервальный характер неопределенности

$$\begin{gathered} \underline{A} \le A(t) \le \overline{A},\ \underline{B_1} \le B_1(t) \le \overline{B_1},\ \underline{B_2} \le B_2(t) \le \overline{B_2},\ \underline{C_1} \le C_1(t) \le \overline{C_1}, \\ \underline{D_{12}} \le D_{12}(t) \le \overline{D_{12}} \end{gathered} \tag{2}$$

и при этом сохраняются структурные свойства системы (1) (управляемость и наблюдаемость). Кроме того, положим, что $C_1^T(t)D_{12}(t) = 0,\ D_{12}^T(t)D_{12}(t) = I$, что упростит формулировку результата, но не изменит общности постановки задачи. Алгебраическое неравенство Риккати (ARI) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$S(t)A(t)+A^T(t)S(t)+S(t)B_1(t)P^{-1}B_1^T(t)S(t)+C_1^T(t)_1C(t)<$$
$$<S(t)B_2(t)R^{-1}B_2^T(t)S(t), \quad (3)$$

где $S(t)$ положительно определенная матрица. В теории робастных систем при использовании $L_2$-нормы для отыскания управления, организованного по принципу обратной связи, вместо обратимой положительно определенной матрицы $P$ обычно вводится скалярный показатель $\|P\|=\gamma^2$, а $R=I$.

Учитывая интервальный характер параметрической неопределенности объекта (1) и неравенство Риккати (3), определим структуру $H_\infty$ регулятора и действующего возмущения в виде [1,2]

$$u(t)=-R^{-1}B_2^T Sx(t), \quad \omega(t)=-P^{-1}B_1^T Sx(t),, \quad (4)$$

где положительно определенная матрица $S$, содержащая постоянные параметры удовлетворяет неравенству

$$S\overline{A}+\overline{A}^T S+S\overline{B}_1P^{-1}\overline{B}_1^T S+\overline{C}_1^T\overline{C}<S\underline{B}_2R^{-1}\underline{B}_2^T S. \quad (5)$$

Задача синтеза управления вида (4) может быть рассмотрена как проблема конструирования оптимального управления для робастной модели объекта (1) при антагонистическом воздействии $w(t)$

$$S_l^м \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_м(t)=\overline{A}x_м(t)+\overline{B}_1w(t)+\underline{B}_2u_м(t),\ x_м(0)=x_0, \\ z(t)=\overline{C}_1x_м(t)+D_{12}u_м(t), \end{cases} \quad (6)$$

с использованием функционала качества

$$J_м(z,u_м)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left\{\|z(t)\|_Q^2-\|w(t)\|_P^2+\|u_м(t)\|_R^2\right\}dt, \quad (7)$$

где матрицы $Q\ge 0,\ R>0$. Матрица $Q$ такова, что неравенство (5) принимает вид равенства

$$S_м\overline{A}+\overline{A}^T S_м+\overline{C}_1^T\overline{C}+S_м\left[\overline{B}_1P^{-1}\overline{B}_1^T-\underline{B}_2R^{-1}\underline{B}_2^T\right]S_м+Q=0. \quad (8)$$

Весовая матрица $P$ назначена так, что матрица $M=\overline{B}_1P^{-1}\overline{B}_1^T-\underline{B}_2R^{-1}\underline{B}_2^T$ будет отрицательно полуопределенной (определенной). В этом случае одна из матриц, удовлетворяющих решению алгебраического уравнения Риккати

(ARE) (8), будет положительно определенной. Структура управления для объекта (1) будет такая же как (4), однако матрица $S$ будет заменена на положительно определенную матрицу $S_м$

$$u(t) = -R^{-1}\underline{B}_2^T S_м x(t), \quad \omega(t) = -P^{-1}\overline{B}_1^T S_м x(t). \tag{9}$$

С учетом условия выбора параметров робастной модели объекта и $x_м(0) = x_0$, можно утверждать, что

$$\begin{gathered} \left\| \left\{ \overline{A} - \left[ \underline{B}_2 R^{-1} \underline{B}_2^T - \overline{B}_1 P^{-1} \overline{B}_1^T \right] S_м \right\} x_м(t) \right\| \geq \\ \geq \left\| \left\{ A(t) - \left[ B_2(t) R^{-1} \underline{B}_2^T - B_1(t) P^{-1} \overline{B}_1^T \right] S_м \right\} x(t) \right\|. \end{gathered} \tag{10}$$

Оценим возможное рассогласование траекторий объекта (1) и его робастной модели.

Пусть $\overline{A} - \underline{A} = a$, $\overline{B_1}, -\underline{B_1} = b_1$, $\overline{B_2} - \underline{B_2} = b_2$ и $\varepsilon(t) = x_м(t) - x(t)$, где

$$\frac{d}{dt}x(t) = \underline{A}x(t) + \underline{B}_1 w(t) + \overline{B}_2 u(t),\ x(t_0) = x_0,$$

$$\frac{d}{dt}x_м(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}_1 w(t) + \underline{B}_2 u(t),\ x_м(t_0) = x_0.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = L\varepsilon(t) - c(t),\ \varepsilon(0) = 0, \tag{10}$$

где $L = \overline{A} + \left[ \overline{B}_1 P^{-1} \overline{B}_1^T - \underline{B}_2 R^{-1} \underline{B}_2^T \right] S$ и

$$c(t) = \left\{ a + \left[ b_1 P^{-1} \overline{B}_1^T - \beta_2 R^{-1} \underline{B}_2^T \right] S \right\} x(t).$$

Запишем решение уравнения (10) в виде:

$$\|\varepsilon(t)\| = \left\| \int_0^t \{\exp L[t-\tau]\} c(\tau)\, d\tau \right\|.$$

Учитывая, что корни характеристической матрицы $L$ являются действительными и отрицательными, можно назначить такие положительные постоянные $K$ и $\rho$, что $\|\exp L t\| \leq K e^{-\rho t}$. Тогда

$$\|\varepsilon(t)\| \le \int_0^t \|\exp L[t-\tau]\| \|c(\tau)\| d\tau \le K \int_0^t e^{-\rho[t-\tau]} \|c(\tau)\| d\tau . \qquad (11)$$

Как было показано, управление (9) обеспечивает системе свойства асимптотической устойчивости, т.е. $\|\widetilde{x}(0)\| > \|\widetilde{x}(t)\|$ при $t > 0$. Учитывая, что параметрические возмущения принадлежат ограниченной области возможных значений, справедливо считать, что $\| c(0) \| > \| c(t) \|$ при $t > 0$.

Тогда из (11) будем иметь оценку максимально возможного рассогласования траекторий объекта (1) и его робастной модели.

$$\|\varepsilon(t)\| \le \frac{K}{\rho}\left[1 - e^{-\rho t}\right] \left\| \left\{ a + \left[ b_1 P^{-1} \overline{B}_1^T - \beta_2 R^{-1} \underline{B}_2^T \right] S \right\} x(0) \right\|. \qquad (12)$$

2.2. Нелинейные робастные системы

Рассмотрим следующую нелинейную систему $S_{nl}$

$$S_{nl} \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = f(x) + g_1(x) w(t) + g_2(x) u(t), \; x(0) = x_0, \\ z(t) = h_1(x) + j_{12}(x) u(t), \end{cases} \qquad (13)$$

где $w(t)$, $z(t)$, $u(t) -$ те же, что и в (1). Цели робастного управления нелинейным объектом (13) те же, что и линейного объекта (1). Следуя [4] и предполагая, что $h_1^T(x) j_{12}(x) = 0, \; j_{12}^T(x) j_{12}(x) = I$, управления, организованные по принципу обратной связи, будет иметь вид

$$u(t) = -R^{-1} g_2^T(x) \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T, \;\; \omega(t) = -P^{-1} g_1^T(x) \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T \qquad (14)$$

где скалярная положительно определенная функция $V(x)$ удовлетворяет неравенству Гамильтона-Якоби (HJI)

$$\left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\} f(x) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\} g_1(x) P^{-1} g_1^T(x) \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T - \qquad (15)$$
$$- \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\} g_2(x) R^{-1} g_2^T(x) \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T + h_1^T(x) h_1(x) + \varepsilon x^T(t) x(t) \le 0, \; \varepsilon > 0.$$

При $\varepsilon x^T(t) x(t) = x^T(t) Q x(t)$ неравенство (15) обращается в алгебраическое уравнение Гамильтона-Якоби.

Отметим, что уравнение Гамильтона-Якоби, являющееся уравнением в частных производных в ряде случаев довольно трудно решить (а иногда это и невозможно). Конкретное решение может представлять лишь функционал вдоль данной траектории, а не во всей области $X$. Возникает проблема определения области $X$ при заданных начальных условиях $(x_0, 0)$, «заполненную» траекториями $x(t)$, произведенными управлениями (14). Таким образом, вопрос о существовании управления вида (14), переводящего систему (13) в начало координат из назначенного начального состояния остается открытым.

2.3. Объекты с параметрами, зависящими от состояния

Пусть

$$f(t,x) = f_1(t,x) + f_2(t,x), \tag{16}$$

где $f_1(t,x)$ − нелинейность низкого порядка, т.е. $\frac{|f_1(t,x)|}{|x|} \le \delta$, $\delta$ − малая величина, $f_2(t,x)$ − нелинейность высшего порядка [3], т.е. $\frac{|f_2(t,x)|}{|x|} \to 0$ при $|x| \to 0$. Учитывая свойства рассматриваемых нелинейностей, перейдем от (16) к

$$f(t,x) = A_1(t)x(t) + A_2(x)x(t). \tag{17}$$

Предположим также, что

$$g_1(x) = B_1(x),\ g_2(x) = B_2(x),\ h_1(x) = C_1(x)x(t),\ j_{12}(x) = D_{12}(x). \tag{18}$$

Тогда нелинейная система (13) трансформируется в систему с параметрами, зависящими от состояния (SDC)

$$S_{nl} \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = [A_1(t) + A_2(x)]x(t) + B_1(x)w(t) + B_2(x)u(t),\ x(0) = x_0, \\ z(t) = C_1(x)x(t) + D_{12}(x)u(t). \end{cases} \tag{19}$$

*Определение.* Представление управляемой и наблюдаемой системы (13) в виде (19) является эквивалентным, если матрицы $\langle [A_1(t) + A_2(x)], [B_1(x)] \rangle$ и $\langle [A_1(t) + A_2(x)], [G_2(x)] \rangle$ образуют управляемые пары, а матрицы

$\langle [A_1(t) + A_2(x)], [C_1(x)] \rangle$ образуют наблюдаемую пару при всех возможных $(t, x) \in \Omega$.

Следует отметить, что представление нелинейной системы (13) в виде (19) может оказаться неоднозначным. Определим

$$\left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T = S(x)x(t). \tag{20}$$

Тогда неравенство (15) запишется в виде

$$\begin{aligned} & x^T(t)\Big\{ S(x)[A_1(t) + A_2(x)] + [A_1(t) + A_2(x)]^T(x)S(x) + \\ & + S(x)B_1(x)P^{-1}B_1^T(x)S(x) + C_1^T(x)_1C(x)\Big\}x(t) < \\ & < x^T(t)\Big\{ S(x)B_2(x)R^{-1}B_2^T(x)S(x)\Big\}x(t). \end{aligned}$$

Откуда получаем неравенство Риккати с параметрами, зависящими от состояния (SDRI),

$$\begin{aligned} & S(x)[A_1(t) + A_2(x)] + [A_1(t) + A_2(x)]S(x) + \\ & + S(x)B_1(x)P^{-1}B_1^T(x)S(x) + C_1^T(x)_1C(t) < S(x)B_2(x)R^{-1}B_2^T(x)S(x). \end{aligned} \tag{21}$$

Управления определяются выражениями

$$\begin{aligned} & u(t) = -R^{-1}g_2^T(x)\left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T = -R^{-1}B_2^T(x)S(x)x(t), \\ & \omega(t) = -P^{-1}g_1^T(x)\left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T = -P^{-1}B_1^T(x)S(x)x(t). \end{aligned} \tag{22}$$

Как видно, найти положительно определенную матрицу $S(x)$, удовлетворяющую неравенству (19) ничуть не легче, чем отыскать функцию $\partial V(x)/\partial x(t)$, удовлетворяющую неравенству (15). Но даже нахождение матрицы $S(x)$ не гарантирует существования стабилизирующего управления, так как не определена область $X$, содержащая одновременно начальную пару $(x_0, 0)$ и цель управления, «заполненную» траекториями, произведенными управлениями вида (22).

## 3. УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ЕГО СОСТОЯНИЯ ПАРАМЕТРАМИ (SDC)

3.1. Робастная модель объекта

Сформулируем задачу управления объектом (SDC). Пусть управляемый объект описывается соотношениями (19). Необходимо построить управление, асимптотически переводящее систему за заданное время из заданного начального состояния $x(0)=x_0$ в некоторую окрестность начала координат $\|x(0)\|>\|x(T)\|\le d,\, d>0$.

Предположим, что удастся построить такое управление. Предположим также, учитывая неоднозначность представления нелинейной системы вида (13), в виде системы, параметры которой зависят от состояния (19), что класс рассматриваемых систем таков, что их параметры в процессе управления изменяются в соответствующих интервалах:

$$\|A(x(T))\|\le\|A(x(t))\|\le\|A(x_0)\|,\ \|B_1(x(T))\|\le\|B_1(x(t))\|\le\|B_1(x_0)\|,$$
$$\|B_2(x(T))\|\le\|B_2(x(t))\|\le\|B_2(x_0)\|,\ \|C_1(x(T))\|\le\|C_1(x(t))\|\le\|C_1(x_0)\|,$$
$$\|D_{12}(x(T))\|\|D_{12}(x(t))\|\|D_{12}(x_0)\|,\ t\in[t_0,T].$$

Учитывая (3), построим робастную модель системы:

$$S_{nl}^{p}\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x_p(t)=\left[\overline{A}+A(x_0)\right]x_p(t)+B_1(x_0)w(t)+B_2(x_T^*)u(t),\ x(0)=x_0\,,\\ z_p(t)=C_1(x_0)x_p(t)+D_{12}(x_T^*)u(t).\end{cases}\tag{23}$$

Здесь $\left\|x_T^*\right\|=d$.

3.2. Синтез робастного управления

Организуем управления вида (9). Для того чтобы матрица $S_м$ содержала бы информацию о начальном состоянии объекта и цели управления, назначим весовые матрицы функционала (7) $Q,\ R,\ P$ следующим образом:

$$Q=x(0)x^T(0)\,,\ \|R\|=d^2\,,\ \|P\|=\gamma^2\,,\tag{24}$$

при этом назначение весового коэффициента $\gamma^2$ должно быть таковым, чтобы матрица $M=\dfrac{1}{\gamma^2}B_1(x_0)B_1^T(x_0)-\dfrac{1}{d^2}B_2(x_n^*)R^{-1}B_2^T(x_T^*)$ была бы отрицательно полуопределенной (определенной).

Положительно определенная матрица $S_м$ будет определяться алгебраическим уравнением Риккати (ARE):

$$
\begin{aligned}
&S_м\left[\overline{A}+A(x_0)\right]+\left[\overline{A}+A(x_0)\right]^T S_м + C_1^T(x_0)C(x_0)+ \\
&+S_м\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1(x_0)B_1^T(x_0)-\frac{1}{d^2}B_2(x_T^*)B_2^T(x_T^*)\right]S_м + x_0x_0^T = 0.
\end{aligned} \qquad (25)
$$

При таком определении матрицы усиления робастного регулятора будет обеспечиваться следующее соотношение

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left[\overline{A}+A(x_0)\right]x_p(t)+\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1(x_p)B_1^T(x_0)-\frac{1}{d^2}B_2(x_p)B_2^T(x_T^*)\right]S_м\right\|\geq \\
&\geq\left\|\left[A(t)+A(x_0)\right]x(t)+\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1(x)B_1^T(x_0)-\frac{1}{d^2}B_2(x)B_2^T(x_T^*)\right]S_м\right\|,
\end{aligned}
$$

где $x_p(t)$ и $x(t)$ являются решениями уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x_p(t)=A(x_0)x_p(t)+\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1(x_p)B_1^T(x_0)-\frac{1}{d^2}B_2(x_p)B_2^T(x_T^*)\right]S_м \\
&\frac{d}{dt}x(t)=A(x)x(t)+\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1(x)B_1^T(x_0)-\frac{1}{d^2}B_2(x)B_2^T(x_T^*)\right]S_м, \\
&x_p(0)=x(0).
\end{aligned}
$$

## 4. ПРИМЕР

Рассмотрим пример, в котором нелинейный объект $S_{nl}$ описывается следующим дифференциальным уравнением

$$
S_{nl}\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}x(t)=\begin{pmatrix}-5\sin(2x_1(t))\\ x_1(t)-2x_2(t)-3x_1^3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\omega(t)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u(t),\ x(0)=x_0, \\
z(t)=\begin{pmatrix}u(t)\\5x_1(t)\\10x_2(t)\end{pmatrix},
\end{cases} \qquad (26)
$$

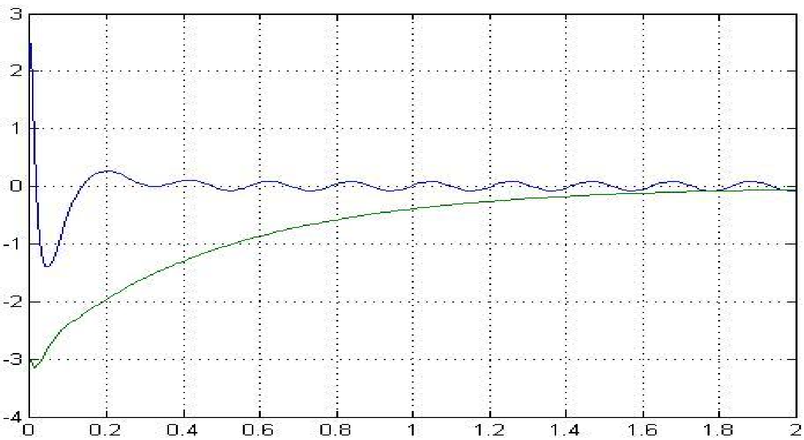
где $x^T=(x_1\ x_2)$, $\omega(t)=30\sin 15t$.

Запишем возможную SDC форму объекта (26):

$$\frac{d}{dt}x(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{-5\sin(2x_1(t))}{x_1(t)} & 0\\ x_1(t)-3x_1^2(t) & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}\omega(t)+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u(t), \tag{27}$$
$$x(0)=x_0.$$

Регулятор, синтезированный с использованием модели (27), имеет вид $u(t)=-137.12x_1(t)+80.97x_2(t)$. При этом управлении рассогласование между траекториями исходного объекта и его SDC модели нулевое.

Ниже представлены графики переходных процессов нелинейного объекта.




Список литературы


1. *Афанасьев В.Н.* Управление неопределенными динамическими объектами. −М.: Физматлит, 2008.

2. *Афанасьев В.Н.* Концепция гарантированного управления неопределенным объектом. Изв.РАН, ТиСУ, №1, 2010.

3. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 3-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 552 с.

4. *Van der Schaft A.J.* $L_2$-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback $H_\infty$ control // *IEEE. Trans. On Automatic Control*. 1992. V.37. P. 770 – 784.

5. L. *Patrong, M. Sampei, M. Koga, E. Shimaizu.* A numerical computation Approach of Hamilton-jacobi-isaacs equation in nonlinear control problem. *In 35h CDC.* 1996.

6. *Lu Wei-Min and Doyle John C.* $H_\infty$ control of nonlinear systems: A convex Characterization //*IEEE. Trans. On Automatic Control*.1995.V.40.P.168 – 175.

7. *Sakayanagi Y., Nakayama D., Shigeki N. et al.* Clarification of Free Parameters of State-dependent Coefficient Form: Effect on Solving State-dependent Riccati Inequality // *17th WC IFAC. Seoul,* 2008. P. 182-187.

**Abstract:** Since the mid-90's, State-Dependent Riccati Inequality (SDRI) strategies have emerged as general design methods that provide a systematic and effective means of designing nonlinear controllers for a robust stabilization. In this paper, a new expression of free parameters to completely express the SDC form is proposed. This form is using to design linear robust model of nonlinear system and then to synthesis the controller with constant parameters. Finally, example to verify the advantage method is given.